Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. Я. Кельберт, Вероятностное представление полигармонических функций,
Теория вероятн. и ее примен., 2009, том 54, выпуск 2, 354–359

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp2708>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и
согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.80.253.173

26 апреля 2023 г., 13:10:14

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гринь А. Г. О минимальном условии слабой зависимости в центральной предельной теореме для стационарных последовательностей. — Теория вероятн. и ее примен., 2002, т. 47, в. 3, с. 554–558.
2. Лозе М. Теория вероятностей. М.: ИЛ, 1962, 719 с.
3. Сенета Е. Правильно меняющиеся функции. М.: Наука, 1985, 141 с.
4. Ибрагимов И. А., Линник Ю. В. Независимые и стационарно связанные величины. М.: Наука, 1965, 524 с.
5. Гринь А. Г. Нормирующие последовательности в предельных теоремах для слабо зависимых величин. — Теория вероятн. и ее примен., 1991, т. 36, в. 2, с. 285–300.
6. Dehling H., Denker M., Philipp W. Central limit theorems for mixing sequences of random variables under minimal conditions. — Ann. Probab., 1986, v. 14, № 4, p. 1359–1370.
7. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. Т. 2. М.: Мир, 1984, 751 с.
8. Гринь А. Г. Области притяжения для последовательностей с перемешиванием. — Сиб. матем. журн., 1990, т. 31, № 1, с. 53–63.
9. Гринь А. Г. Об областях притяжения для сумм зависимых величин. — Теория вероятн. и ее примен., 1990, т. 35, в. 2, с. 255–270.
10. Биллингсли П. Сходимость вероятностных мер. М.: Наука, 1977, 351 с.

Поступила в редакцию
26.XII.2003

Исправленный вариант
26.II.2009

© 2009 г.

КЕЛЬБЕРТ М.*

ВЕРОЯТНОСТНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ПОЛИГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

В настоящей статье приводится формула Фейнмана–Каца высшего порядка для решений уравнения $(\Delta + V)^m u = 0$ в области D . Вероятностное представление влечет априорные оценки на рост решений, когда область D расширяется к $\mathbf{R}^d$. Оценки моментов случайного времени достижения высокого уровня для процессов Бесселя используются для доказательства слабой зависимости полигармонических функций от некоторых граничных значений.

Ключевые слова и фразы: полигармонические функции, принцип максимума, формула Фейнмана–Каца, процессы Бесселя.

1. Введение. В этой заметке мы изучаем решения уравнения

$$(L + V)^m u = 0 \tag{1.1}$$

в открытой предкомпактной области $D \subset \mathbf{R}^d$, $d \geq 2$, с регулярной границей ∂D , где $m \geq 1$ — целое число. В большей части статьи L обозначает (плоский) лапласиан $\sum_{i=1}^d \partial^2 / \partial x_i^2$, $x = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbf{R}^d$, который является генератором стандартного броуновского движения. Заметим, что многие результаты непосредственно переносятся на случай любого генератора L марковского процесса.

* Mathematics Department, University of Swansea, Singleton Park, Swansea, SA2 8PP, UK; e-mail: M.Kelbert@swansea.ac.uk

Потенциал V является непрерывной функцией и $V \leq 0$ (это предположение может быть ослаблено). В дополнение к уравнению (1.1) наложим граничные условия на ∂D :

$$(L + V)^l u(x) = (-1)^l g_l(x), \quad x \in \partial D, \quad l = 0, \dots, m-1. \quad (1.2)$$

Здесь $g_0, \dots, g_{m-1}$ — заданные (измеримые) функции на ∂D . Если функции g_l дифференцируемы $2m-2$ раз по x , то граничные условия в (1.2) понимаются в обычном (сильном) смысле, в противном случае их следует понимать в слабом смысле.

Рассматриваемая задача имеет долгую историю. В размерности $d = 2$ уравнение $\Delta^m u = 0$ изучалось в [6, § 32] (полигармонические уравнения). Полигармонические уравнения, особенно при $m = 2$, важны в задачах механики сплошных сред (колебания тонких пластин и оболочек); см., например, [6] и [7] или недавние книги [1] и [2]. Полигармонические уравнения также возникают в комплексном анализе (полианалитичность). В частности, в [6] приведены теоремы существования и единственности для задачи (1.1)–(1.2) с $m = d = 2$ (при более широком классе граничных условий). Однако информация об этих решениях остается чрезвычайно скудной.

В этой заметке мы: (i) доказываем существование и единственность решений задачи (1.1) с граничными условиями (1.2) (при любых $d \geq 1$ и $m \geq 1$); (ii) приводим вероятностное представление этих решений, (iii) выводим из этого представления некоторые априорные оценки решений и (iv) анализируем зависимость решений от граничных условий.

2. Формула Фейнмана–Каца высшего порядка.

Лемма 1. Для любой функции $g \in C(\partial D)$ определим функции v_k при всех $k = 1, \dots, m$ следующим образом: при $k = 1$ функция v_1 является решением задачи

$$(\Delta + V)v_1 = 0, \quad x \in D, \quad v_1|_{\partial D} = (-1)^{m-1}g; \quad (2.1)$$

затем функции v_k , $k = 2, \dots, m$, определяются рекуррентно как решения следующей задачи в D :

$$(\Delta + V)v_k = -v_{k-1}, \quad x \in D, \quad v_k|_{\partial D} = 0. \quad (2.2)$$

Тогда

$$\begin{aligned} v_m(x) = & \mathbf{E}_x \left(\int_0^{\tau_0} ds_0 \exp \left[\int_0^{s_0} V(B_0(u_0)) du_0 \right] \right. \\ & \times \mathbf{E}_{B_0(s_0)} \left(\int_0^{\tau_1} ds_1 \exp \left[\int_0^{s_1} V(B_1(u_1)) du_1 \right] \times \dots \right. \\ & \times \mathbf{E}_{B_{m-3}(s_{m-3})} \left(\int_0^{\tau_{m-2}} ds_{m-2} \exp \left[\int_0^{s_{m-2}} V(B_{m-2}(u_{m-2})) du_{m-2} \right] \right. \\ & \times \mathbf{E}_{B_{m-2}(s_{m-2})} \left(g(B_{m-1}(\tau_{m-1})) \right. \\ & \left. \left. \times \exp \left[\int_0^{\tau_{m-1}} V(B_{m-1}(u_{m-1})) du_{m-1} \right] \right) \dots \right) \right). \end{aligned} \quad (2.3)$$

Здесь $(B_0(t), t > 0)$ — исходное броуновское движение, выходящее из $x \in D$, и τ_0 — время достижения им границы ∂D . Далее, $(B_1(t), t > 0)$ — это броуновское движение, выходящее из точки $B_0(s_0)$, $s_0 \in (0, \tau_0)$, приращения $(B_1(\tilde{t}) - B_0(s_0), \tilde{t} > 0)$ которого независимы от процесса $(B_0(t), t > 0)$, и τ_1 — время достижения границы ∂D процессом $(B_1(t), t > 0)$. И так далее: $(B_{m-1}(t), t > 0)$ — это броуновское движение, выходящее из точки $B_{m-2}(s_{m-2})$, $s_{m-2} \in (0, \tau_{m-2})$, приращения $(B_{m-1}(\tilde{t}) - B_{m-2}(s_{m-2}), \tilde{t} > 0)$ которого независимы от процессов $(B_j(t), t > 0)$, $j = 0, \dots, m-2$, и τ_{m-1} — это время достижения границы ∂D процессом $(B_{m-1}(t), t > 0)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из уравнения (2.1) вытекает, что

$$v_1(x) = (-1)^{m-1} \mathbf{E}_x \left(g(B(\tau)) \exp \left[\int_0^\tau V(B(u)) du \right] \right).$$

Отсюда получаем

$$v_2(x) = (-1)^{m-2} \mathbf{E}_x \left(\int_0^{\tau_0} ds_0 \exp \left[\int_0^{s_0} V(B_0(u_0)) du_0 \right] \right. \\ \left. \times \mathbf{E}_{B_0(s_0)} \left(g(B_1(\tau_1)) \exp \left[\int_0^{\tau_1} V(B_1(u_1)) du_1 \right] \right) \right).$$

Продолжая эту процедуру, получим (2.3). Заметим, что формула (2.3) справедлива и в общем случае, если интеграл определен корректно.

Лемма 2. Единственное решение задачи

$$(\Delta + V)^m u = 0, \quad x \in D, \quad u|_{\partial D} = g_0, \\ (\Delta + V)u|_{\partial D} = -g_1, \quad \dots, \quad (\Delta + V)^{m-1}u|_{\partial D} = (-1)^{m-1}g_{m-1}, \quad (2.4)$$

с $g_i \in C(\partial D)$, $i = 0, \dots, m-1$, представляется в виде

$$u(x) = \mathbf{E}_x \left(g_0(B_0(\tau_0)) \exp \left[\int_0^{\tau_0} V(B_0(u_0)) du_0 \right] \right) \\ + \mathbf{E}_x \left(\int_0^{\tau_0} ds_0 \exp \left[\int_0^{s_0} V(B_0(u_0)) du_0 \right] \right. \\ \left. \times \mathbf{E}_{B_0(s_0)} \left(g_1(B_1(\tau_1)) \exp \left[\int_0^{\tau_1} V(B_1(u_1)) du_1 \right] \right) \right) + \dots \\ + \mathbf{E}_x \left(\int_0^{\tau_0} ds_0 \exp \left[\int_0^{s_0} V(B_0(u_0)) du_0 \right] \right. \\ \times \mathbf{E}_{B_0(s_0)} \left(\int_0^{\tau_1} ds_1 \exp \left[\int_0^{s_1} V(B_1(u_1)) du_1 \right] \times \dots \right. \\ \times \mathbf{E}_{B_{m-3}(s_{m-3})} \left(\int_0^{\tau_{m-2}} ds_{m-2} \exp \left[\int_0^{s_{m-2}} V(B_{m-2}(u_{m-2})) du_{m-2} \right] \right. \\ \times \mathbf{E}_{B_{m-2}(s_{m-2})} \left(g_{m-1}(B_{m-1}(\tau_{m-1})) \right. \\ \left. \left. \times \exp \left[\int_0^{\tau_{m-1}} V(B_{m-1}(u_{m-1})) du_{m-1} \right] \right) \dots \right) \right). \quad (2.5)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу линейности задачи можно предположить, что только одна из функций $g_0, \dots, g_{m-1}$ не равна тождественно нулю. В случае, когда $g_0 = \dots = g_{m-2} = 0$, результат следует из леммы 1 с $u = v_m$, $g = g_{m-1}$. Далее, при некотором $l = 1, \dots, m$ рассмотрим задачу

$$(\Delta + V)v_1 = 0, \quad x \in D, \quad v_1|_{\partial D} = 0, \\ (\Delta + V)v_k = -v_{k-1}, \quad v_k|_{\partial D} = 0, \quad k \in \{2, \dots, m\} \setminus l, \\ v_l|_{\partial D} = (-1)^{m-l}g.$$

Тогда $v_1 \equiv 0, \dots, v_{l-1} \equiv 0$ и результат следует из леммы 1 с $g = g_{m-l}$. Как и ранее, формула (2.5) справедлива и в общем случае, если все интегралы определены корректно. При $V = 0$ формула (2.5) принимает вид (2.6), см. лемму 3.

Заметим, что если знаки граничных условий перемежаются, т.е. $g_l \geq 0$, $l = 0, 1, \dots, m-1$, мы получаем, что решение $u(x)$ задачи (1.1)–(1.2) неотрицательно. Следующий частный случай впервые изучался в работе [5].

Лемма 3. Предположим, что $V \equiv 0$. Тогда единственное решение задачи (2.4) допускает представление

$$u(x) = \mathbf{E}_x \left[\frac{1}{(m-1)!} \tau^{m-1} g_{m-1}(B(\tau)) + \frac{1}{(m-2)!} \tau^{m-2} g_{m-2}(B(\tau)) + \dots \right. \\ \left. + g_0(B(\tau)) \right], \quad x \in D. \quad (2.6)$$

Доказательство. При $m = 2$, в силу марковского свойства,

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_x \left[\int_0^\tau \mathbf{E}_{B(s)} [g_1(B(\tau_1))] ds \right] &= \mathbf{E}_x \left[\int_0^\infty \mathbf{E}_{B(s)} [\mathbf{1}(s < \tau) g_1(B(\tau_1))] ds \right] \\ &= \int_0^\infty \mathbf{E}_x [\mathbf{1}(s < \tau) g_1(B(\tau))] ds = \mathbf{E}_x \left[g_1(B(\tau)) \int_0^\infty ds \mathbf{1}(s < \tau) \right] \\ &= \mathbf{E}_x [\tau g_1(B(\tau))]. \end{aligned}$$

При общем m , в силу марковского свойства,

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_x \left[\int_0^{\tau_0} ds_0 \mathbf{E}_{B_0(s_0)} \int_0^{\tau_1} ds_1 \cdots \mathbf{E}_{B_{m-3}(s_{m-3})} \left\{ \mathbf{E}_{B_{m-2}(s_{m-2})} [g_{m-1}(B_{m-1}(\tau_{m-1}))] \right\} \right] \\ = \mathbf{E}_x \left[g_{m-1}(B(\tau)) \int_0^\infty \cdots \int_0^\infty ds_0 \cdots ds_{m-2} \mathbf{1}(s_0 \leq s_1 \leq \cdots \leq s_{m-2} \leq \tau) \right] \\ = \mathbf{E}_x \left[\frac{\tau^{m-1}}{(m-1)!} g_{m-1}(B(\tau)) \right]. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Здесь использован тот факт, что $(m-1)$ броуновских движений, склеенных в промежуточных точках $s_0, \dots, s_{m-2}$ до достижения границы ∂D , распределены так же, как и единственное броуновское движение в D .

Для полноты мы приведем также прямое доказательство соотношения (2.6).

Лемма 4. Пусть L — генератор марковского процесса X , $f \in D(L)$ и $f(X(t))$ — п.н. непрерывная справа функция t . Пусть функция $\phi(t)$ абсолютно непрерывна по t . Если τ — такой момент остановки, что $\mathbf{E}_x \int_0^\tau |\phi(s)| ds < \infty$ и $\mathbf{E}_x \int_0^\tau |\phi'(s)| ds < \infty$, то

$$\mathbf{E}_x \left[\phi(\tau) f(X(\tau)) \right] - \phi(0) f(x) = \mathbf{E}_x \left[\int_0^\tau \phi'(s) f(X(s)) ds \right] + \mathbf{E}_x \left[\int_0^\tau \phi(s) L f(X) ds \right].$$

Эта лемма обобщает тождество Дынкина (см. [4]). Применяя лемму 4 к $\phi(t) = t^l$ и $(-L)^l f/l!$ и суммируя по $l \leq m-1$, получаем

$$f(x) - \mathbf{E}_x f(X(\tau)) = \sum_{l=1}^{m-1} \frac{1}{l!} \mathbf{E}_x \left[\tau^l (-L)^l f(X(\tau)) \right] + \frac{1}{m!} \mathbf{E}_x \left[\int_0^\tau s^{m-1} (-L)^m f(X(s)) ds \right]. \quad (2.8)$$

Пусть функции $v_k(x)$ определены как в лемме 1 с $V \equiv 0$ и граничным значением g . Используя равенства $(-L)^m v_m = 0$ и $(-L)^l v_k = v_{k-l}$ при $l \leq k$, получаем

$$\begin{aligned} v_m(x) &= \mathbf{E}_x v_m(X(\tau)) + \sum_{l=1}^{m-1} \mathbf{E}_x \left[\frac{1}{l!} \tau^l v_{m-l}(X(\tau)) \right] \\ &= \mathbf{E}_x \left[\frac{1}{(m-1)!} \tau^{m-1} v_1(X(\tau)) \right] = \mathbf{E}_x \left[\frac{1}{(m-1)!} \tau^{m-1} g(X(\tau)) \right]. \end{aligned} \quad (2.9)$$

3. Эллиптические граничные задачи. Рассмотрим класс $\mathcal{G}(C)$ вектор-функций $G = (g_{m-1}, g_{m-2}, \dots, g_1, g_0)$ на ∂D таких, что $|g_{m-1}| \leq C$, $|g_{m-2}| \leq C, \dots, |g_0| \leq C$, $g_i \in C(\partial D)$, $i = 0, \dots, m-1$. Пусть $\mathcal{G}_0(C) = \{G \in \mathcal{G}(C): g_{m-1} \equiv 1\}$. Будем говорить, что последовательность областей (D_n) регулярно расширяется к $\mathbf{R}^d$, если для любого $K \subset D$ (i) $R_n(K) = \text{dist}(K, \partial D_n) \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$ и (ii) $\bar{R}_n(K)/R_n(K) = 1 + o(1)$ при $n \rightarrow \infty$, где $\bar{R}_n(K) = \sup_{y \in \partial D_n} \text{dist}(y, K)$. При любом $n = 0, 1, 2, \dots$ рассмотрим классы граничных значений $\mathcal{G}^{(n)}(C)$ и $\mathcal{G}_0^{(n)}(C)$ в областях D_n , $D_0 = D$. Предположим, что константа C не зависит от n , и будем опускать индекс n .

Докажем утверждение типа теоремы Лиувилля для полигармонических функций.

Теорема 1. Пусть $\mathcal{U} = \mathcal{U}(C)$ — множество решений граничной задачи (1.1)–(1.2) в областях D_n , $D \subset D_n$, с $V \leq 0$ и граничными значениями из множества $\mathcal{G}(C)$. Тогда для любого компакта $K \subset D$ существует константа $\bar{C} = \bar{C}(K, C, d, m)$ такая, что при $u \in \mathcal{U}$

$$\sup_{x \in K} |u(x)| \leq \bar{C}(1 + \bar{R}_n^{2m-2}), \quad (3.1)$$

где $\bar{R}_n = \bar{R}_n(K) = \sup_{y \in \partial D_n} \text{dist}(y, K)$.

Теорема 2. Пусть $\mathcal{U}_0 = \mathcal{U}_0(C)$ множество решений граничной задачи (1.1)–(1.2) в области D с $V = 0$ и граничными значениями из множества $\mathcal{G}_0(C)$. Тогда существует константа $R_0 = R_0(C, d, m)$ такая, что для любого компакта $K \subset D$ с $R(K) \geq R_0$ и любых двух функций $u_1, u_2 \in \mathcal{U}_0$ при некоторой константе $\bar{C} = \bar{C}(K, C, d, m)$ выполнено неравенство

$$\sup_{x \in K} \left| \frac{u_1(x)}{u_2(x)} - 1 \right| \leq \bar{C}. \quad (3.2)$$

Теорема 3. Рассмотрим последовательность задач (1.1)–(1.2) в областях D_n , регулярно расширяющихся к $\mathbf{R}^d$. Тогда для любого компакта $K \subset D_0$ существует константа $\bar{C} = \bar{C}(K, C, d, m)$ такая, что для любых двух решений $u_1^{(n)}, u_2^{(n)} \in \mathcal{U}_0^{(n)}$ граничной задачи (1.1)–(1.2) с граничными условиями из класса $\mathcal{G}_0^{(n)}(C)$

$$\sup_{x \in K} \left| \frac{u_1(x)}{u_2(x)} - 1 \right| \leq \frac{\bar{C}}{R_n^2(K)} \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty. \quad (3.3)$$

Доказательство теоремы 1. Радиальная часть броуновского движения $|B(t)|$ является процессом Бесселя порядка $\nu = d/2 - 1$. Пусть $\tau_R = \inf\{t: |B(t)| = R\}$. Согласно [3, § 2.4, формула 2.0.1], преобразование Лапласа $\psi_R(s, x) = \mathbf{E}_x e^{-s\tau_R}$ можно представить в виде

$$\psi_R(s, x) = \frac{x^{-\nu} I_\nu(x\sqrt{2s})}{R^{-\nu} I_\nu(R\sqrt{2s})}, \quad x \leq R, \quad (3.4)$$

где I_ν — модифицированная функция Бесселя: $I_\nu(x) = i^{-\nu} J_\nu(ix)$, и J_ν — стандартная функция Бесселя. Используя хорошо известное асимптотическое разложение

$$I_\nu(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x/2)^{\nu+2k}}{k! \Gamma(\nu+k+1)}, \quad x \ll 1,$$

находим моменты $\mathbf{E}_x \tau_R^l$ при $x \leq R$, например

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_x \tau_R &= \frac{R^2 - x^2}{2(\nu+1)}, \\ \mathbf{E}_x \tau_R^2 &= \frac{(R^2 - x^2)(R^2 \nu + 3R^2 - x^2 \nu - x^2)}{8(\nu+2)(\nu+1)^2}, \\ \mathbf{E}_x \tau_R^3 &= \frac{(R^2 - x^2)B(R, x)}{48(\nu+3)(\nu+2)(\nu+1)^3}, \end{aligned}$$

где $B(R, x) = R^4 \nu^2 + 8R^4 \nu + 19R^4 - 10R^2 x^2 \nu - 2R^2 x^2 \nu^2 - 8R^2 x^2 + x^4 \nu^2 + 2x^4 \nu + x^4$. Здесь, как и ранее, $\nu = d/2 - 1$. Легко проверить, что $\sup_{x \in K} \mathbf{E}_x \tau_R^l \sim l! b(K, l, \nu) R^{2l}$ при $R \rightarrow \infty$ и $x \in K$. Теперь результат непосредственно следует из (2.6), поскольку $\mathbf{E}_x \tau^l \leq \mathbf{E}_x \tau_R^l$.

Доказательство теоремы 2. Снова используя представление (2.6), получаем:

$$\begin{aligned} \sup_{x \in K} \left| \frac{u_1(x)}{u_2(x)} - 1 \right| &\leq \sup_{x \in K} \left(\frac{\mathbf{E}_x \tau^{m-1}}{(m-1)!} + C \left(\frac{\mathbf{E}_x \tau^{m-2}}{(m-2)!} + \dots + 1 \right) \right) \\ &\times \left(\frac{\mathbf{E}_x \tau^{m-1}}{(m-1)!} - C \left(\frac{\mathbf{E}_x \tau^{m-2}}{(m-2)!} + \dots + 1 \right) \right)^{-1} - 1. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Поскольку $\mathbf{E}_x \tau^{m-1}$ доминирует в (3.5) при $R = R(K) \geq R_0$, например, $\mathbf{E}_x \tau^{m-1} \geq \mathbf{E}_x \tau^{m-2} (\mathbf{E}_x \tau_R^{m-2})^{1/(m-2)}$, то правая часть соотношения (3.5) дает равномерную оценку.

Доказательство теоремы 3. Левая часть соотношения (3.3) не превосходит

$$\frac{b(m-1)R^{2m-2} + Cb(m-2)R^{2m-4} + \dots + Cb(1)R^2 + o(R)}{b(m-1)R^{2m-2} - Cb(m-2)R^{2m-4} - \dots - Cb(1)R^2 + o(R)} - 1, \quad (3.6)$$

где $b(j) = b(K, j, \nu)$. Разлагая (3.6) при $R \rightarrow \infty$, получаем оценку сверху вида $\bar{C}(K, C, d, m)/R^2$. Константу $\bar{C}(K, C, d, m)$ можно вычислить явно.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Aronszajn N., Creese T. M., Lipkin L. J. Polyharmonic Functions. New York: Clarendon Press, 1983, 265 p.
2. Balk M. B. Polyanalytic Functions. Berlin: Akademie-Verlag, 1991, 197 p.
3. Бородин А. Н., Салминен П. Справочник по броуновскому движению. Факты и формулы. СПб.: Лань, 2000, 639 с.
4. Doléans-Dade C., Meyer P.-A. Intégrales stochastiques par rapport aux martingales locales. — Lecture Notes in Math., 1970, v. 124, p. 77–107.
5. Helms L. L. Biharmonic functions and Brownian motion. — J. Appl. Probab., 1967, v. 4, p. 130–136.
6. Гахов Ф. Д. Краевые задачи. М.: Наука, 1977, 640 с.
7. Vekua I. N. New Methods for Solving Elliptic Equations. Amsterdam/New York: North-Holland/Wiley, 1967, 358 p.

Поступила в редакцию
10.X.2008

© 2009 г. **НАДАРАЯ Э. А.***, **СОХАДЗЕ Г. А.****, **БАБИЛУА П. К.***

О НЕКОТОРЫХ КРИТЕРИЯХ СОГЛАСИЯ, ОСНОВАННЫХ НА ОЦЕНКАХ ПЛОТНОСТИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ТИПА ЯДРА

Построен критерий согласия, основанный на оценках плотности вероятностей Вольвертона–Вагнера. Изучен вопрос состоятельности, и для некоторых сближающихся альтернатив изучена асимптотика поведения мощности.

Ключевые слова и фразы: плотность распределения, критерий согласия, мощность критерия, состоятельность, предельное распределение.

1. Пусть $X_1, \dots, X_n$ — последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин, имеющих плотность распределения $f(x)$. Требуется, основываясь на выборке $X_1, \dots, X_n$, проверить гипотезу

$$H_0: f(x) = f_0(x).$$

* Тбилисский государственный университет им. Ив. Джавахишвили, факультет точных и естественных наук, ул. Университетская, 2, 0143 Тбилиси, Грузия; e-mail: p.babilua@yahoo.com, elizbar.nadaraya@tsu.ge

** Кутаисский государственный университет им. А. Церетели, факультет точных и естественных наук, ул. Царицы Тамары, 59, 4600 Кутаиси, Грузия; e-mail: giasokhil@i.ua