Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Э. А. Надарая, Г. А. Сохадзе, П. Бабилау, О некоторых критериях согласия, основанных на оценках плотности распределения типа ядра, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2009, том 54, выпуск 2, 359–367

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp2710>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.92.164.108

26 апреля 2023 г., 17:30:44

Поскольку $\mathbf{E}_x \tau^{m-1}$ доминирует в (3.5) при $R = R(K) \geq R_0$, например, $\mathbf{E}_x \tau^{m-1} \geq \mathbf{E}_x \tau^{m-2} (\mathbf{E}_x \tau_R^{m-2})^{1/(m-2)}$, то правая часть соотношения (3.5) дает равномерную оценку.

Доказательство теоремы 3. Левая часть соотношения (3.3) не превосходит

$$\frac{b(m-1)R^{2m-2} + Cb(m-2)R^{2m-4} + \dots + Cb(1)R^2 + o(R)}{b(m-1)R^{2m-2} - Cb(m-2)R^{2m-4} - \dots - Cb(1)R^2 + o(R)} - 1, \quad (3.6)$$

где $b(j) = b(K, j, \nu)$. Разлагая (3.6) при $R \rightarrow \infty$, получаем оценку сверху вида $\bar{C}(K, C, d, m)/R^2$. Константу $\bar{C}(K, C, d, m)$ можно вычислить явно.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Aronszajn N., Creese T. M., Lipkin L. J. Polyharmonic Functions. New York: Clarendon Press, 1983, 265 p.
2. Balk M. B. Polyanalytic Functions. Berlin: Akademie-Verlag, 1991, 197 p.
3. Бородин А. Н., Салминен П. Справочник по броуновскому движению. Факты и формулы. СПб.: Лань, 2000, 639 с.
4. Doléans-Dade C., Meyer P.-A. Intégrales stochastiques par rapport aux martingales locales. — Lecture Notes in Math., 1970, v. 124, p. 77–107.
5. Helms L. L. Biharmonic functions and Brownian motion. — J. Appl. Probab., 1967, v. 4, p. 130–136.
6. Гахов Ф. Д. Краевые задачи. М.: Наука, 1977, 640 с.
7. Vekua I. N. New Methods for Solving Elliptic Equations. Amsterdam/New York: North-Holland/Wiley, 1967, 358 p.

Поступила в редакцию
10.X.2008

© 2009 г. НАДАРАЯ Э. А.*, СОХАДЗЕ Г. А.**, БАБИЛУА П. К.*

О НЕКОТОРЫХ КРИТЕРИЯХ СОГЛАСИЯ, ОСНОВАННЫХ НА ОЦЕНКАХ ПЛОТНОСТИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ТИПА ЯДРА

Построен критерий согласия, основанный на оценках плотности вероятностей Вольвертона–Вагнера. Изучен вопрос состоятельности, и для некоторых сближающихся альтернатив изучена асимптотика поведения мощности.

Ключевые слова и фразы: плотность распределения, критерий согласия, мощность критерия, состоятельность, предельное распределение.

1. Пусть $X_1, \dots, X_n$ — последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин, имеющих плотность распределения $f(x)$. Требуется, основываясь на выборке $X_1, \dots, X_n$, проверить гипотезу

$$H_0: f(x) = f_0(x).$$

* Тбилисский государственный университет им. Ив. Джавахишвили, факультет точных и естественных наук, ул. Университетская, 2, 0143 Тбилиси, Грузия; e-mail: p.babilua@yahoo.com, elizbar.nadaraya@tsu.ge

** Кутаисский государственный университет им. А. Церетели, факультет точных и естественных наук, ул. Царицы Тамары, 59, 4600 Кутаиси, Грузия; e-mail: giasokhil@i.ua

Мы рассматриваем критерий проверки гипотезы H_0 , основанный на статистике

$$U_n = na_n^{-1} \int \left(f_n(x) - f_0(x) \right)^2 r(x) dx,$$

где $f_n(x)$ — рекуррентная ядерная оценка плотности вероятностей Вольвертона–Вагнера:

$$f_n(x) = n^{-1} \sum_{i=1}^n a_i K(a_i(x - X_i)),$$

$\{a_i\}$ — возрастающая последовательность положительных чисел, сходящаяся к бесконечности, $r(x) \in R$ (R — множество неотрицательных, ограниченных и кусочно-непрерывных функций на $(-\infty, \infty)$) и

$$K(x) \in H = \left\{ h: h(x) \geq 0, \sup_{x \in (-\infty, \infty)} h(x) < \infty, \right. \\ \int h(x) dx = 1, x^2 h(x) \in L_1(-\infty, \infty), \\ h_0(ux) \geq h_0(x) \text{ для всех } u \in [0, 1] \text{ и для всех } x \in (-\infty, \infty), \\ \left. h_0 = h * h; * \text{ — оператор свертки} \right\}.$$

Мы будем использовать следующие обозначения:

$$L_n = n \int \left(f_n(x) - \mathbf{E} f_n(x) \right)^2 r(x) dx, \\ d_n^2 = 2n^2 \iint f_0^2(x) \left(\sum_{i=1}^n a_i K_0(a_i(x - y)) \right)^2 r(x)r(y) dx dy, \\ \theta_n = \frac{1}{na_n} \sum_{i=1}^n a_i^2 \iint K^2(a_i(x - u)) f_0(u)r(u) du dx, \\ \gamma_s(n) = n^{-1} \sum_{k=1}^n a_k^s, \quad s \geq 1, \quad \sigma_n^2(f_0) = a_n^{-1} d_n^2, \\ \sigma_0^2 = 2 \int f_0^2(x)r^2(x) dx \int K_0^2(u) du, \\ K_0 = K * K, \quad \Delta(f_0) = \gamma_1 \int f_0(x)r(x) dx \int K^2(u) du.$$

Кроме того $\xrightarrow{D}$ будет обозначать сходимость по распределению, а $N(0, 1)$ — случайную величину, имеющую стандартное нормальное распределение $\Phi(x)$.

В работе [1], с использованием центральной предельной теоремы для семимартингалов Р. Ш. Липцера и А. Н. Ширяева [2], найдено предельное распределение функционала U_n , а в [3] и [4] полученные в [1] результаты уточняются и обобщаются на многомерный случай.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 1 ([3], [4]). а) Пусть $K \in H$ и $f_0(x)$ ограничена. Если $n^{-1}a_n \rightarrow 0$ и $a_n^{-s}\gamma_s(n) \rightarrow \gamma_s$, $s = 1, 2$ ($0 < \gamma_2 < \gamma_1 \leq 1$), при $n \rightarrow \infty$, то

$$\gamma_1^2 \sigma_0^2 \leq \varliminf_{n \rightarrow \infty} \sigma_n^2(f_0) \leq \overline{\varlimsup}_{n \rightarrow \infty} \sigma_n^2(f_0) \leq \gamma_1 \sigma_0^2 \quad (1)$$

и

$$d_n^{-1}(L_n - \mathbf{E} L_n) \xrightarrow{D} N(0, 1).$$

б) Пусть $K \in H$ и $f_0(x) \in F$ (F — множество плотностей, имеющих ограниченные производные до второго порядка), причем производная второго порядка плотности $f_0(x)$ интегрируема с квадратом. Если $n^{-1}a_n \rightarrow 0$, $a_n^{-s}\gamma_s(n) \rightarrow \gamma_s$, $s = 1, 2$,

$n^{-1}a_n^{-1/2}(\sum_{i=1}^n a_i^{-2})^2 \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, то

$$a_n^{1/2}\sigma_n^{-1}(f_0)(U_n - \theta_n) \xrightarrow{D} N(0, 1).$$

с) Пусть $K \in H$ и $f_0(x) \in F$, причем вторая производная плотности $f_0(x)$ интегрируема. Если к условиям пункта б) относительно a_n и γ_n добавлено условие $a_n^{-1}\gamma_1(n) = \gamma_1 + o(a_n^{-1/2})$, то

$$a_n^{1/2}\sigma^{-1}(f_0)(U_n - \Delta(f_0)) \xrightarrow{D} N(0, 1).$$

З а м е ч а н и е 1. Если предполагать, что $r(x) \in R \cap L_1$, то условия на $f_0(x)$ в пунктах б) и с) заменяются единственным требованием $f_0(x) \in F$.

Оказывается, что если $a_n = n^\delta$ и на функцию $K(x)$ наложить некоторое дополнительное условие, то удастся найти $\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n^2(f_0)$.

Так, справедлива следующая лемма.

Лемма. Пусть $a_n = n^\delta$, $0 < \delta < 1$, $K_0(x)$ имеет ограниченную производную и $x^2 K_0^{(1)}(x) \in L_1(-\infty, \infty)$. Тогда при $n \rightarrow \infty$

$$\sigma_n^2(f_0) \rightarrow \sigma^2(f_0) = 2 \int f_0^2(x) r^2(x) dx \int \left(\int_0^1 u^\delta K_0(u^\delta z) du \right)^2 dz. \quad (2)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Нетрудно видеть, что

$$\sigma_n^2(f_0) = 2 \int f_0^2(x) r(x) dx \int \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left(\frac{k}{n} \right)^\delta K_0 \left(\left(\frac{k}{n} \right)^\delta z \right) \right)^2 r \left(x - \frac{z}{a_n} \right) dz.$$

Пользуясь формулой суммирования Эйлера [5], находим

$$\begin{aligned} \sum_{\nu=n_1}^{n_2} g(a + h\nu) &= \int_{n_1}^{n_2} g(a + hx) dx + \frac{1}{2} g(a + n_1 h) + \frac{1}{2} g(a + n_2 h) \\ &\quad - h \int_{n_1}^{n_2} P_1(x) g^{(1)}(a + hx) dx, \quad |P_1(x)| < \frac{1}{2}, \quad x \in (-\infty, \infty), \end{aligned}$$

и, полагая в последней формуле $g(x) = x^\delta K_0(x^\delta z)$, $a = 0$, $h = 1/n$, $n_1 = 1$, $n_2 = n$, получаем

$$\begin{aligned} &\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left(\frac{k}{n} \right)^\delta K_0 \left(\left(\frac{k}{n} \right)^\delta z \right) \\ &= \int_{1/n}^1 x^\delta K_0(x^\delta z) dx + \frac{1}{2n} \left(\frac{1}{n} \right)^\delta K_0 \left(\left(\frac{1}{n} \right)^\delta z \right) + \frac{1}{2n} K_0(z) \\ &\quad - n^{-1} \left[\int_{1/n}^1 P_1(nx) x^{\delta-1} K_0(x^\delta z) dx + \int_{1/n}^1 P_1(nx) x^{2\delta-1} K_0^{(1)}(x^\delta z) z dx \right]. \end{aligned}$$

Отсюда, после несложных оцениваний, имеем

$$\begin{aligned} &\int \left(n^{-1} \sum_{k=1}^n \left(\frac{k}{n} \right)^\delta K_0 \left(\left(\frac{k}{n} \right)^\delta z \right) \right)^2 r \left(x - \frac{z}{a_n} \right) dz \\ &= \int \left(\int_{1/n}^1 u^\delta K_0(u^\delta z) du \right)^2 r \left(x - \frac{z}{a_n} \right) dz + O \left(\frac{\ln n}{n} \right). \end{aligned}$$

Далее, по теореме Лебега о предельном переходе под знаком интеграла можно написать, что при $n \rightarrow \infty$

$$\int \left(\int_{1/n}^1 u^\delta K_0(u^\delta z) du \right)^2 r \left(x - \frac{z}{a_n} \right) dz \rightarrow \int \left(\int_0^1 u^\delta K_0(u^\delta z) du \right)^2 r(x) dz.$$

Стало быть, $\sigma_n^2(f_0) \rightarrow \sigma^2(f_0)$.

З а м е ч а н и е 2. Ясно, что в пунктах b) и c) теоремы 1 величину $\sigma_n^2(f_0)$ можно заменить величиной $\sigma^2(f_0)$.

Утверждение теоремы 1 (пункт c)) позволяет конструировать критерий асимптотического уровня α , $0 < \alpha < 1$, для проверки гипотезы H_0 , согласно которой $f(x) = f_0(x)$. Для этого следует вычислить U_n ; гипотеза H_0 отвергается, если

$$U_n \geq \lambda_n(\alpha) = \Delta(f_0) + \varepsilon_\alpha a_n^{-1/2} \sigma(f_0), \quad (3)$$

где ε_α определяется равенством $\Phi(\varepsilon_\alpha) = 1 - \alpha$.

2. Теперь исследуем асимптотическое поведение критерия (3) (т.е. поведение мощности при $n \rightarrow \infty$). Прежде всего рассмотрим вопрос, является ли критерий состоятельным.

Теорема 2. Пусть $K(x) \in H$, $K_0(x)$ удовлетворяет условиям леммы, а $f_0(x)$ условиям пункта c) теоремы 1 или же $r(x) \in R \cap L_1$. Если $2/9 < \delta \leq 1/2$, то при $n \rightarrow \infty$

$$\Pi_n(f_1) = \mathbf{P}_{H_1} \{U_n \geq \lambda_n(\alpha)\} \rightarrow 1,$$

т.е. критерий, определенный в (3), состоятелен против любой альтернативы $H_1: f(x) = f_1(x)$, где $f_1(x)$ такова, что

$$\Delta = \int (f_1(x) - f_0(x))^2 r(x) dx > 0.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Нетрудно убедиться, что

$$\begin{aligned} \Pi_n(f_1) &= \mathbf{P}_{H_1} \left\{ a_n^{1/2} \sigma^{-1}(f_1) (U_n^{(1)} - \Delta(f_1)) \geq \varepsilon_\alpha \frac{\sigma(f_0)}{\sigma(f_1)} + \sigma^{-1}(f_1) (\Delta(f_0) - \Delta(f_1)) a_n^{1/2} \right. \\ &\quad \left. + 2na_n^{-1/2} \sigma^{-1}(f_1) \int (f_n(x) - f_1(x)) \varphi(x) dx \right. \\ &\quad \left. - na_n^{-1/2} \sigma^{-1}(f_0) \int (f_1(x) - f_0(x))^2 r(x) dx \right\} \\ &= \mathbf{P}_{H_1} \left\{ a_n^{1/2} \sigma^{-1}(f_1) (U_n^{(1)} - \Delta(f_1)) \geq -\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{a_n}} \left(\sigma^{-1}(f_1) \Delta + O\left(\frac{\sqrt{a_n}}{n}\right) \right) \right. \\ &\quad \left. + 2\sigma^{-1}(f_1) \int (f_n(x) - f_1(x)) \varphi(x) dx \right\}, \end{aligned}$$

где

$$U_n^{(1)} = na_n^{-1} \int (f_n(x) - f_1(x))^2 r(x) dx, \quad \varphi(x) = (f_1(x) - f_0(x)) r(x).$$

Теперь покажем, что $\int (f_n(x) - f_1(x)) \varphi(x) dx \xrightarrow{\mathbf{P}} 0$. Действительно,

$$\int (f_n(x) - f_1(x)) \varphi(x) dx = B_{n1} + B_{n2},$$

где

$$\begin{aligned} B_{n1} &= \sum_{j=1}^n \xi_j, \quad \xi_j = n^{-1} a_j \int \left[K(a_j(x - X_j)) - \mathbf{E} K(a_j(x - X_j)) \right] \varphi(x) dx, \\ B_{n2} &= \int \left(\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n a_j \mathbf{E} K(a_j(x - X_j)) - f_1(x) \right) \varphi(x) dx \end{aligned}$$

(здесь и далее $\mathbf{E}$ — математическое ожидание при H_1). В силу предположений относительно $f_1(x)$ и $K(x)$, получим $B_{n2} = O(n^{-1} \sum_{j=1}^n a_j^{-2})$. Следовательно,

$$B_{n2} = O(n^{-2\delta}) \quad \text{при } \delta < \frac{1}{2} \quad \text{и} \quad B_{n2} = O\left(\frac{\ln n}{n}\right) \quad \text{при } \delta = \frac{1}{2}. \quad (4)$$

Далее, легко проверяется, что

$$\mathbf{D} B_{n1} = \sum_{j=1}^n \mathbf{D} \xi_j \sim n^{-1} \left(\int \varphi^2(x) f_1(x) dx - \left(\int \varphi(x) f_1(x) dx \right)^2 \right)$$

и

$$\sum_{k=1}^n \mathbf{E} |\xi_k - \mathbf{E} \xi_k|^{2+\alpha} \left(\sum_{k=1}^n \mathbf{D} \xi_k \right)^{-1-\alpha/2} \longrightarrow 0, \quad \alpha > 0. \quad (5)$$

Следовательно,

$$(\mathbf{D} B_{n1})^{-1/2} B_{n1} \xrightarrow{D} N(0, 1). \quad (6)$$

Но

$$\int (f_n(x) - f_1(x)) \varphi(x) dx = \left[\frac{B_{n1}}{\sqrt{\mathbf{D} B_{n1}}} \right] \sqrt{\mathbf{D} B_{n1}} + O\left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_k^{-2}\right).$$

Отсюда и из (4)–(6) следует, что

$$\Pi_n(f_1) = \mathbf{P}_{H_1} \left\{ a_n^{1/2} \sigma^{-1}(f_1) (U_n^{(1)} - \Delta(f_1)) \geq -\frac{n}{\sqrt{a_n}} (\sigma^{-1}(f_1) \Delta + o_p(1)) \right\}.$$

Поскольку $a_n^{1/2} \sigma^{-1}(f_1) (U_n^{(1)} - \Delta(f_1)) \xrightarrow{D} N(0, 1)$ при гипотезе H_1 и $n/\sqrt{a_n} \rightarrow \infty$, то $\Pi_n(f_1) \rightarrow 1$ при $n \rightarrow \infty$.

Таким образом, мощность критерия, основанного на U_n , при любой фиксированной альтернативе стремится к 1 при $n \rightarrow \infty$. Однако если альтернатива меняется при изменении n , приближаясь к основной гипотезе H_0 , то мощность критерия уже не обязана сходиться к 1. Так, например, рассмотрим последовательность близких к гипотезе H_0 альтернатив типа Питмена:

$$H_1: f_1(x) = f_0(x) + \alpha_n \varphi(x) + o(\alpha_n), \quad \alpha \downarrow 0, \quad \int \varphi(x) dx = 0. \quad (7)$$

Теорема 3. Пусть $K(x)$ и $K_0(x)$ удовлетворяют условиям теоремы 2, а $f_0(x)$ и $\varphi(x)$ — условиям пункта с) теоремы 1. Если $a_n = n^\delta$ и в соотношении (7) положить $\alpha_n = n^{-1/2+\delta/4}$, $2/9 < \delta \leq 1/2$, то при $n \rightarrow \infty$

$$\mathbf{P}_{H_1} \{U_n \geq \lambda_n(\alpha)\} \longrightarrow \gamma(U) = 1 - \Phi\left(\varepsilon_\alpha - \frac{1}{\sigma(f_0)} \int \varphi^2(u) r(u) du\right).$$

Доказательство. Имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{H_1} \{U_n \geq \lambda_n(\alpha)\} &= \mathbf{P}_{H_1} \left\{ d_n^{-1} (L_n - \mathbf{E} L_n) \geq \frac{\sqrt{a_n}}{\sigma_n(f_0)} \lambda_n(\alpha) - d_n^{-1} \mathbf{E} L_n \right. \\ &\quad \left. + \frac{\sqrt{a_n}}{\sigma_n(f_0)} A_{n1} - \frac{\sqrt{a_n}}{\sigma_n(f_0)} A_{n2} \right\}, \end{aligned} \quad (8)$$

где

$$\begin{aligned} A_{n1} &= 2na_n^{-1} \int (f_n(x) - \mathbf{E} f_n(x)) (\mathbf{E} f_n(x) - f_0(x)) r(x) dx, \\ A_{n2} &= na_n^{-1} \int (\mathbf{E} f_n(x) - f_0(x))^2 r(x) dx. \end{aligned}$$

В силу интегрального неравенства Минковского и (1), нетрудно установить, что

$$d_n^{-1} \mathbf{E} L_n = n^{-1} d_n^{-1} \sum_{k=1}^n a_k^2 \int \mathbf{E} K^2(a_k(x - X_1)) r(x) dx + O(a_n^{-1/2}). \quad (9)$$

Далее, $\gamma_s(n)/a_n^s = (1 + s\delta)^{-1} + o(n^{-\delta/2})$, $s = 1, 2$. Поэтому из (9) легко вывести, что

$$d_n^{-1} \mathbf{E} L_n = n^{\delta/2} \sigma_n^{-1}(f_0) \Delta(f_0) + o(n^{-\delta/2}) + O\left(n^{-1/2+3\delta/4}\right), \quad \frac{2}{9} < \delta \leq \frac{1}{2}. \quad (10)$$

Следовательно,

$$\sqrt{a_n} \sigma_n^{-1}(f_0) \lambda_n(\alpha) - d_n^{-1} \mathbf{E} L_n = \varepsilon_\alpha \frac{\sigma(f_0)}{\sigma_n(f_0)} + O(n^{-\delta/2}) + O(n^{-1/2+3\delta/4}) \longrightarrow \varepsilon_\alpha. \quad (11)$$

Далее,

$$\mathbf{E} f_n(x) - f_0(x) = \alpha_n \varphi(x) + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_k^{-2} \int u^2 K(u) du \int_0^1 (1-t) f_1^{(2)}\left(x - \frac{tu}{a_k}\right) dt. \quad (12)$$

Отсюда получаем, что

$$\begin{aligned} \sqrt{a_n} \sigma_n^{-1}(f_0) A_{n2} &= \frac{1}{\sigma_n(f_0)} \int \varphi^2(x) r(x) dx + R_n, \\ R_n &= O\left(\frac{\alpha_n}{\sqrt{a_n}} \sum_{k=1}^n a_k^{-2}\right), \end{aligned}$$

причем

$$\begin{aligned} R_n &= O(n^{(2-9\delta)/4}), & \text{если } 2/9 < \delta < 1/2, \\ R_n &= n^{-5/8} \ln n, & \text{если } \delta = 1/2. \end{aligned} \quad (13)$$

Теперь оценим $\sqrt{a_n} \sigma_n^{-1}(f_0) \mathbf{E} |A_{n1}|$. Пользуясь соотношением (12) и легко проверяемым неравенством

$$\begin{aligned} \mathbf{E} |A_{n1}| &\leq 2 \frac{n}{a_n} \left\{ n^{-2} \sum_{k=1}^n a_k^2 \int f_1(u) du \right. \\ &\quad \times \left. \left(\int K(a_k(x-u)) \left(\mathbf{E} f_n(x) - f_0(x) \right) r(x) dx \right)^2 \right\}^{1/2}, \end{aligned}$$

находим, что $\sqrt{a_n} \sigma_n^{-1}(f_0) \mathbf{E} |A_{n1}| \leq R_1(n) + R_2(n)$, где

$$\begin{aligned} R_1(n) &= O\left(\frac{\sqrt{n} \alpha_n}{\sqrt{a_n}}\right) = O(n^{-\delta/2}), & R_2(n) &= O\left(\frac{1}{\sqrt{n a_n}} \sum_{k=1}^n a_k^{-2}\right), \\ R_2(n) &= O(n^{(1-5\delta)/2}), & \text{если } 2/9 < \delta < 1/2, \\ R_2(n) &= n^{-3/4} \ln n, & \text{если } \delta = 1/2. \end{aligned} \quad (14)$$

Наконец, собрав вместе соотношения (11), (13), (14) и принимая во внимание сходимость $d_n^{-1}(L_n - \mathbf{E} L_n) \xrightarrow{D} N(0, 1)$, вытекающую из утверждения а) теоремы 1, из равенства (8) получаем утверждение теоремы 3.

Для проверки гипотезы H_0 хорошо известен (см. [6], [8]) критерий Розенблатта–Бикела:

$$T_n \geq \int f_0(x) r(x) dx \int K^2(u) du + a_n^{-1/2} \varepsilon_\alpha \sigma_0, \quad (15)$$

$$T_n = n a_n^{-1} \int \left(f_n(x) - f_0(x) \right)^2 r(x) dx,$$

$$f_n(x) = n^{-1} a_n \sum_{i=1}^n K(a_n(x - X_i)),$$

и предельная мощность этого критерия при альтернативе H_1 равна

$$\gamma(T) = 1 - \Phi\left(\varepsilon_\alpha - \frac{1}{\sigma_0} \int \varphi^2(u) r(u) du\right),$$

где $\sigma_0^2 = 2 \int f_0^2(x) r^2(x) dx \int K_0^2(u) du$.

Из (1) и (2) следует, что

$$\sigma^2(f_0) \leq \gamma_1 \sigma_0^2 < \sigma_0^2, \quad \gamma_1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\gamma_1(n)}{n^\delta} = \frac{1}{1 + \delta}. \quad (16)$$

Значит, $\gamma(U) > \gamma(T)$, т.е. тесты, основанные на U_n , при альтернативах H_1 в пределе более мощны, чем тесты, основанные на T_n . Легко заметить, что (16) можно также получить из $(\int_0^1 u^\delta K_0(u^\delta z) du)^2$, применяя неравенство Коши–Шварца.

3. Теперь рассмотрим последовательность альтернатив другого вида (см. [7]–[9]):

$$H_1: f_1(x) = f_0(x) + \alpha_n \varphi\left(\frac{x - \ell}{\gamma_n}\right) + o(\alpha_n \gamma_n), \quad (17)$$

где $\alpha_n \downarrow 0$, $\gamma_n \downarrow 0$, ℓ — фиксированная точка непрерывности функции $r(x)$ и $r(\ell) \neq 0$.

Теорема 4. Пусть $K(x)$, $K_0(x)$, $f_0(x)$ и $\varphi(x)$ удовлетворяют условиям теоремы 3. Если $a_n = n^\delta$, $\alpha_n = n^{-\alpha}$, $\gamma_n = n^{-\beta}$, причем $\delta/2 = 1 - 2\alpha - \beta$, $\alpha + \beta > 1/2$, $2/9 < \delta \leq 1/2$, $\beta < 0.9\delta$, $\alpha < 2\delta$, то

$$\mathbf{P}_{H_1}\{U_n \geq \lambda_n(\alpha)\} \rightarrow 1 - \Phi\left(\varepsilon_\alpha - \frac{r(\ell)}{\sigma(f_0)} \int \varphi^2(u) du\right). \quad (18)$$

Доказательство. Следуя схеме доказательства теоремы 3, в данном случае надо исследовать асимптотику выражения (8) при гипотезе (17).

Аналогично (10), легко установить, что

$$d_n^{-1} \mathbf{E} L_n = \frac{a_n}{d_n} \Delta(f_0) + O(\alpha_n \gamma_n \sqrt{a_n}) = \frac{a_n}{d_n} \Delta(f_0) + O(n^{\delta/2 - \alpha - \beta}), \quad \frac{\delta}{2} - \alpha - \beta < 0,$$

так как $\alpha + \beta > \delta/2$. Стало быть, при $n \rightarrow \infty$

$$\sqrt{a_n} \sigma_n^{-1}(f_0) \lambda_n(\alpha) - d_n^{-1} \mathbf{E} L_n \rightarrow \varepsilon_\alpha. \quad (19)$$

Далее, поскольку

$$\begin{aligned} \mathbf{E} f_n(x) - f_0(x) &= \alpha_n \varphi\left(\frac{x - \ell}{\gamma_n}\right) + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n a_k^{-2} \int u^2 K(u) du \\ &\times \int_0^1 (1-t) \left[f^{(2)}\left(x - \frac{tu}{a_k}\right) + \frac{\alpha_n}{\gamma_n^2} \varphi^{(2)}\left(x - \frac{tu}{a_k}\right) \right] dt, \end{aligned} \quad (20)$$

то мы можем написать

$$\begin{aligned} \frac{a_n}{d_n} A_{n2} &= \frac{n \alpha_n^2}{\sqrt{a_n} \sigma_n(f_0)} \int \varphi^2\left(\frac{x - \ell}{\gamma_n}\right) r(x) dx + \sum_{i=1}^5 R_{ni}, \\ R_{n1} &= O\left(\frac{n}{\sqrt{a_n}} q_n^2\right), \quad R_{n2} = O\left(\frac{n}{\sqrt{a_n}} \frac{\alpha_n^2}{\gamma_n^3} q_n^2\right), \\ R_{n3} &= O\left(\frac{n}{\sqrt{a_n}} \alpha_n \gamma_n q_n\right), \quad R_{n4} = O\left(\frac{n}{\sqrt{a_n}} \frac{\alpha_n^2}{\gamma_n} q_n\right), \\ R_{n5} &= O\left(\frac{n}{\sqrt{a_n}} \frac{\alpha_n}{\gamma_n} q_n^2\right), \quad \text{где } q_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_k^{-2}. \end{aligned} \quad (21)$$

В силу предположений относительно a_n , α_n и γ_n , из (21) находим, что

$$\begin{aligned} R_{n1} &= O\left(n^{(2-9\delta)/2}\right), \quad \text{если } \frac{2}{9} < \delta < \frac{1}{2}, \\ R_{n1} &= n^{-5/4} \ln^2 n, \quad \text{если } \delta = \frac{1}{2}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R_{n2} &= O(n^{-4(\delta-\beta)}), & \text{если } \frac{2}{9} < \delta < \frac{1}{2} \quad (\beta < \delta), \\
R_{n2} &= O(n^{-2+4\beta} \ln^2 n), & \text{если } \delta = \frac{1}{2}; \\
R_{n3} &= O(n^{-2\delta+\alpha-\beta}), & \text{если } \frac{2}{9} < \delta < \frac{1}{2} \quad (-2\delta + \alpha - \beta < 0), \\
R_{n3} &= O(n^{-1/4-\alpha-\beta} \ln n), & \text{если } \delta = \frac{1}{2}; \\
R_{n4} &= O(n^{2(\beta-\delta)}), & \text{если } \frac{2}{9} < \delta < \frac{1}{2} \quad (\beta < \delta), \\
R_{n4} &= O(n^{-1+2\beta} \ln n), & \text{если } \delta = \frac{1}{2}; \\
R_{n5} &= O(n^{\alpha+2\beta-4\delta}), & \text{если } \frac{2}{9} < \delta < \frac{1}{2} \quad (\alpha + 2\beta - 4\delta < 2(\beta - \delta) < 0), \\
R_{n5} &= O(n^{-2(1-\beta)+\alpha} \ln^2 n), & \text{если } \delta = \frac{1}{2} \quad (\alpha < 2(1 - \beta)).
\end{aligned}$$

Следовательно,

$$\frac{a_n}{dn} A_{n2} \longrightarrow \frac{r(\ell)}{\sigma(f_0)} \int \varphi^2(u) du. \quad (22)$$

Рассмотрим теперь $\sqrt{a_n} \sigma_n^{-1}(f_0) A_{n1}$. Пользуясь равенством (20) и неравенством

$$\begin{aligned}
\mathbf{E} |A_{n1}| &\leq 2 \frac{n}{a_n} \left\{ n^{-2} \sum_{k=1}^n a_k^2 \int f_1(u) du \right. \\
&\quad \times \left[\int K(a_k(x-u)) (\mathbf{E} f_n(x) - f_0(x)) r(x) dx \right]^2 \Big\}^{1/2},
\end{aligned}$$

нетрудно показать, что

$$\begin{aligned}
\sqrt{a_n} \sigma_n^{-1}(f_0) \mathbf{E} |A_{n1}| &\leq E_{n1} + E_{n2} + E_{n3}, \\
E_{n1} &= O\left(\frac{\sqrt{n} \alpha_n \gamma_n^{1/2}}{\sqrt{a_n}}\right), \quad E_{n2} = O\left(\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{a_n}} q_n\right), \quad E_{n3} = O\left(\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{a_n}} \alpha_n \gamma_n^{-2} q_n\right).
\end{aligned}$$

При наших предположениях относительно a_n , α_n , γ_n отсюда следует, что

$$\begin{aligned}
E_{n1} &= O(n^{-\delta/4}), & \text{если } \frac{2}{9} < \delta \leq \frac{1}{2}; \\
E_{n2} &= O(n^{(1-5\delta)/2}), & \text{если } \frac{2}{9} < \delta < \frac{1}{2}, \\
E_{n2} &= O(n^{-3/2} \ln n), & \text{если } \delta = \frac{1}{2}; \\
E_{n3} &= O(n^{-9\delta/4+5\beta/2}), & \text{если } \frac{2}{9} < \delta < \frac{1}{2} \quad \left(\beta < \frac{9}{10} \delta\right), \\
E_{n3} &= O(n^{-9/8+5\beta/2} \ln n), & \text{если } \delta = \frac{1}{2}.
\end{aligned} \quad (23)$$

Таким образом, принимая во внимание (19), (22), (23) и сходимости $d_n^{-1}(L_n - \mathbf{E} L_n) \xrightarrow{D} N(0, 1)$, вытекающую из утверждения а) теоремы 1, приходим к (18). Теорема 4 доказана.

Условия, налагаемые в теореме 4 на a_n , α_n , γ_n , выполняются, например, при $\delta = 1/2$, $\beta = 5/12$, $\alpha = 1/6$; $\delta = 1/4$, $\beta = 1/5$, $\alpha = 27/80$; $\delta = 2/5$, $\beta = 2/7$, $\alpha = 9/35$.

Известно, что предельная мощность критерия Розенблатта–Бикела (15) для проверки гипотезы H_0 против последовательности альтернатив H_1 может быть вычислена по формуле (см. [7]–[9]):

$$\gamma(T) = 1 - \Phi\left(\varepsilon_\alpha - \frac{r(\ell)}{\sigma_0} \int \varphi^2(u) du\right), \quad r(\ell) \neq 0.$$

Но из (16) следует, что $\gamma(U) > \gamma(T)$, т.е. тесты, основанные на U_n , при альтернативах H_1 в пределе более мощны, чем тесты, основанные на T_n . Более того, интегрируя $f_1(x)$, можно установить, что альтернативы отличаются от нулевой гипотезы на величину порядка $\alpha_n \gamma_n = o(1/\sqrt{n})$. Стало быть, мы имеем более высокую предельную мощность против такой альтернативы в случае критериев, основанных на U_n и T_n , чем в случае критериев, основанных на отклонении эмпирической функции распределения от истинной, например критерия ω_n^2 и критерия Колмогорова–Смирнова.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Надарая Э. А. О предельном распределении квадратического уклонения обобщенной ядерной оценки плотности распределения. — Теория вероятн. и ее примен., 1992, т. 37, в. 2, с. 413–421.
2. Липцер Р. Ш., Ширяев А. Н. Функциональная центральная предельная теорема для семимартингалов. — Теория вероятн. и ее примен., 1980, т. 25, в. 4, с. 683–703.
3. Nadaraya E., Babilua P. On the limit distribution of a quadratic deviation of a recurrent kernel estimate of distribution density. — Proc. A. Razmadze Math. Inst., 2007, v. 144, p. 67–89.
4. Nadaraya E., Babilua P. On the Wolverton–Wagner estimate of a distribution density. — Bull. Georgian National Acad. Sci., 2007, v. 175, № 1, p. 40–44.
5. Крамер Г. Математические методы статистики. М.: Мир, 1975, 648 с.
6. Bickel P. J., Rosenblatt M. On some global measures of the deviations of density function estimates. — Ann. Statist., 1973, v. 1, p. 1071–1095.
7. Rosenblatt M. A quadratic measure of deviation of two-dimensional density estimates and a test of independence. — Ann. Statist., 1975, v. 3, p. 1–14.
8. Надарая Э. А. Непараметрическое оценивание плотности вероятностей и кривой регрессии. Тбилиси, 1983, 194 с.
9. Ghosh B. K., Huang W.-M. The power and optimal kernel of the Bickel–Rosenblatt test for goodness of fit. — Ann. Statist., 1991, v. 19, № 2, p. 999–1009.

Поступила в редакцию
17.II.2009

© 2009 г.

РАГИМОВ Ф. Г.*

**ОБ АСИМПТОТИЧЕСКОМ ПОВЕДЕНИИ ЛОКАЛЬНЫХ
ВЕРОЯТНОСТЕЙ ПЕРЕСЕЧЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ГРАНИЦ
МНОГОМЕРНЫМ СЛУЧАЙНЫМ БЛУЖДЕНИЕМ**

В настоящей работе доказана теорема об асимптотическом поведении совместного распределения перескока и момента первого выхода для случайного блуждания, описываемого нелинейной функцией от сумм независимых случайных векторов. В качестве следствия получены локальная предельная теорема и асимптотическая независимость перескока (экссесса) и момента первого выхода.

Ключевые слова и фразы: случайное блуждание, момент первого выхода, перескок (экссесс), локальная предельная теорема.

* Бакинский государственный университет, факультет прикладной математики и кибернетики, кафедра теории вероятностей и математической статистики, ул. З.Халилова, 23, Az 1148, Баку, Республика Азербайджан; e-mail: ragimovf@rambler.ru