Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. С. Борисов, Замечание к теореме Р.Л. Добрушина и Каплинги в пуассоновской аппроксимации в абелевых группах, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2003, том 48, выпуск 3, 576–583

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp271>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.237.206.68

26 апреля 2023 г., 12:59:31

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

© 2003 г.

БОРИСОВ И. С.*

ЗАМЕЧАНИЕ К ТЕОРЕМЕ Р. Л. ДОБРУШИНА И КАПЛИНГИ
В ПУАССОНОВСКОЙ АППРОКСИМАЦИИ
В АБЕЛЕВЫХ ГРУППАХ¹⁾

Доказана более общая версия одного результата Р. Л. Добрушина, связанного с построением оптимального каплинга двух случайных элементов. В качестве приложения изучается проблема пуассоновской аппроксимации в абелевых группах. В частности, исследуется оптимальный каплинг в пуассоновской аппроксимации эмпирических процессов.

Ключевые слова и фразы: Проблема Монжа–Канторовича, теорема двойственности, абелева группа, эмпирический процесс, эмпирическая мера, пуассоновский точечный процесс, пуассоновская аппроксимация, каплинг.

1. Введение и доказательство основного результата

Пусть $\mathcal{S}$ — сепарабельное метрическое пространство. Обозначим $V(\mathcal{L}(X), \mathcal{L}(Y))$ расстояние полной вариации между борелевскими распределениями случайных величин (с.в.) X и Y со значениями в $\mathcal{S}$. В первой части заметки мы обсудим следующий фундаментальный результат Р. Л. Добрушина [1]:

Теорема А. Для любых с.в. X и Y в $\mathcal{S}$ существуют такие их копии X_0 и Y_0 соответственно, заданные на одном вероятностном пространстве, что

$$V(\mathcal{L}(X), \mathcal{L}(Y)) = \mathbf{P}(X_0 \neq Y_0) \quad (1)$$

и, кроме того,

$$V(\mathcal{L}(X), \mathcal{L}(Y)) = \inf_{X', Y'} \mathbf{P}(X' \neq Y'), \quad (2)$$

где инфимум берется по всевозможным конструкциям пары с.в. X и Y на одном вероятностном пространстве.

Соотношения (1) и (2) представляют собой так называемую теорему двойственности в задаче Монжа–Канторовича для индикаторной метрики (см., например, [2]). Эти соотношения означают, что если расстояние полной вариации между распределениями некоторых с.в. в $\mathcal{S}$ достаточно мало, то существуют их копии, совпадающие с вероятностью, близкой к единице; причем эта вероятность наибольшая среди возможных. Само построение подобных копий с.в. обычно называют каплингом. При выполнении (1) каплинг называется оптимальным.

З а м е ч а н и е 1. Если $\mathcal{S}$ является польским (полным сепарабельным метрическим пространством) с метрикой τ , то соотношения (1) и (2) следуют из более общего результата В. Штрассена [3]:

* Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, просп. Академика Коптюга, 4, 630090 Новосибирск, Россия; e-mail: sibam@math.nsc.ru

¹⁾ Работа выполнена при частичной поддержке РФФИ (проект 03-01-00459) и INTAS (грант 99-01317).

Теорема В. Для каждого $t \geq 0$ имеет место соотношение

$$\rho(t, P, Q) = \beta(t, P, Q), \quad (3)$$

где $\rho(t, P, Q) = \inf_{\xi, \eta} \{P(r(\xi, \eta) > t)\}$, $\beta(t, P, Q) = \sup\{P(Z) - Q(Z_t) : Z \text{ замкнуто в } \mathcal{S}\}$; при этом $P = \mathcal{L}(\xi)$, $Q = \mathcal{L}(\eta)$ и $Z_t = \{y \in U : \inf_{z \in Z} r(z, y) \leq t\}$.

В частности, из (3) следует, что $\rho(0, P, Q) = V(P, Q)$.

При менее ограничительных условиях на $\mathcal{S}$ (для так называемых внутренне регулярных сепарабельных метрических пространств, которые могут быть неполными) соотношение (3) было доказано Р. Дадли [4].

З а м е ч а н и е 2. Оригинальное доказательство (1) и (2) в [1], которое было проведено для произвольных метрических пространств $\mathcal{S}$ (не обязательно сепарабельных), содержит неточность, поскольку без условия сепарабельности множество элементарных исходов $\{X \neq Y\}$ декартова квадрата $\mathcal{S} \times \mathcal{S}$, вообще говоря, не принадлежит минимальной σ -алгебре подмножеств, порожденной прямоугольниками $A \times B$, где A и B — произвольные борелевские подмножества $\mathcal{S}$, на которой любые совместные распределения корректно заданы. Другими словами, не ясно, как определяется вероятность, стоящая в правой части (2) для любых построений с.в. X и Y на одном вероятностном пространстве без предположения сепарабельности $\mathcal{S}$. Для того чтобы сделать соответствующее доказательство в [1] корректным, нам нужно более аккуратно задать как оптимальное совместное распределение (X_0, Y_0) , так и вероятности, стоящие в правой части (2).

Всюду в дальнейшем $(\mathcal{S}, \mathcal{A})$ — произвольное измеримое пространство. Обозначим $\Sigma = \Sigma(\mathcal{A} \times \mathcal{A}, D)$ минимальную σ -алгебру, порожденную всеми прямоугольниками $\{A \times B; A, B \in \mathcal{A}\}$ и диагональю $D = \{(x, y) : x = y\}$ из $\mathcal{S} \times \mathcal{S}$. Для любых наперед заданных $\mathcal{S}$ -значных с.в. X и Y обозначим $J(X, Y)$ множество Σ -измеримых отображений (Z_1, Z_2) основного вероятностного пространства в $\mathcal{S} \times \mathcal{S}$, удовлетворяющих условию $\mathcal{L}(Z_1) = \mathcal{L}(X)$ и $\mathcal{L}(Z_2) = \mathcal{L}(Y)$. Иными словами, класс $J(X, Y)$ задает множество совместных распределений на Σ , у которых маргинальные распределения (проекции) фиксированы. Следующее утверждение является более общей версией упомянутого выше результата Р. Л. Добрушина.

Теорема 1. Существует пара с.в. $(X_0, Y_0) \in J(X, Y)$, удовлетворяющая (1); при этом

$$V(\mathcal{L}(X), \mathcal{L}(Y)) = \inf_{(z_1, z_2) \in J(X, Y)} P(Z_1 \neq Z_2).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Обозначим P_1 и P_2 распределения с.в. X и Y соответственно. Доказательство Р. Л. Добрушина базируется на классическом разложении Хана-Жордана исходного пространства $\mathcal{S} = \mathcal{S}^+ \cup \mathcal{S}^-$ соответственно на множества положительности и отрицательности знакопеременной меры $G := P_1 - P_2$. Другими словами, $G(A \cap \mathcal{S}^+) \geq 0$ и $G(A \cap \mathcal{S}^-) \leq 0$ для любого $A \in \mathcal{A}$. Отметим хорошо известное соотношение

$$V(P_1, P_2) = G(\mathcal{S}^+) = |G(\mathcal{S}^-)|.$$

Положим $\nu(A) := P_2(A \cap \mathcal{S}^+) + P_1(A \cap \mathcal{S}^-)$ и $\alpha := \nu(\mathcal{S})$. Понятно, что $\alpha \leq 1$, поскольку из определения $\mathcal{S}^+$ и $\mathcal{S}^-$ следует оценка $\nu(A) \leq \min\{P_1(A), P_2(A)\}$. Мы опускаем случаи $\alpha = 0$ и $\alpha = 1$, так как в первом из них $V(P_1, P_2) = 1$, т.е. $P_1 \perp P_2$, а во втором — соответственно $P_1 = P_2$, и рассматриваемая задача решается очевидным образом.

Пусть $0 < \alpha < 1$. Рассмотрим следующие вероятностные меры:

$$\mu(A) := \frac{\nu(A)}{\alpha}, \quad \lambda_1(A) := \frac{P_1(A) - \nu(A)}{1 - \alpha}, \quad \lambda_2(A) := \frac{P_2(A) - \nu(A)}{1 - \alpha}.$$

Искомое оптимальное совместное распределение $\mathcal{P}(\cdot)$ на выборочном пространстве $(\mathcal{S} \times \mathcal{S}, \Sigma)$ задается следующими двумя соотношениями: для любых $A, B \in \mathcal{A}$ полагаем

$$\mathcal{P}(A \times B) = \alpha \mu(A \cap B) + (1 - \alpha) \lambda_1(A) \lambda_2(B), \quad \mathcal{P}((A \times B) \cap D) = \alpha \mu(A \cap B).$$

Отметим, что для сепарабельного метрического пространства при построении того или иного совместного распределения достаточно задать его только на прямоугольниках $A \times B$ (что как раз и сделано в [1], правда, без условия сепарабельности). Другими словами, мы определили элементарную меру (σ -аддитивную) на минимальном полукольце, содержащем все канонические прямоугольники и диагональ пространства $\mathcal{S} \times \mathcal{S}$. В силу классической теоремы о продолжении меры (см., например, [5]) мы можем распространить эту элементарную вероятностную меру на минимальную σ -алгебру, содержащую упомянутое полукольцо подмножеств.

Легко видеть, что $\mathcal{P}(A \times \mathcal{S}) = P_1(A)$, $\mathcal{P}(\mathcal{S} \times B) = P_2(B)$ и $\mathcal{P}(D) = \nu(\mathcal{S}) = P_2(\mathcal{S}^+) + P_1(\mathcal{S}^-) = 1 - G(\mathcal{S}^+) = 1 - V(P_1, P_2)$. Соотношения (1) и (2) следуют из вышеприведенных равенств и элементарного неравенства $P_1(A) \leq P_2(A) + P(X \neq Y)$, которое не зависит от способа построения с.в. X и Y на одном вероятностном пространстве с измеримой диагональю и обладает очевидной симметрией, что и влечет за собой оценку

$$V(P_1, P_2) \leq P(X \neq Y).$$

Теорема доказана.

З а м е ч а н и е 3. Построение оптимального совместного распределения пары с.в. (X_0, Y_0) , аналогичное конструкции Р. Л. Добрушина, можно найти в более ранней работе Л. Ле Кама [6], но без доказательства соотношений (1) и (2). Построение Ле Кама базируется на понятии минимальной меры, что, на самом деле, эквивалентно упомянутому выше разложению Хана-Жордана. Так что каплинг Ле Кама также обеспечивает выполнение равенства (1).

2. Пуассоновская аппроксимация в абелевых группах

Пусть $\{X_k; k \geq 1\}$ — независимые одинаково распределенные (н.о.р.) с.в., принимающие значения в произвольной измеримой абелевой (т.е. коммутативной) группе $(\mathcal{G}, +, \mathcal{A})$ с измеримой групповой операцией. Предполагается, что одноточечное множество $\{0\}$ принадлежит σ -алгебре $\mathcal{A}$ и для любой с.в. X обратный элемент X^- также является измеримым отображением вероятностного пространства. В этом случае мы не имеем проблем, связанных с измеримостью диагонали, ввиду равенства событий $\{X = Y\} = \{X + Y^- = 0\}$.

Пусть $\{X_i^0\}$ — н.о.р.с.в. с распределением $\mathcal{L}(X_1^0) = \mathcal{L}(X_1 | X_1 \neq 0)$; выражение в правой части этого равенства обозначает условное распределение X_1 при условии $\{X_1 \neq 0\}$. При этом мы не рассматриваем тривиальный случай вырожденного в нуле распределения X_1 . Положим $p := P(X_1 \neq 0)$, $S_n := \sum_{i \leq n} X_i$ и $S_n^0 := \sum_{i \leq n} X_i^0$. Через Π_n обозначим с.в. с так называемым сопровождающим (для S_n) пуассоновским распределением. Хорошо известно, что эта с.в. совпадает по распределению с суммой $S_{\pi(n)}$, где с.в. $\pi(n)$ имеет пуассоновское распределение с параметром n и не зависит от исходной последовательности с.в. Здесь и всюду в дальнейшем по определению полагаем $S_0 = 0$ (или $S_0^0 = 0$). Нам понадобится следующее более удобное по сравнению с приведенным выше представление с.в. Π_n , а также аналогичное представление для с.в. S_n :

$$\mathcal{L}(S_n) = \mathcal{L}(S_n^0), \quad \mathcal{L}(\Pi_n) = \mathcal{L}(S_n^0), \quad (4)$$

где $\mathcal{L}(\nu) = B_{n,p}$ — биномиальное распределение с параметрами n и p ; $\mathcal{L}(\pi) = P_{n,p}$ — классическое пуассоновское распределение с параметром np ; при этом пара с.в. (ν, π) не зависит от последовательности $\{X_i^0\}$.

Эти представления в той или иной форме можно встретить в работах ряда авторов (см., например, [5]–[14]). Отсюда немедленно следует (скажем, с помощью теоремы 1) следующее неравенство:

$$V(\mathcal{L}(S_n), \mathcal{L}(\Pi_n)) \leq V(B_{n,p}, P_{n,p}). \quad (5)$$

Кроме того, если с вероятностью 1 существует измеримое отображение $S_n^0 \rightarrow n$, то нетрудно показать, что

$$V(\mathcal{L}(S_n), \mathcal{L}(\Pi_n)) = V(B_{n,p}, P_{n,p}). \quad (6)$$

Например, для одномерных выборок последнее равенство имеет место, если распределение X_1^0 двуточечное с рациональным и иррациональным атомами.

Иными словами, проблема аппроксимации в терминах расстояния полной вариации распределений сумм н.о.р.с.в. в абелевых группах сопровождающими пуассоновскими законами сводится к аналогичной проблеме в простейшем одномерном случае, т.е. к пуассоновской аппроксимации биномиального распределения. На наш взгляд, использование соотношений (5) и (6) позволяет получать соответствующие оценки в многомерном случае кратчайшим путем. Применяя теорему 1, мы можем легко получить и соответствующий каплинг с точной верхней оценкой вероятности несоответствия.

Нередко в литературе изучается аппроксимация распределений сумм многомерных с.в. с помощью обобщенных пуассоновских законов, отличных от сопровождающих. В этом случае полезно иметь в виду хорошо известное представление обобщенных пуассоновских распределений в виде операторных экспонент. Обозначим через $Pois(\mu)$ обобщенное пуассоновское распределение в $(\mathcal{G}, +, \mathcal{A})$ с мерой Леви μ :

$$Pois(\mu) := e^{-\mu(\mathcal{G})} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mu^{*k}}{k!}, \quad (7)$$

где μ^{*k} — k -кратная свертка конечной меры μ с собой; μ^{*0} — единичная масса, сосредоточенная в нуле. В частности, используя соотношения (4), легко убедиться в справедливости равенства

$$\mathcal{L}(\Pi_n) = Pois(n\mathcal{L}(X_1)) = Pois(np\mathcal{L}(X_1^0)). \quad (8)$$

Имеет место следующее утверждение.

Лемма. Для любых конечных мер μ и λ имеет место неравенство

$$V(Pois(\mu), Pois(\lambda)) \leq 2V(\mu, \lambda); \quad (9)$$

при этом множитель «2» в правой части (9) становится излишним, если $\lambda(\mathcal{G}) = \mu(\mathcal{G})$ или $\lambda \geq \mu$ ($\lambda \leq \mu$).

Доказательство. В силу очевидной симметрии мы можем считать, что $\mu(\mathcal{G}) \leq \lambda(\mathcal{G})$. Тогда для любого измеримого A

$$\begin{aligned} & Pois(\mu)(A) - Pois(\lambda)(A) \\ &= (e^{-\mu(\mathcal{G})} - e^{-\lambda(\mathcal{G})}) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mu^{*k}(A)}{k!} + e^{-\lambda(\mathcal{G})} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\mu^{*k}(A)}{k!} - \frac{\lambda^{*k}(A)}{k!} \right). \end{aligned}$$

Отметим, что в случае $\lambda \geq \mu$ две суммы в правой части этого равенства имеют различные знаки. Поэтому норма полной вариации этой правой части не превосходит максимума из соответствующих норм этих двух слагаемых.

Утверждения леммы следуют из приведенного равенства и следующих трех оценок:

$$\begin{aligned} e^{-\mu(\mathcal{G})} - e^{-\lambda(\mathcal{G})} &\leq (\lambda(\mathcal{G}) - \mu(\mathcal{G}))e^{-\mu(\mathcal{G})}, & \mu^{*k}(A) &\leq \mu(\mathcal{G})^k, \\ V(\mu^{*k}, \lambda^{*k}) &\leq k\lambda(\mathcal{G})^{k-1}V(\mu, \lambda). \end{aligned}$$

Лемма доказана.

Неравенство (9) усиливает соответствующий результат в ([15, р. 87]), где был получен аналог (9) с множителем «3» вместо «2» в правой части.

В качестве следствия теоремы 1, соотношений (4), (8), (9), а также классической оценки Прохорова–Ле Кама для правой части (5) (см. [7], [16] и [17]), мы можем сформулировать следующий результат.

Теорема 2. Пусть $\Pi(\mu)$ — с.в. в $(\mathcal{G}, +, \mathcal{A})$ с распределением $Pois(\mu)$. Тогда с.в. S_n и $\Pi(\mu)$ можно так задать на одном вероятностном пространстве, что

$$P\{S_n \neq \Pi(\mu)\} \leq \min\{p, np^2\} + 2V(np\mathcal{L}(X_1^0), \mu). \quad (10)$$

Следствие. Пусть $\{X_{nk}; k \leq n\}$, $n = 1, 2, \dots$, — схема серий н.о.р.с.в. со значениями в $(\mathcal{G}, +, \mathcal{A})$. Пусть для некоторой конечной меры μ выполнено следующее условие:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} V(np_n\mathcal{L}(X_{n1}^0), \mu) = 0, \quad (11)$$

где $p_n = P(X_{n1} \neq 0)$. Тогда для каждого n с.в. $S_n^{(n)} := \sum_{k \leq n} X_{nk}$ и $\Pi(\mu)$ можно так задать на одном вероятностном пространстве, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(S_n^{(n)} \neq \Pi(\mu)) = 0. \quad (12)$$

Отметим, что в условиях этого следствия имеет место соотношение $p_n \rightarrow \mu(\mathcal{G})$ при $n \rightarrow \infty$. Поэтому с помощью верхней оценки в (10) можно исследовать скорость сходимости в (12).

З а м е ч а н и е 4. Приведенное выше условие измеримости групповой операции «+» можно ослабить. На самом деле, нам достаточно задать лишь распределения с.в. S_n^0 для всех n . Иными словами, если $0 \in \mathcal{A}$, то мы можем аксиоматически определить эти самые n -кратные свертки на соответствующем вероятностном пространстве, а затем с их помощью задать и распределения S_n (см. [10]). В этом случае сопровождающий пуассоновский закон будет также корректно определен. Тем не менее, для произвольных конструкций пары с.в. S_n и $\Pi(\mu)$ на одном вероятностном пространстве мы не сможем гарантировать измеримость множества элементарных исходов $\{S_n \neq \Pi(\mu)\}$. Теорема 2 как раз и обеспечивает такую конструкцию указанной пары с.в., для которой диагональное множество будет измеримым.

3. Пуассоновская аппроксимация эмпирических процессов

Пусть $\{Y_{nk}; k \leq n\}$, $n = 1, 2, \dots$, — схема серий н.о.р.с.в., принимающих значения в произвольном измеримом пространстве $(\mathcal{S}, \mathcal{A})$. Для каждого n по выборке $\{Y_{nk}; k \leq n\}$ определим нормированный эмпирический процесс, индексированный произвольным семейством $\mathcal{F}$ вещественнозначных измеримых функций на $(\mathcal{S}, \mathcal{A})$:

$$S_n(f) := \sum_{k \leq n} f(Y_{nk}), \quad f \in \mathcal{F}.$$

Мы рассматриваем S_n как с.в. со значениями в пространстве Колмогорова $(R^{\mathcal{F}}, \mathcal{C})$ всех действительных функций с параметрическим множеством $\mathcal{F}$ и цилиндрической σ -алгеброй $\mathcal{C}$.

Обозначим через $\nu_n(A) := S_n(I_A)$, $A \in \mathcal{A}$, нормированную эмпирическую меру, где $I_A(\cdot)$ — индикаторная функция. Следующая теорема непосредственно вытекает из приведенного выше следствия теоремы 2.

Теорема 3. Пусть для некоторого подмножества $B \in \mathcal{A}$ и некоторой конечной меры λ с носителем в B имеет место соотношение $V(p_n \mathcal{L}(Y_{n1}^B), \lambda) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, где $\mathcal{L}(Y_{n1}^B) = \mathcal{L}(Y_{n1} \mid Y_{n1} \in B)$ и $p_n = P(Y_{n1} \in B)$. Тогда выборку $\{Y_{nk}; k \leq n\}$ можно так задать на одном вероятностном пространстве с пуассоновским точечным процессом π_λ на $\mathcal{A}$, имеющим среднюю меру λ , что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P \left\{ \sup_{A \subseteq B} |\nu_n(A) - \pi_\lambda(A)| \neq 0 \right\} = 0.$$

В силу очевидного представления $S_n(f) = \int_{\mathcal{S}} f(x) \nu_n(dx)$ теорему 3 можно переформулировать в следующем виде.

Теорема 3'. При выполнении условий теоремы 3 случайный процесс $S_n(f)$ для любого n можно так определить на одном вероятностном пространстве с обобщенным пуассоновским процессом

$$\Pi(f) := \int_{\mathcal{S}} f(x) \pi_\lambda(dx), \quad \text{что} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} P \left\{ \bigcup_{f \in \mathcal{F}} \{S_n(f) \neq \Pi(f)\} \right\} = 0.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о т е о р е м ы 3. Введем следующие обозначения:

$$X_{nk} := \{I_{A \cap B}(Y_{nk}); A \in \mathcal{A}\}, \quad X_{nk}^0 := \{I_A(Y_{nk}); A \in \mathcal{A}\}, \\ p_n := P(Y_{n1} \in B) = P(X_{n1} \neq 0).$$

Мы рассматриваем траектории случайных процессов $\{X_{nk}\}$ как элементы соответствующего пространства Колмогорова. Для того чтобы применить следствие теоремы 2, нам нужно проверить условие (11). Обозначим $\{Z_i; i \geq 1\}$ последовательность

$\mathcal{S}$ -значных н.о.р.с.в. с распределением $\lambda(\cdot)/\lambda(\mathcal{S})$. Нетрудно видеть, что мера Леви пуассоновского точечного процесса π_λ , введенного в формулировке теоремы 3, равна $\mu := \lambda(\mathcal{S})\mathcal{L}\{I_A(Z_1); A \in \mathcal{A}\}$. Остается только оценить расстояние полной вариации в пространстве Колмогорова между конечными мерами μ и $np_n\mathcal{L}\{I_A(Y_{n1}^B); A \in \mathcal{A}\}$. Для того чтобы это сделать, нам нужно оценить близость указанных мер лишь на классе всех конечномерных цилиндрических подмножеств. Отметим, что для любых измеримых подмножеств $A_1, \dots, A_k$ и произвольной $\mathcal{S}$ -значной с.в. ξ имеет место равенство событий $\{I_{A_1}(\xi) = e_1, \dots, I_{A_k}(\xi) = e_k\} = \{\xi \in \bigcap_{i \leq k} C_i\}$, где $e_i \in \{0, 1\}$, причем $C_i = A_i$, если $e_i = 1$, и $C_i = A_i^c$ (A^c — дополнение A) в противном случае. Следовательно,

$$V(np_n\mathcal{L}(X_{n1}^0), \mu) \leq V(np_n\mathcal{L}(Y_{n1}^B), \lambda).$$

Применение теоремы 1 завершает доказательство.

З а м е ч а н и е 5. Сходимость в терминах расстояния полной вариации распределений сужений на подмножество B траекторий точечного процесса $\nu_n(\cdot)$ к распределениям аналогичных сужений $\pi_\lambda(\cdot)$ изучалась в [15]. Так что утверждение теоремы 3 можно вывести из теоремы 1 и теоремы 3.2.3 в [15]. Отметим также, что при выполнении некоторых условий сепарабельности на параметрическое множество подобный каплинг (с использованием теоремы Р. Л. Добрушина) был также предложен в [18].

З а м е ч а н и е 6. Многие авторы изучали вопросы пуассоновской аппроксимации в различных частных случаях, близких к описанной в теореме 3 схеме, и применяли эту аппроксимацию в различных предельных теоремах. Например, рассматривались задачи аппроксимации эмпирической меры $\nu_n(A)$, в которых параметрическое множество состоит из всех борелевских $A \subseteq B$, где B — фиксированное ограниченное борелевское подмножество в $\mathbf{R}^k$, или всех подмножеств вида $A = \{x \in \mathbf{R}^k: x \geq a\}$, $a \geq a_0 > 0$, (знаки « $\geq$ » и « $>$ » обозначают соответствующие покоординатные неравенства); при этом $X_{n1} = m(n)X_1$, где $m(n) \rightarrow \infty$ в первом из этих случаев и $m(n) \rightarrow 0$ — во втором (так называемые локальные или хвостовые эмпирические процессы; см. [10]–[12], [18]–[23] и др.). Некоторые из этих авторов использовали так называемый каплинг Серфлинга при изучении аппроксимации сопровождающими пуассоновскими процессами (см. замечание 7 ниже).

Отметим, что аналоги неравенства (5) для указанных выше частных случаев можно обнаружить, например, в работах [10], [11], [21], [23] и некоторых других. На самом деле, для тех или иных сужений эмпирических процессов практически всегда будет иметь место равенство (6), поскольку по траектории соответствующих условных процессов, как правило, однозначно восстанавливается объем выборки (т.е. число слагаемых в сумме S_n^0). Например, сказанное будет иметь место в условиях теоремы 3.

Отметим также, что при тех или иных условиях сепарабельности параметрического множества, соответствующие ссылки на упомянутый выше результат Р. Л. Добрушина содержатся в работах [10]–[13] и [18].

З а м е ч а н и е 7. В середине 70-х годов прошлого столетия при исследовании близости в теореме Пуассона были разработаны два по сути близких каплинга, предложенных независимо Р. Серфлингом [24] и А. А. Боровковым ([25, с. 118]). Метод А. А. Боровкова основан на сравнении квантильных преобразований бернуллиевской и соответствующей пуассоновской функций распределения. Мера Лебега множества несовпадения (как, впрочем, и в методе Р. Серфлинга, несмотря на некоторое расхождение этих двух конструкций) указанных квантильных преобразований на единичном интервале равна $p(1 - e^{-p}) < p^2$. Стоит отметить, что упомянутый выше оптимальный каплинг Ле Кама обеспечивает построение этих случайных величин на одном вероятностном пространстве с меньшей вероятностью их несовпадения (см. [6, с. 186]). Так что отсюда немедленно следует верхняя оценка np^2 (полученная впервые, по-видимому, Л. Ле Камом в [7]) для вероятности несовпадения двух с.в., имеющих биномиальное распределение с параметрами n, p и сопровождающее пуассоновское распределение (с параметром np), которые заданы на вероятностном пространстве $[0, 1]^n$ с мерой Лебега в качестве вероятности. Кроме того, нетрудно показать, что в каплингах Боровкова или Серфлинга нижняя оценка для упомянутой вероятности несовпадения биномиальной и пуассоновской с.в. имеет порядок np^2 . Од-

нако теорема Добрушина позволяет строить оптимальный каплинг в пуассоновской аппроксимации биномиального распределения с вероятностью несовпадения порядка $\min\{p, np^2\}$ равномерно по всем значениям n и p . Это величина есть не что иное как комбинированная оценка Ю. В. Прохорова [16] и Л. Ле Кама [7] для расстояния полной вариации между рассматриваемыми распределениями. Другими словами, упомянутые методы Л. Ле Кама, А. А. Боровкова и Р. Серфлинга базируются на независимых каплингах для каждого из n слагаемых и обеспечивают худшую аппроксимацию для биномиального распределения, нежели каплинг Добрушина (как, впрочем, и Ле Кама) для целой суммы.

Важно отметить, что каплинги Боровкова и Серфлинга применимы только в задачах аппроксимации распределений сумм н.о.р.с.в. сопровождающими пуассоновскими законами, когда задачу удастся свести к одномерному случаю (см. доказательство теоремы 2). Однако предельные пуассоновские процессы в теоремах 3 и 3', вообще говоря, отличаются от соответствующих сопровождающих пуассоновских процессов. В этом случае одними лишь каплингами Боровкова и Серфлинга не обойтись.

З а м е ч а н и е 8. Упомянутый в замечании 7 каплинг Боровкова, на самом деле, представляет собой частный случай хорошо известного ε -каплинга, предложенного Ю. В. Прохоровым [26] при изучении скорости сходимости в принципе инвариантности Донскера. Этот метод также основан на сравнении квантильных преобразований функций распределения независимых приращений на интервалах подходящей длины классического процесса частных сумм и винеровского процесса.

При изучении близости между распределениями двух процессов частных сумм, построенных соответственно по последовательностям бернуллиевских и сопровождающих пуассоновских с.в. («пуассоновский принцип инвариантности» или сильная пуассоновская аппроксимация), мы с равными основаниями можем использовать как конструкции Р. Л. Добрушина и Л. Ле Кама, так и А. А. Боровкова и Р. Серфлинга, поскольку нижняя оценка для расстояния полной вариации между распределениями указанных процессов частных сумм в соответствующем выборочном пространстве имеет порядок np^2 (см. [11]).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Добрушин Р. Л. Задание системы случайных величин при помощи условных распределений. — Теория вероятн. и ее примен., 1970, т. 15, в. 3, с. 469–497.
2. Рачев С. Т. Задача Монжа–Канторовича о перемещении масс и ее применения к стохастике. — Теория вероятн. и ее примен., 1984, т. 29, в. 4, с. 625–653.
3. Strassen V. The existence of probability measures with given marginals. — Ann. Math. Statist., 1965, v. 36, № 2, p. 423–439.
4. Dudley R. M. Distances of probability measures and random variables. — Ann. Math. Statist., 1968, v. 39, № 5, p. 1563–1572.
5. Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1989, 544 с.
6. Le Cam L. On the distribution of sums of independent random variables. — In: Bernoulli, Bayes, Laplace (anniversary volume). Berlin: Springer, 1965, p. 179–202.
7. Le Cam L. An approximation theorem for the Poisson binomial distribution. — Pacific J. Math., 1960, v. 10, № 4, p. 1181–1197.
8. Khintchine A. Asymptotische Gesetze der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Berlin: Verlag von Julius Springer, 1933.
9. Хинчин А. Я. Асимптотические законы теории вероятностей. М.: ГТТИ, 1936, 96 с.
10. Borisov I. S. Strong Poisson and mixed approximations of sums of independent random variables in Banach spaces. — Siberian Adv. Math., 1993, v. 3, № 2, p. 1–13.
11. Борисов И. С. Пуассоновская аппроксимация процесса частных сумм в банаховых пространствах. — Сиб. матем. жур., 1996, т. 37, № 4, с. 723–731.
12. Borisov I. S. A note on Poisson approximation of rescaled set-indexed empirical processes. — Statist. Probab. Lett., 2000, v. 46, № 2, p. 101–103.

13. Борисов И. С., Миронов Д. В. Асимптотическое представление отношения правдоподобия для многомерных выборок с разрывными плотностями. — Теория вероятн. и ее примен., 2000, т. 45, в. 2, с. 345–356.
14. Боровков К. А. К вопросу об уточнении пуассоновской аппроксимации. — Теория вероятн. и ее примен., 1988, т. 33, в. 2, с. 343–347.
15. Reiss R.-D. A Course on Point Processes, New York: Springer, 1993.
16. Прохоров Ю. В. Асимптотическое поведение биномиальных распределений. — Успехи матем. наук, 1953, т. 8, № 3, с. 135–142.
17. Barbour A. D., Hall P. On the rate of Poisson convergence. — Math. Proc. Cambridge Philos. Soc., 1984, т. 95, p. 473–480.
18. Einmahl J. H. J. Poisson and Gaussian approximation of weighted local empirical processes. — Stochastic Process. Appl. 1997, v. 70, p. 31–58.
19. Deheuvels P., Mason D. M. Nonstandard functional laws of the iterated logarithm for tail empirical and quantile processes. — Ann. Probab., 1990, v. 18, p. 1693–1722.
20. Deheuvels P., Mason D. M. Nonstandard local empirical processes indexed by sets. — J. Statist. Plann. Inference, 1995, v. 45, p. 91–112.
21. Deheuvels P., Pfeifer D. Poisson approximation of multinomial distributions and point processes. — J. Multivariate Anal., 1988, v. 25, p. 65–89.
22. Horváth L. A note on the rate of Poisson approximation of empirical processes. — Ann. Probab., 1990, v. 18, № 2, p. 724–726.
23. Major P. A note on the approximation of the uniform empirical processes. — Ann. Probab., 1990, v. 18, № 1, p. 129–139.
24. Serfling R. J. A general Poisson approximation theorem. — Ann. Probab., 1975, v. 3, № 4, p. 726–731.
25. Боровков А. А. Теория вероятностей. М.: Наука, 1976, 352 с.
26. Прохоров Ю. В. Сходимость случайных процессов и предельные теоремы теории вероятностей. — Теория вероятн. и ее примен., 1956, т. 1, в. 2, с. 757–238.

Поступила в редакцию
16.XII.2002

© 2003 г.

МАЗАЛОВ В. В.*, ПЕШКОВ Н. В.*

ОБ АСИМПТОТИЧЕСКИХ СВОЙСТВАХ ОПТИМАЛЬНОГО МОМЕНТА ОСТАНОВКИ¹⁾

Показано, что оптимальный момент остановки N независимых одинаково распределенных случайных величин в задаче с полной информацией имеет следующие асимптотические свойства: $ET_N \approx N/3$, $DT_N \approx N^2/18$.

Ключевые слова и фразы: оптимальный момент остановки, асимптотические свойства, полная информация.

1. Введение. При решении задачи оптимальной остановки случайных величин $X_1, X_2, \dots, X_N$ с полной информацией, в которой необходимо определить момент остановки τ , максимизирующий EX_τ , используется уравнение оптимальности [1]–[4] вида

$$V_N(x) = x, \quad V_i(x) = \max\{x, EV_{i+1}(X_i)\}, \quad i = 1, \dots, N-1.$$

* Институт прикладных математических исследований, Карельский научный центр РАН, ул. Пушкинская, 11, 185610 Петрозаводск, Россия; e-mail: vmazalov@krc.karelia.ru, peshkovn@mail.ru

¹⁾ Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 01-01-00126).