Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ф. Г. Рагимов, Об асимптотическом поведении локальных вероятностей пересечения нелинейных границ многомерным случайным блужданием, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2009, том 54, выпуск 2, 367–374

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp2712>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.89.56.158

26 апреля 2023 г., 16:25:37

Но из (16) следует, что $\gamma(U) > \gamma(T)$, т.е. тесты, основанные на U_n , при альтернативах H_1 в пределе более мощны, чем тесты, основанные на T_n . Более того, интегрируя $f_1(x)$, можно установить, что альтернативы отличаются от нулевой гипотезы на величину порядка $\alpha_n \gamma_n = o(1/\sqrt{n})$. Стало быть, мы имеем более высокую предельную мощность против такой альтернативы в случае критериев, основанных на U_n и T_n , чем в случае критериев, основанных на отклонении эмпирической функции распределения от истинной, например критерия ω_n^2 и критерия Колмогорова–Смирнова.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Надарая Э. А.* О предельном распределении квадратического уклонения обобщенной ядерной оценки плотности распределения. — Теория вероятн. и ее примен., 1992, т. 37, в. 2, с. 413–421.
2. *Липцер Р. Ш., Ширяев А. Н.* Функциональная центральная предельная теорема для семимартингалов. — Теория вероятн. и ее примен., 1980, т. 25, в. 4, с. 683–703.
3. *Nadaraya E., Babilua P.* On the limit distribution of a quadratic deviation of a recurrent kernel estimate of distribution density. — Proc. A. Razmadze Math. Inst., 2007, v. 144, p. 67–89.
4. *Nadaraya E., Babilua P.* On the Wolverton–Wagner estimate of a distribution density. — Bull. Georgian National Acad. Sci., 2007, v. 175, № 1, p. 40–44.
5. *Крамер Г.* Математические методы статистики. М.: Мир, 1975, 648 с.
6. *Bickel P. J., Rosenblatt M.* On some global measures of the deviations of density function estimates. — Ann. Statist., 1973, v. 1, p. 1071–1095.
7. *Rosenblatt M.* A quadratic measure of deviation of two-dimensional density estimates and a test of independence. — Ann. Statist., 1975, v. 3, p. 1–14.
8. *Надарая Э. А.* Непараметрическое оценивание плотности вероятностей и кривой регрессии. Тбилиси, 1983, 194 с.
9. *Ghosh B. K., Huang W.-M.* The power and optimal kernel of the Bickel–Rosenblatt test for goodness of fit. — Ann. Statist., 1991, v. 19, № 2, p. 999–1009.

Поступила в редакцию
17.II.2009

© 2009 г.

РАГИМОВ Ф. Г.*

**ОБ АСИМПТОТИЧЕСКОМ ПОВЕДЕНИИ ЛОКАЛЬНЫХ
ВЕРОЯТНОСТЕЙ ПЕРЕСЕЧЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ГРАНИЦ
МНОГОМЕРНЫМ СЛУЧАЙНЫМ БЛУЖДЕНИЕМ**

В настоящей работе доказана теорема об асимптотическом поведении совместного распределения перескока и момента первого выхода для случайного блуждания, описываемого нелинейной функцией от сумм независимых случайных векторов. В качестве следствия получены локальная предельная теорема и асимптотическая независимость перескока (экссесса) и момента первого выхода.

Ключевые слова и фразы: случайное блуждание, момент первого выхода, перескок (экссесс), локальная предельная теорема.

* Бакинский государственный университет, факультет прикладной математики и кибернетики, кафедра теории вероятностей и математической статистики, ул. З.Халилова, 23, Az 1148, Баку, Республика Азербайджан; e-mail: ragimovf@rambler.ru

1. Введение. Пусть ξ_n , $n \geq 1$, — последовательность независимых одинаково распределенных случайных векторов в $\mathbf{R}^k$, $k \geq 1$, со средним значением $\nu = \mathbf{E} \xi_1$, и пусть $\Delta(X)$, $x \in \mathbf{R}^k$, — некоторая числовая борелевская функция.

Положим при $n \geq 1$ и $c \geq 0$

$$S_n = \sum_{i=1}^n \xi_i, \quad T_n = n\Delta\left(\frac{S_n}{n}\right)$$

и рассмотрим момент первого выхода

$$\tau = \tau_c = \inf\{n \geq 1: T_n > c\} \quad (1)$$

процесса T_n за уровень $c \geq 0$. Будем считать, что $\inf\{\emptyset\} = \infty$.

Многие важные моменты остановки, возникающие в статистическом последовательном анализе и в теории нелинейного восстановления, имеют вид (1) (см., например, [1], [2]).

В работе [5] изучены интегральные предельные теоремы для τ_c , из которых, в частности, следует, что для фиксированных чисел $a \geq 1$ и $b \geq 1$ вероятность $\mathbf{P}(a \leq \tau_c < b)$ стремится к нулю при $c \rightarrow \infty$. При оценке вероятности событий вида $\{\tau_c \in (a, b)\}$ существенную роль играют локальные предельные теоремы, под которыми понимаются любые утверждения о том, что при некоторых условиях существует функция $P(n, c)$, для которой выполняется следующее соотношение:

$$\mathbf{P}(\tau_c = n) = P(n, c)(1 + o(1)) \quad \text{при } c \rightarrow \infty.$$

В 1970–90-х годах был достигнут существенный прогресс в области локальных предельных теорем для момента первого выхода одномерного случайного блуждания (см. [1], [3], [4]).

Этому прогрессу в значительной степени способствовали метод факторизационных тождеств при $\Delta(x) = x$ (см. [4]) и так называемый локальный метод Вудруфа при $\Delta(x) \neq x$ (см. [1]–[3]).

Многомерный случай (т.е. случай $k > 1$) изучен существенно меньше. Ряд общих результатов в этом направлении имеется в работах [6] и [7]. Как отмечалось в [7], это связано прежде всего с тем, что аналитические методы, сыгравшие важную роль в одномерном случае, для многомерных блужданий являются неэффективными. Тем не менее, ряд граничных задач, связанных с моментом первого выхода вида (1), удается решить (см. [2], [5]). В [2] изучаются некоторые задачи последовательного анализа, в которых возникают моменты остановки τ_c вида (1) с $\Delta(x) = \|x\|^2$, где $\|\cdot\|$ — обычная евклидова норма в $\mathbf{R}^k$.

Целью настоящей работы является изучение асимптотического поведения совместного распределения момента первого выхода τ_c и перескока $\chi_c = T_c - c$, а также вероятности $\mathbf{P}(\tau_c = n)$ для достаточно широкого класса функций $\Delta(x)$ и случайных блужданий.

2. Условия и обозначения. Пусть $a = (a_1, \dots, a_k) \in \mathbf{R}^k$ и $b = (b_1, \dots, b_k) \in \mathbf{R}^k$. Будем писать $a \leq b$, если $a_i \leq b_i$ для каждого $i = 1, \dots, k$. Положим

$$D = D(d, y) = \bigcup_{m=-\infty}^{\infty} \{x \in \mathbf{R}^k: (d, x - y) = m\}.$$

Если существуют векторы $y \in \mathbf{R}^k$ и $d \in \mathbf{R}^k$ такие, что $\mathbf{P}(\xi_1 \in D) = 1$, то говорят, что ξ_1 имеет решетчатое распределение с параметром $d \in \mathbf{R}^k$. В противном случае распределение случайного вектора ξ_1 будем называть нерешетчатым.

Обозначим через W_ν класс функций $\Delta(x)$, $x \in \mathbf{R}^k$, для которых выполняются следующие условия: положительная функция $\Delta(x)$ имеет непрерывные частные производные $\Delta'_{x_i}(x)$, $i = 1, \dots, k$, в некоторой окрестности точки $x = \nu \in \mathbf{R}^k$, причем

$\Delta(\nu) > 0$ и $\Delta'_{x_i}(\nu) \neq 0$ хотя бы для одного $i = 1, \dots, k$. Ниже (x, y) означает обычное скалярное произведение векторов $x, y \in \mathbf{R}^k$.

Отметим, что при сделанных предположениях относительно функции $\Delta(x)$ имеем:

$$T_n = Z_n + \varepsilon_n,$$

где

$$\begin{aligned} Z_n &= \sum_{i=1}^n X_i, & X_i &= \Delta(\nu) + (\lambda, \xi_i - \nu), \\ \varepsilon_n &= n \left(\frac{1}{n} S_n - \nu, \lambda_n - \lambda \right), & \lambda_n &= (\Delta'_{x_1}(\nu_n), \dots, \Delta'_{x_k}(\nu_n)), \\ & & \lambda &= (\Delta'_{x_1}(\nu), \dots, \Delta'_{x_k}(\nu)), \end{aligned}$$

и ν_n , $n \geq 1$, — некоторая последовательность случайных точек из окрестности $\nu = \mathbf{E} \xi_1$, причем $\nu_n \rightarrow \nu$ п.н. при $n \rightarrow \infty$. Нетрудно понять, что последовательность Z_n , $n \geq 1$, есть одномерное случайное блуждание с $\mathbf{E} Z_1 = \Delta(\nu) > 0$.

Обозначим

$$H(x) = \frac{1}{\mathbf{E} Z_{\tau_+}} \int_0^x \mathbf{P}(Z_{\tau_+} > y) dy,$$

где

$$Z_n = n\Delta(\nu) + (\lambda, S_n - n\nu),$$

и $\tau_+ = \inf\{n \geq 1: Z_n > 0\}$.

3. Формулировка и доказательство основных результатов.

Теорема 1. Пусть ξ_n , $n \geq 1$, — последовательность независимых одинаково распределенных нерешетчатых случайных векторов с вектором математических ожиданий $\nu = \mathbf{E} \xi_1$ и матрицей ковариаций B , и пусть $\Delta(x) \in W_\nu$. Если

$$n = n(c) = \frac{c}{\Delta(\nu)} + \theta(c) \sqrt{\frac{c}{\Delta(\nu)}},$$

причем $\theta(c) \rightarrow \theta \in \mathbf{R}$ при $c \rightarrow \infty$, то

$$\mathbf{P}(\tau_c = n, \chi_c \leq x) \sim \frac{\Delta(\nu)}{\sqrt{n}} \varphi_\gamma(-\theta\Delta(\nu)) H(x)$$

равномерно по x , $0 < \delta \leq x \leq M < \infty$, и θ из ограниченного множества в $\mathbf{R}$, где $\varphi_\gamma(x)$ — плотность нормального распределения с параметрами $(0, \gamma)$, $\gamma = \lambda B \lambda^T$ (λ^T — вектор-столбец, транспонированный к λ).

Следствие 1. Если выполнены условия теоремы 1, то

$$\mathbf{P}(\tau_c = n) \sim \frac{\Delta(\nu)}{\sqrt{n}} \varphi_\gamma(-\theta\Delta(\nu)) \quad \text{при } c \rightarrow \infty.$$

Отметим, что теорема 1 допускает следующее расширение для случая, когда распределение случайного вектора ξ_1 принадлежит области притяжения многомерного устойчивого распределения в смысле Леви–Фельдхейма с характеристическим показателем $\alpha \in (1, 2]$ (см. [9], [10]).

Теорема 2. Пусть ξ_n , $n \geq 1$, — последовательность независимых одинаково распределенных случайных векторов в $\mathbf{R}^k$ с конечным вектором математических ожиданий $\nu = \mathbf{E} \xi_1$ и $\Delta(x) \in H_\nu$. Предположим, что существуют медленно меняющаяся на бесконечности функция $L(x)$, $x > 0$, и k -мерный случайный вектор J такие, что

$$\frac{S_n - n\nu}{A(n)} \Rightarrow J \quad \text{при } n \rightarrow \infty, \quad \text{где } A(n) = n^{1/\alpha} L(n), \quad \alpha \in (1, 2].$$

Если $n = n(c) = c/\Delta(\nu) + \theta(c)A([c/\Delta(\nu)])$, причем $\theta(c) \rightarrow \theta \in \mathbf{R}$ при $c \rightarrow \infty$, то

$$\mathbf{P}(\tau_c = n, \chi_c \leq x) \sim \frac{\Delta(\nu)}{A(n)} g_a(-\theta\Delta(\nu)) H(x)$$

равномерно по x , $0 < \delta \leq x \leq M < \infty$, и θ из ограниченного множества в $\mathbf{R}$, где $g_a(x)$ — плотность устойчивого распределения случайной величины (λ, J) .

Следствие 2. Пусть выполняются условия теоремы 2. Тогда

$$\mathbf{P}(\tau_c = n) \sim \frac{\Delta(\nu)}{A(n)} g_a(-\theta\Delta(\nu)) \quad \text{при } c \rightarrow \infty.$$

Следствие 3. При выполнении условий теоремы 1 (или теоремы 2) имеет место

$$\lim_{c \rightarrow \infty} \mathbf{P}(\chi_c \leq x | \tau_c = n) = H(x), \quad x > 0.$$

Этот результат показывает, что момент первого выхода τ_c и перескок χ_c асимптотически независимы (см. [1], [4]).

Отметим, что в условиях теоремы 2 имеет место сходимость по распределению:

$$\frac{Z_n - n\Delta(\nu)}{A(n)} \Rightarrow (\lambda, J).$$

Это означает, что распределение случайной величины $X_1 = \Delta(\nu) + (\lambda, \xi_1 - \nu)$ принадлежит области притяжения устойчивого распределения случайной величины (λ, J) с характеристическим показателем $\alpha \in (1, 2]$ (см. [9]).

Для доказательства теоремы 1 нам понадобится ряд утверждений, сформулированных в виде следующих лемм.

Лемма 1. Пусть η_n , $n \geq 1$, — независимые одинаково распределенные случайные величины с $\sigma^2 = \mathbf{D}\eta_1$ и $a = \mathbf{E}\eta_1$. Для того чтобы для любого ограниченного выпуклого борелевского множества B в $\mathbf{R}$ равномерно по $x \in \mathbf{R}$ выполнялось соотношение

$$\mathbf{P}\left(\sum_{i=1}^n \eta_i \in x + B\right) = \frac{\mu(B)}{\sigma\sqrt{n}} \varphi\left(\frac{x - na}{\sigma\sqrt{n}}\right) + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right),$$

необходимо и достаточно, чтобы распределение случайной величины η_1 было нерешетчатым. (Здесь μ — мера Лебега в $\mathbf{R}$ и φ — плотность стандартного нормального распределения.)

Этот результат содержится в качестве следствия основного результата в [8].

Лемма 2. Пусть случайный вектор ξ_1 имеет нерешетчатое распределение и $\Delta(x) \in H_\nu$. Тогда

$$\lim_{c \rightarrow \infty} \mathbf{P}(\chi_c \leq x) = H(x), \quad x \geq 0.$$

Утверждение этой леммы является частным случаем теорем 2.7 и 4.1 из работы [1] в силу разложения $T_n = Z_n + \varepsilon_n$.

Лемма 3. Предельное распределение $H(x)$ имеет плотность

$$h(x) = \frac{1}{\Delta(\nu)} \mathbf{P}(Z_i \geq x, i \geq 1).$$

Эта лемма следует из теорем 2.7 и 4.1 работы [1] в силу разложения $T_n = Z_n + \varepsilon_n$.

Доказательство теоремы 1. Разделим промежуток $(0, x]$ на m равных частей и положим $l_j = ((j-1)x/m, jx/m]$, $j = 1, \dots, m$. По формуле полной вероятности имеем:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(\tau_c = n, \chi_c \leq x) &= \sum_{j=1}^m \mathbf{P}(\tau_c = n, T_n \in c + l_j) \\ &= \sum_{j=1}^m \mathbf{P}(\tau_c = n | T_n \in c + l_j) \mathbf{P}(T_n \in c + l_j). \end{aligned} \quad (2)$$

Оценим условную вероятность $Q_{n,j}(c) = \mathbf{P}(\tau_c = n | T_n \in c + l_j)$. Нетрудно видеть, что

$$\begin{aligned} Q_{n,j}(c) &= \mathbf{P}(\tau_c \geq n | T_n \in c + l_j) = \mathbf{P}(T_i \leq c, 1 \leq i < n | T_n \in c + l_j) \\ &= \mathbf{P}(T_n - T_i \geq T_n - c, 1 \leq i < n | T_n \in c + l_j) \\ &= \mathbf{P}(T_n - T_{n-i} \geq T_n - c, 1 \leq i < n | T_n \in c + l_j). \end{aligned}$$

Отсюда имеем

$$\begin{aligned} &\mathbf{P}\left(T_n - T_{n-i} \geq \frac{j}{m}x, 1 \leq i < n | T_n \in c + l_j\right) \\ &\leq Q_{n,j}(c) \leq \mathbf{P}\left(T_n - T_{n-i} \geq \frac{j-1}{m}x, 1 \leq i < n | T_n \in c + l_j\right). \end{aligned}$$

Обозначим $\Pi_{n,j}(x, c) = \mathbf{P}(T_n - T_{n-i} \geq jx/m, 1 \leq i < n | T_n \in c + l_j)$. Из (2) получаем, что

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^m \Pi_{n,j}(x, c) \mathbf{P}(T_n \in c + l_j) &\leq \mathbf{P}(\tau_c = n, \chi_c \leq x) \\ &\leq \sum_{j=1}^m \Pi_{n,j-1}(x, c) \mathbf{P}(T_n \in c + l_j). \end{aligned} \quad (3)$$

Далее нам потребуются следующие леммы.

Лемма 4. Для любого $\varepsilon > 0$ существует целое q_1 такое, что для достаточно больших s и для всех r и x из ограниченного множества выполнено неравенство

$$\max_{j \leq m} \mathbf{P}(J_{ni} \leq r, \exists i \in [q_1, n] | T_n \in c + l_j) < \varepsilon, \quad \text{где } J_{ni} = T_n - T_{n-i}. \quad (4)$$

Оценка (4) для случая $k = 1$ доказана в работе [4]. В общем случае ее можно доказать с помощью выкладок и рассуждений, аналогичных проведенным в работе [4].

Лемма 5. Для каждого фиксированного целого числа $p \geq 1$ совместное условное распределение случайных величин

$$J_{ni} = T_n - T_{n-i}, \quad i = 1, \dots, p,$$

при условии $n^{-1}S_n = y$ ($y \in \mathbf{R}^k$ фиксировано) слабо сходится к безусловному распределению случайных величин $Z_1, \dots, Z_p$ и

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}(J_{ni} \geq x, 1 \leq i \leq p | T_n \in c + l_j) = \mathbf{P}(Z_i \geq x, 1 \leq i \leq p). \quad (5)$$

Утверждения этой леммы для одномерного случая содержатся в [1]. В многомерном случае их можно показать с помощью рассуждений, проведенных при доказательстве теоремы 5.1 из [1] (см. также [4]).

Продолжим доказательство теоремы 1. Поскольку $\mathbf{E} Z_1 = \Delta(\nu) > 0$, то из усиленного закона больших чисел вытекает, что для любого $\varepsilon > 0$ существует достаточно большое целое число q_2 такое, что

$$\mathbf{P}(Z_j \leq x, \exists j > q_2) < \varepsilon. \quad (6)$$

Полагая $q = \max(q_1, q_2)$ вместо q_1 в (4) и вместо q_2 в (6), имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(J_{ni} \geq x, 1 \leq i \leq q | T_n \in c + l_j) - \varepsilon &\leq \mathbf{P}(J_{ni} \geq x, 1 \leq i < n | T_n \in c + l_j) \\ &\leq \mathbf{P}(J_{ni} \geq x, 1 \leq i \leq q | T_n \in c + l_j) \end{aligned} \quad (7)$$

и

$$\mathbf{P}(Z_i \geq x, 1 \leq i \leq q) - \varepsilon \leq \mathbf{P}(Z_i \geq x, 1 \leq i) \leq \mathbf{P}(Z_i \geq x, 1 \leq i \leq q). \quad (8)$$

Из соотношения (5) при $p = q$ и неравенств (7) и (8) получаем, что

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(Z_i \geq x, i \geq 1) - 2\varepsilon &\leq \mathbf{P}(J_{ni} \geq x, 1 \leq i < n | T_n \in c + l_j) \\ &\leq \mathbf{P}(Z_i \geq x, i \geq 1) + 2\varepsilon. \end{aligned} \quad (9)$$

Тогда из (9) и (3) имеем:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^m \frac{x}{m} \mathbf{P}\left(Z_i \geq \frac{j}{m} x, i \geq 1\right) \mathbf{P}(T_n \in c + l_j) - 2\varepsilon \leq \mathbf{P}(\tau_c = n, \chi_c \leq x) \\ \leq \sum_{j=1}^m \mathbf{P}\left(Z_i \geq \frac{j-1}{m} x, i \geq 1\right) \mathbf{P}(T_n \in c + l_j) + 2\varepsilon \end{aligned} \quad (10)$$

Теперь оценим вероятности $\mathbf{P}(T_n \in c + l_j)$. В силу леммы 1

$$\mathbf{P}(Z_n \in c + l_j) = \frac{\mu(J_j)}{\sqrt{n}} \varphi_\gamma\left(\frac{c - n\Delta(\nu)}{\sqrt{n}}\right) + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right),$$

или

$$\mathbf{P}(Z_n \in c + l_j) \sim \frac{x/m}{\sqrt{n}} \varphi_\gamma(-\theta\Delta(\nu)). \quad (11)$$

Учитывая, что $T_n = Z_n + \varepsilon_n$ и $\varepsilon_n/\sqrt{n} \xrightarrow{\mathbf{P}} 0$ при $n \rightarrow \infty$, из (11) находим, что

$$\mathbf{P}(T_n \in c + l_j) \sim \frac{x/m}{\sqrt{n}} \varphi_\gamma(-\theta\Delta(\nu)). \quad (12)$$

Подставляя (12) в (10), имеем:

$$\begin{aligned} \varphi_\gamma(-\theta\Delta(\nu))(1 - \varepsilon) \sum_{j=1}^m \frac{x}{m} \mathbf{P}\left(Z_i \geq \frac{j}{m} x, i \geq 1\right) - 2\varepsilon \leq \sqrt{n} \mathbf{P}(\tau_c = n, \chi_c \leq x) \\ \leq (1 + \varepsilon) \varphi_\gamma(-\theta\Delta(\nu)) \sum_{j=1}^m \frac{x}{m} \mathbf{P}\left(Z_i \geq \frac{j-1}{m} x, i \geq 1\right) + 2\varepsilon. \end{aligned} \quad (13)$$

Согласно лемме 3,

$$\mathbf{P}(Z_i \geq x, i \geq 1) = \frac{\Delta(\nu)}{\mathbf{E} Z_{\tau_+}} \mathbf{P}(Z_{\tau_+} > x).$$

Поэтому из (13), выбирая сначала ε сколь угодно малым, а затем m достаточно большим, находим, что

$$\mathbf{P}(\tau_c = n, \chi_c \leq x) = \frac{\Delta(\nu)}{\sqrt{n}} \varphi_\gamma(-\theta\Delta(\nu)) H(x) + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

равномерно по x из ограниченного множества в $[\delta, \infty)$ с $\delta > 0$ и по θ из ограниченного множества в $\mathbf{R}$.

Теорема 1 доказана.

Доказательство теоремы 2 проводится по схеме доказательства теоремы 1, при этом ключевую роль играет следующая лемма.

Лемма 6. Пусть выполняются условия теоремы 2. Тогда при $c \rightarrow \infty$

$$\mathbf{P}\left(\sum_{i=1}^n X_i \in x + B\right) \sim \frac{h}{A(n)} g_a(-\theta\Delta(\nu))$$

для любого ограниченного выпуклого борелевского множества B с $\mu(B) = h > 0$, где μ — мера Лебега в $\mathbf{R}$.

Доказательство. При выполнении условий теоремы 2 имеет место основная теорема работы [8], согласно которой

$$\mathbf{P}\left(\sum_{i=1}^n X_i \in x + B\right) = \frac{h}{A(n)} g_a\left(\frac{x - n\Delta(\nu)}{A(n)}\right) + o\left(\frac{1}{A(n)}\right).$$

Подставляя в эту формулу разложение для $n = n(c)$ из условий теоремы 2, получаем утверждение леммы 6.

Следствия 1 и 2 вытекают соответственно из теорем 1 и 2 при $x \rightarrow \infty$. Следствие 3 вытекает из следствия 2 и теоремы 2.

З а м е ч а н и е. Из хода доказательства теоремы 1 следует, что ее утверждение имеет место равномерно по x из конечного интервала в $[\delta, \infty)$ с $\delta > 0$. Для выполнения утверждения этой теоремы равномерно по $x \in [\delta, \infty)$ требуется дополнительное условие на функцию $\Delta(x)$ и на распределение случайной величины $\Delta(\xi_1)$. Например, если $\Delta(x)$ является выпуклой в некоторой окрестности точки $x = \nu$, то условие

$$\mathbf{E}(\Delta(\xi_1))^+ < \infty \quad (14)$$

обеспечивает выполнение утверждение теоремы 2 для $x \in [\delta, \infty)$, $\delta > 0$. Действительно, из условия (14) вытекает, что для любого $\varepsilon > 0$ существует достаточное большое число x такое, что

$$\sum_{l=0}^{\infty} \mathbf{P}(\Delta(\xi_1) > x + l) < \varepsilon. \quad (15)$$

Из выпуклости функции $\Delta(x)$ в окрестности точки $x = \nu$ следует, что

$$T_n = n\Delta\left(\frac{S_n}{n}\right) = n\Delta\left(\frac{n-1}{n} \frac{S_{n-1}}{n-1} + \frac{\xi_n}{n}\right) \leq T_{n-1} + \Delta(\xi_n)$$

для достаточно больших n .

Следовательно,

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(\tau_c = n, \chi_c > x) &= \mathbf{P}(\tau_c = n, T_n > c + x) \leq \mathbf{P}(\tau_c = n, \Delta(\xi_1) > c + x - T_{n-1}) \\ &\leq \int_0^{\infty} \mathbf{P}(\Delta(\xi_1) > x + z) \mathbf{P}(T_{n-1} \in c - dz) \\ &\leq \sum_{l=0}^{\infty} \mathbf{P}(\Delta(\xi_1) > x + l) \mathbf{P}(T_{n-1} \in [c - l - 1, c - l]). \end{aligned}$$

Далее, согласно лемме 1, существует константа $M > 0$ такая, что для всех $c \geq 0$ и $l \geq 0$

$$\mathbf{P}(T_{n-1} \in [c - l - 1, c - l]) \leq \frac{M}{\sqrt{n}}.$$

Поэтому, учитывая (15), получаем, что $\mathbf{P}(\tau_c = n, \chi_c > x) \leq \varepsilon M / \sqrt{n}$. Отсюда следует, что утверждение теоремы 2 выполняется равномерно по x на «крае», т.е. вблизи бесконечности.

Отметим, что это замечание остается в силе и для теоремы 2.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Woodroffe M. Nonlinear Renewal Theory in Sequential Analysis. Philadelphia: SIAM, 1982, 119 p.
2. Siegmund D. Sequential Analysis. Tests and Confidence Intervals. New York: Springer-Verlag, 1985, 272 p.
3. Lalley S. Limit theorems for first-passage times in linear and nonlinear renewal theory. — Adv. Appl. Probab., 1984, v. 16, № 4, p. 766–803.
4. Рагимов Ф. Г. Предельные теоремы для моментов первого выхода процессов с независимыми приращениями. Дисс. канд. физ.-матем. наук. М.: Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, 1985, 127 с.
5. Рагимов Ф. Г. Об асимптотическом поведении одного класса моментов первого выхода за границу в многомерном случайном блуждании. — Теория вероятн. и ее примен., 2005, т. 50, в. 3, с. 579–585.

6. *Aras G., Woodroffe M.* Asymptotic expansions for the moments of a randomly stopped average. — *Ann. Statist.*, 1993, v. 21, № 1, p. 503–519.
7. *Боровков А. А., Могильский А. А.* Предельные теоремы в задаче достижения границы многомерным блужданием. — *Сиб. матем. журн.*, 2001, т. 42, № 2, с. 289–317.
8. *Мухин А. Б.* Локальные предельные теоремы для распределений сумм независимых случайных векторов. — *Теория вероятн. и ее примен.*, 1984, т. 29, № 2, с. 360–366.
9. *Золотарев В. М.* Одномерные устойчивые распределения. М: Наука, 1983, 304 с.
10. *Рвачева Е. Л.* Об областях притяжения многомерных устойчивых распределений. — *Ученые записки Львовского ун-та, сер. мех.-матем.*, 1954, т. 29, № 1, с. 5–44.

Поступила в редакцию
30.III.2007

Исправленный вариант
11.III.2008

© 2009 г.

СИДОРОВ Д. И.*

ОБ УСЛОВИЯХ ПЕРЕМЕШИВАНИЯ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ СКОЛЬЗЯЩИХ СРЕДНИХ¹⁾

В статье изучается применимость классических условий перемешивания для последовательностей скользящих средних, построенных как по независимым, так и по зависимым случайным величинам. В частности, описан класс скользящих средних без условия m -зависимости, но со свойством равномерно сильного перемешивания. Также доказано отсутствие перемешивания для некоторых классов скользящих средних.

Ключевые слова и фразы: скользящие средние, сильное перемешивание, равномерно сильное перемешивание.

Введение. Пусть $\{\xi_j, j \in \mathbf{Z}\}$ — последовательность случайных величин, заданных на одном вероятностном пространстве, $\{a_j, j \in \mathbf{Z}\}$ — некоторые вещественные числа ($\mathbf{Z}$ — множество всех целых чисел). Скользящие средние $\{X_k, k \in \mathbf{Z}\}$, порожденные последовательностью $\{\xi_j\}$, определяются равенством

$$X_k := \sum_{j \in \mathbf{Z}} a_{k-j} \xi_j; \quad (1)$$

при этом предполагается, что ряд в (1) сходится с вероятностью 1. В частности, это будет выполнено, если

$$\sum_j |a_{k-j}| \mathbf{E} |\xi_j| < \infty. \quad (2)$$

Если же случайные величины $\{\xi_j, j \in \mathbf{Z}\}$ независимы, имеют конечный второй момент и центрированы, то для сходимости ряда в (1) достаточно потребовать, чтобы выполнялось более слабое условие

$$\sum_j a_{k-j}^2 \mathbf{E} \xi_j^2 < \infty.$$

* Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090, Россия; e-mail: dsidorov@mail.ru

¹⁾ Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 06-01-00738).