Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Д. И. Сидоров, Об условиях перемешивания последовательностей скользящих средних, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2009, том 54, выпуск 2, 374–382

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp2714>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.208.226.222

26 апреля 2023 г., 13:47:47

6. *Aras G., Woodroffe M.* Asymptotic expansions for the moments of a randomly stopped average. — *Ann. Statist.*, 1993, v. 21, № 1, p. 503–519.
7. *Боровков А. А., Мозульский А. А.* Предельные теоремы в задаче достижения границы многомерным блужданием. — *Сиб. матем. журн.*, 2001, т. 42, № 2, с. 289–317.
8. *Мухин А. Б.* Локальные предельные теоремы для распределений сумм независимых случайных векторов. — *Теория вероятн. и ее примен.*, 1984, т. 29, № 2, с. 360–366.
9. *Золотарев В. М.* Одномерные устойчивые распределения. М: Наука, 1983, 304 с.
10. *Рвачева Е. Л.* Об областях притяжения многомерных устойчивых распределений. — *Ученые записки Львовского ун-та, сер. мех.-матем.*, 1954, т. 29, № 1, с. 5–44.

Поступила в редакцию
30.III.2007

Исправленный вариант
11.III.2008

© 2009 г.

СИДОРОВ Д. И.*

ОБ УСЛОВИЯХ ПЕРЕМЕШИВАНИЯ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ СКОЛЬЗЯЩИХ СРЕДНИХ¹⁾

В статье изучается применимость классических условий перемешивания для последовательностей скользящих средних, построенных как по независимым, так и по зависимым случайным величинам. В частности, описан класс скользящих средних без условия m -зависимости, но со свойством равномерно сильного перемешивания. Также доказано отсутствие перемешивания для некоторых классов скользящих средних.

Ключевые слова и фразы: скользящие средние, сильное перемешивание, равномерно сильное перемешивание.

Введение. Пусть $\{\xi_j, j \in \mathbf{Z}\}$ — последовательность случайных величин, заданных на одном вероятностном пространстве, $\{a_j, j \in \mathbf{Z}\}$ — некоторые вещественные числа ($\mathbf{Z}$ — множество всех целых чисел). Скользящие средние $\{X_k, k \in \mathbf{Z}\}$, порожденные последовательностью $\{\xi_j\}$, определяются равенством

$$X_k := \sum_{j \in \mathbf{Z}} a_{k-j} \xi_j; \quad (1)$$

при этом предполагается, что ряд в (1) сходится с вероятностью 1. В частности, это будет выполнено, если

$$\sum_j |a_{k-j}| \mathbf{E} |\xi_j| < \infty. \quad (2)$$

Если же случайные величины $\{\xi_j, j \in \mathbf{Z}\}$ независимы, имеют конечный второй момент и центрированы, то для сходимости ряда в (1) достаточно потребовать, чтобы выполнялось более слабое условие

$$\sum_j a_{k-j}^2 \mathbf{E} \xi_j^2 < \infty.$$

* Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090, Россия; e-mail: dsidorov@mail.ru

¹⁾ Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 06-01-00738).

Отметим, что для независимых одинаково распределенных случайных величин $\{\xi_j; j \in \mathbf{Z}\}$ скользящие средние в (1) представляют собой последовательность стационарно связанных случайных величин. Если множество отличных от нуля коэффициентов a_j в (1) конечно, то при условии независимости порождающих случайных величин $\{\xi_j\}$ последовательность $\{X_k\}$ представляет собой совокупность m -зависимых случайных величин. Если множество $A_0 := \{j \in \mathbf{Z}: a_j \neq 0\}$ бесконечно, то зависимость между частями последовательности $\{X_k\}$ может быть достаточно сильной и, в частности, классические условия перемешивания Розенблатта и Ибрагимова для нее могут не выполняться [1]–[3], [5].

Напомним, что последовательность $\{X_k\}$ удовлетворяет условию перемешивания Розенблатта (так называемое *сильное* или α -перемешивание), если при $m \rightarrow \infty$

$$\alpha(m) := \sup_{k \in \mathbf{Z}, A \in \mathcal{A}_{-\infty}^k, B \in \mathcal{A}_{k+m}^\infty} |\mathbf{P}(B \cap A) - \mathbf{P}(B)\mathbf{P}(A)| \rightarrow 0,$$

и удовлетворяет условию перемешивания Ибрагимова (так называемое *равномерно сильное* или φ -перемешивание), если при $m \rightarrow \infty$

$$\varphi(m) := \sup_{k \in \mathbf{Z}, A \in \mathcal{A}_{-\infty}^k, B \in \mathcal{A}_{k+m}^\infty, \mathbf{P}(A) \neq 0} \frac{|\mathbf{P}(B \cap A) - \mathbf{P}(B)\mathbf{P}(A)|}{\mathbf{P}(A)} \rightarrow 0,$$

где $\mathcal{A}_{-\infty}^k = \sigma\{X_j, j \leq k\}$ и $\mathcal{A}_{k+m}^\infty = \sigma\{X_j, j \geq k+m\}$ — σ -алгебры, порожденные соответствующими наборами случайных величин.

Условие Розенблатта для последовательностей скользящих средних исследовалось в [4]–[6] (в [6] — для последовательностей в более общей форме), и был найден класс скользящих средних, удовлетворяющих этому условию. Условие Ибрагимова является более ограничительным, и, например, в случае стационарно связанных гауссовских величин $\{\xi_j\}$ оно выполняется только для последовательностей $\{X_k\}$ с условием m -зависимости [3, теорема 17.3.2], т.е. только если множество A_0 конечно. В настоящей работе, в частности, найдены скользящие средние, удовлетворяющие условию Ибрагимова, когда множество A_0 бесконечно. Кроме этого, для некоторых классов скользящих средних доказано отсутствие перемешивания.

1. α -перемешивание. Условие α -перемешивания было предложено М. Розенблаттом в 1956 г. [8]. В работах [4]–[6] исследовались последовательности, удовлетворяющие этому условию. Результат в наиболее общей форме был получен в [6], где описан подкласс скользящих средних со свойством α -перемешивания. Основным условием в [6] на распределение случайных величин ξ_j при этом является наличие плотности $p(t)$, удовлетворяющей условию Липшица в среднем: $\int |p(t+x) - p(t)| dt \leq C|x|$.

С другой стороны, в [1] было доказано, что для последовательности $X_k = \sum_{j=0}^\infty \rho^j \xi_{k-j}$, где ξ_j — независимые бернуллиевские случайные величины, условие сильного перемешивания не выполняется. Основываясь на тех же рассуждениях, что и в [1], данный результат можно распространить и на более общий случай скользящих средних, построенных по дискретным величинам с конечным множеством значений.

Предложение 1. Пусть $\{\xi_j; j \in \mathbf{Z}\}$ — независимые дискретные случайные величины, из которых хотя бы одна невырожденная. Кроме того, пусть существуют такие константы $0 < \delta \leq \Delta < \infty$, не зависящие от j , что расстояние между любыми двумя атомами распределения ξ_j не меньше δ и не превосходит Δ . Наконец, пусть для всех k ряд в (2) сходится и выполнено одно из следующих двух условий на коэффициенты:

1) $a_j = a_0 q^{|j|}$ при $j < 0$ и $a_j = a_0 a^j$ при $j \geq 0$, где $a_0 \neq 0$, $0 < q < 1$, $0 < a \leq \delta/(\Delta + \delta)$;

2) $0 < |a_{k_j+1}| \leq |a_{k_j}| \delta/(\Delta + \delta)$ для всех $j \geq 0$, где $\{a_{k_j}; j \geq 0\}$ — упорядоченные по убыванию абсолютных величин ненулевые коэффициенты a_j .

Тогда последовательность $\{X_k\}$ не удовлетворяет условию α -перемешивания.

Если в условиях 1) и 2) неравенства для a и a_{k_j} строгие, то утверждение остается верным и в случае произвольно зависимых случайных величин ξ_j .

В отдельный класс можно выделить последовательности, построенные по независимым гауссовским случайным величинам ξ_j . В этом случае $\{X_k\}$ является стационарной гауссовской последовательностью, а α -перемешивание эквивалентно полной регулярности. Известны необходимые и достаточные условия в терминах спектральной плотности, при которых стационарная последовательность является вполне регулярной: это так называемая теорема Хелсона–Сарасана (см. [7]). Однако непосредственная проверка этих условий является непростой задачей. С помощью этой теоремы в [5] было доказано отсутствие перемешивания для некоторой последовательности $\{X_k\}$, построенной по недискретным случайным величинам $\{\xi_j\}$ (см. в [5] пример И. А. Ибрагимова).

Более простые достаточные условия получены в [2] и [3, теорема 17.3.3]. Они сводятся к проверке положительности и непрерывности спектральной плотности стационарной гауссовской последовательности. В случае скользящих средних, построенных по независимым одинаково распределенным случайным величинам $\{\xi_j\}$, спектральная плотность $f(\lambda)$ последовательности $\{X_k\}$ имеет вид

$$f(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \left| \sum_{k \in \mathbf{Z}} a_k e^{-i\lambda k} \right|^2 \mathbf{E} \xi_0^2,$$

при этом данная функция является непрерывной и положительной, если, например, $\sum_{k \neq k_0} |a_k| < |a_{k_0}|$ для некоторого k_0 .

2. φ -перемешивание. Как уже было отмечено [3], в случае гауссовской последовательности $\{X_k\}$ равномерно сильное перемешивание влечет за собой m -зависимость $\{X_k\}$. Таким образом, если множество A_0 бесконечно, а $\{\xi_j\}$ — независимые гауссовские случайные величины, то условие φ -перемешивания не выполнено. Следующие две теоремы описывают случаи, когда φ -перемешивание скользящих средних отсутствует для некоторых других классов распределений ξ_j .

Теорема 1. Пусть $\{\xi_j; j \in \mathbf{Z}\}$ — независимые невырожденные случайные величины, $a_j > 0$ при всех j , ряд в (2) сходится при всех k и выполнены условия:

1) существуют положительные константы x_0, c_0, c_1, c_2 такие, что для некоторого целого j_0 и некоторого $j_1 > 0$

$$\begin{aligned} \sup_{x \geq x_0} \frac{\mathbf{P}(\xi_{j_0} \geq x + y)}{\mathbf{P}(\xi_{j_0} \geq x)} &\leq c_1 e^{-c_2 y} && \text{для всех } y \geq 0, \\ \mathbf{P}(\xi_j \geq x) &\leq c_1 e^{-c_2 x} && \text{для всех } x \geq x_0, \text{ если } |j| < j_1, \\ \mathbf{P}(\xi_j \geq x) &\leq c_0 \mathbf{P}(\xi_{j_0} \geq x) && \text{для всех } x \geq x_0, \text{ если } |j| \geq j_1; \end{aligned}$$

2) справедливо неравенство

$$\inf_{j \in \mathbf{Z}} \frac{a_j}{a_{j+1}} > 0;$$

а также выполнено одно из следующих условий:

3) справедливы неравенства

$$\sum_{j \neq 0} a_j \ln |j| < \infty \quad \text{и} \quad \inf_{j \in \mathbf{Z}} \frac{a_{j+1}}{a_j} > 0;$$

3') для некоторых $\delta > 0, c_3 > 0$

$$\sum_{j \in \mathbf{Z}} a_j |j|^\delta < \infty \quad \text{и} \quad \frac{a_{j+1}}{a_j} \ln |j| \geq c_3$$

при всех таких j , что $|j|$ достаточно велико.

Тогда соответствующая последовательность $\{X_k\}$ не удовлетворяет условию φ -перемешивания.

Теорема 2. Пусть $\{\xi_j; j \in \mathbf{Z}\}$ — последовательность ограниченных случайных величин, из которых хотя бы одна невырожденная и не зависит от остальных, пусть множество $A^- := \{j < 0: a_j \neq 0\}$ бесконечно и для любого k случайная величина X_k ограничена. Тогда последовательность $\{X_k\}$ не удовлетворяет условию φ -перемешивания.

Если в условиях теоремы 2 не требовать бесконечности множества A^- , то φ -перемешивание последовательности $\{X_k\}$ возможно и в том случае, когда множество всех ненулевых коэффициентов a_j бесконечно. Описанию такого класса скользящих средних посвящена следующая теорема.

Введем для $p \geq 1$ (включая случай $p = \infty$) дополнительное ограничение на коэффициенты $\{a_j\}$:

$$\begin{aligned} \sum_{k \geq 0} \left(\sum_{j \geq k} |a_j|^p \right)^{1/p} &< \infty, & \text{если } p < \infty, \\ \sum_{k \geq 0} \sup_{j \geq k} |a_j| &< \infty, & \text{если } p = \infty. \end{aligned} \quad (3)$$

Очевидно, из (3) следует, что $\sum |a_k| < \infty$. Обозначим через L линейный оператор, который отображает пространство суммируемых последовательностей l_1 в себя по следующему правилу: образ $Ly := ((Ly)_k; k \in \mathbf{Z})$ любого элемента $y := (y_j; j \in \mathbf{Z}) \in l_1$ задается формулой

$$(Ly)_k = \sum_{j \in \mathbf{Z}} a_{k-j} y_j, \quad k \in \mathbf{Z}.$$

Легко видеть, что оператор L является ограниченным в пространстве l_1 .

Теорема 3. Пусть $\{\xi_j; j \in \mathbf{Z}\}$ — независимые ограниченные случайные величины, имеющие плотности распределений $p_j(x)$, множество A^- конечно и существует такое $C_1 > 0$, что для всех $j \in \mathbf{Z}$

$$\int |p_j(y+x) - p_j(y)| dy \leq C_1 |x| \quad \text{при всех } x \in \mathbf{R}.$$

Пусть также для некоторого $p \geq 1$ выполнено условие (3) и существует ограниченный обратный оператор L^{-1} в пространстве l_1 . Кроме того, пусть для некоторого $C > 0$

$$\begin{aligned} \mathbf{P} \left(\left(\sum_j |\xi_j|^q \right)^{1/q} \leq C \right) &= 1, & \text{если } p > 1, \\ \mathbf{P} \left(\sup_j |\xi_j| \leq C \right) &= 1, & \text{если } p = 1, \end{aligned}$$

где $1/p + 1/q = 1$. Тогда последовательность $\{X_k\}$ удовлетворяет условию φ -перемешивания.

З а м е ч а н и е. Если для некоторого k_0 имеет место неравенство $|a_{k_0}| > \sum_{k \neq k_0} |a_k|$, то оператор L имеет ограниченный обратный в пространстве l_1 , так как он представим в виде $L = a_{k_0}(I - \tilde{L})$, где I — тождественный оператор, а для операторной нормы $\|\tilde{L}\|$ справедлива следующая оценка:

$$\|\tilde{L}\| = \left\| I - \frac{1}{a_{k_0}} L \right\| = \sup_{\|y\| \leq 1} \left| \left(I - \frac{1}{a_{k_0}} L \right) y \right| \leq \sup_{\|y\| \leq 1} \frac{1}{|a_{k_0}|} \sum_{k \neq k_0} |a_k| \sum_j |y_j| < 1.$$

3. Доказательства. Доказательство предложения 1. Сначала докажем это утверждение при выполнении условия 2). Так как детерминированный сдвиг случайной величины ξ_j не влияет на коэффициент перемешивания, то можно считать, что $|\xi_j| \leq \Delta/2$ для всех j .

Пусть $V_{m,n}$ — множество значений, принимаемых случайной величиной $Y_{m,n} := \sum_{j=0}^n a_{k_j} \xi_{m-k_j}$. Индукцией по n можно показать, что расстояние между любыми двумя точками множества $V_{m,n}$ не менее $|a_{k_n}| \delta$, значение величины $Y_{m,n}$ однозначно определяет значения всех ξ_{k_j} , $j = 0, 1, \dots, n$. Так как

$$\left| \sum_{j \geq n+1} a_{k_j} \xi_{m-k_j} \right| \leq \sum_{j \geq n+1} |a_{k_n}| \left(\frac{\delta}{\Delta + \delta} \right)^{j-n} \frac{\Delta}{2} = |a_{k_n}| \frac{\delta}{2},$$

при этом равенство достигается с нулевой вероятностью, а также $X_m = Y_{m,n} + \sum_{j \geq n+1} a_{k_j} \xi_{m-k_j}$, то событие $\{X_m \in [v - |a_{k_n}| \delta/2, v + |a_{k_n}| \delta/2]\}$, где $v \in V_{m,n}$, совпадает с $\{Y_{m,n} = v\}$ с точностью до множества нулевой вероятности.

Обозначим $W_{m,n} := \bigcup_{v \in V_{m,n-1}} \{v + a_{k_n} z\}$ множество всех значений, принимаемых $Y_{m,n}$ при условии $\xi_{m-k_n} = z$. Таким образом,

$$\{Y_{m,n} \in W_{m,n}\} = \{\xi_{m-k_n} = z\}, \quad W_{m,n} \subset V_{m,n}.$$

Положим $B_{m,n} := \bigcup_{w \in W_{m,n}} [w - |a_{k_n}| \delta/2, w + |a_{k_n}| \delta/2]$. Тогда событие $\{X_m \in B_{m,n}\}$ совпадает с событием $\{\xi_{m-k_n} = z\}$ с точностью до множества нулевой вероятности.

Пусть ξ_n — невырожденная случайная величина, а значение z выбрано так, что $0 < \mathbf{P}(\xi_n = z) < 1$. В этом случае условие сильного перемешивания не выполнено, поскольку

$$\begin{aligned} & |\mathbf{P}(X_{k_j} \in B_{k_j+n,j}, X_{k_0} \in B_{k_0+n,0}) - \mathbf{P}(X_{k_j} \in B_{k_j+n,j}) \mathbf{P}(X_{k_0} \in B_{k_0+n,0})| \\ &= |\mathbf{P}(\xi_n = z) - \mathbf{P}(\xi_n = z) \mathbf{P}(\xi_n = z)| \\ &= \mathbf{P}(\xi_n = z)(1 - \mathbf{P}(\xi_n = z)) \not\rightarrow 0 \quad \text{при} \quad |k_j - k_0| \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Пусть теперь выполнено условие 1). Тогда

$$\sum_{j \geq 0} a^j \xi_{k-j} = \frac{X_k - qX_{k+1}}{a_0(1 - aq)} =: Y_k.$$

В этом случае отсутствие перемешивания можно доказать аналогично предыдущему заменой X_k на Y_k , полагая $k_j = j$.

Таким образом, предложение 1 доказано.

Доказательство теоремы 1. Можно считать, что $\mathbf{E} \xi_j = 0$ при всех j . Докажем сначала, что для $m > 0$

$$\liminf_{x \rightarrow \infty} \mathbf{P}(X_0 < 0 | X_{-m} \geq x) = 0. \quad (4)$$

Для любого $\alpha > 0$ имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(X_0 < 0 | X_{-m} \geq x) &= \frac{\mathbf{P}(X_0 < 0, X_{-m} \geq x)}{\mathbf{P}(X_{-m} \geq x)} \\ &\leq \frac{\mathbf{P}(X_{-m} - \alpha X_0 \geq x)}{\mathbf{P}(X_{-m} \geq x)} = \frac{\mathbf{P}(\sum (a_j - \alpha a_{m+j}) \xi_{-m-j} \geq x)}{\mathbf{P}(X_{-m} \geq x)}. \end{aligned}$$

Введем следующие величины:

$$\begin{aligned} q &:= \frac{1}{2} \inf_{j \in \mathbf{Z}} \frac{a_j}{a_{j+1}}, \quad t_j := t_j(m) = \min_{|k| \leq |j|} \frac{a_{k+m}}{a_k}, \\ \lambda &\in (0, q^m), \quad \alpha := q^m, \quad b_j := a_j - \alpha a_{m+j}. \end{aligned}$$

Тогда $0 < b_j < a_j$ для всех j и справедлива следующая оценка:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(X_0 < 0 \mid X_{-m} \geq x) &\leq \frac{\mathbf{P}(\sum b_j \xi_{-m-j} \geq x)}{\mathbf{P}(X_{-m} \geq x)} \\ &\leq \frac{\mathbf{P}(\sum_{|j| \leq j_2} b_j \xi_{-m-j} \geq (1 - \lambda t_{j_2})x)}{\mathbf{P}(X_{-m} \geq x)} + \frac{\mathbf{P}(\sum_{|j| > j_2} b_j \xi_{-m-j} \geq \lambda t_{j_2} x)}{\mathbf{P}(X_{-m} \geq x)} = S_1 + S_2, \end{aligned} \quad (5)$$

где j_2 выбирается достаточно большим так, чтобы слагаемое S_2 стремилось к нулю при $x \rightarrow \infty$. Докажем, что такое j_2 существует. Пусть $f_j = \ln |j|$, если выполнено условие 3), и $f_j = |j|^\delta$, если выполнено 3'). Тогда $c_f := \sum_{j \neq 0} a_j f_j < \infty$ и для каждого m существуют такие $K \in \mathbf{N}$ и $c_4 > 0$, что $f_j t_j \geq c_4 \ln |j|$, если $|j| \geq K$. Положим

$$j_2 := \max \left\{ K, j_1 + m, \exp \left\{ \frac{c_f}{\lambda c_4 a_{-m-j_0}} \right\} \right\}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \mathbf{P} \left(\sum_{|j| > j_2} b_j \xi_{-m-j} \geq \lambda t_{j_2} x \right) &\leq \mathbf{P} \left(\sum_{|j| > j_2} b_j \xi_{-m-j} \geq \lambda t_{j_2} x \sum_{|j| > j_2} \frac{a_j f_j}{c_f} \right) \\ &\leq \sum_{|j| > j_2} \mathbf{P} \left(b_j \xi_{-m-j} \geq \lambda \frac{a_j f_j}{c_f} t_{j_2} x \right) \leq c_0 \sum_{|j| > j_2} \mathbf{P} \left(\xi_{j_0} \geq \lambda \frac{f_j}{c_f} t_{j_2} x \right) \\ &\leq c_0 \sum_{|j| > j_2} \mathbf{P} \left(\xi_{j_0} \geq \frac{\lambda c_4 \ln |j|}{c_f} x \right) \\ &\leq c_0 \mathbf{P} \left(\xi_{j_0} \geq \frac{x}{a_{-m-j_0}} \right) \sum_{|j| > j_2} c_1 \exp \left\{ -c_2 \left(\frac{\lambda c_4 \ln |j|}{c_f} - \frac{1}{a_{-m-j_0}} \right) x \right\}, \end{aligned}$$

где ряд $\sum_{|j| > j_2}$ не превосходит величины

$$\frac{2c_1 c_f j_2}{\lambda c_2 c_4} \frac{1}{x} \exp \left\{ -c_2 \left(\frac{\lambda c_4 \ln j_2}{c_f} - \frac{1}{a_{-m-j_0}} \right) x \right\} \rightarrow 0 \quad \text{при } x \rightarrow \infty.$$

Кроме того,

$$\mathbf{P} \left(\xi_{j_0} \geq \frac{x}{a_{-m-j_0}} \right) \leq \frac{\mathbf{P}(X_{-m} \geq x)}{\mathbf{P}(\sum_{j \neq j_0} a_{-m-j} \xi_j \geq 0)}.$$

Поэтому $S_2 \rightarrow 0$ при $x \rightarrow \infty$.

Покажем, что $\liminf_{x \rightarrow \infty} S_1 = 0$. Представим S_1 в виде произведения

$$\frac{\mathbf{P}(\sum_{|j| \leq j_2} b_j \xi_{-m-j} \geq (1 - \lambda t_{j_2})x)}{\mathbf{P}(\sum_{|j| \leq j_2} b_j \xi_{-m-j} \geq (1 - q^m t_{j_2})x)} \cdot \frac{\mathbf{P}(\sum_{|j| \leq j_2} b_j \xi_{-m-j} \geq (1 - q^m t_{j_2})x)}{\mathbf{P}(\sum_{j \in \mathbf{Z}} a_j \xi_{-m-j} \geq x)}. \quad (6)$$

Нижний предел первого множителя в (6) равен нулю, так как $1 - \lambda t_{j_2} > 1 - q^m t_{j_2}$ и в силу неравенства

$$g(x) := \mathbf{P} \left(\sum_{|j| \leq j_2} b_j \xi_{-m-j} \geq x \right) \leq \sum_{|j| \leq j_2} \mathbf{P} \left(\xi_{-m-j} \geq \frac{1}{(2j_2 + 1)b_j} x \right)$$

функция $g(x)$ удовлетворяет условию следующей леммы: если функция $g: \mathbf{R}_+ \rightarrow \mathbf{R}$ положительна, монотонно убывает и $g(x)e^{cx} \rightarrow 0$ при $x \rightarrow \infty$ для некоторого $c > 0$, то для любого $a > 0$ выполнено равенство $\liminf_{x \rightarrow \infty} g(ax)/g(x) = 0$.

Второй множитель в (6) ограничен по x . Индукцией по k докажем, что для любого k найдется такая константа d_k , что

$$\mathbf{P} \left(\sum_{j \in J} b_j \xi_{-m-j} \geq (1 - q^m t_{j_2})x \right) \leq d_k \mathbf{P} \left(\sum_{j \in \mathbf{Z}} a_j \xi_{-m-j} \geq x \right) \quad \text{для всех } x \geq 0,$$

где $J \subset \{-j_2, -j_2 + 1, \dots, j_2\}$ и содержит не более k элементов. Для всех $|j| \leq j_2$ выполнено

$$\frac{b_j}{a_j} = 1 - \alpha \frac{a_{m+j}}{a_j} \leq 1 - q^m t_{j_2} < 1 - \lambda t_{j_2}.$$

При $k = 1$ для любого $|i| \leq j_2$ имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(b_i \xi_{-m-i} \geq (1 - q^m t_{j_2})x) &\leq \mathbf{P}(a_i \xi_{-m-i} \geq x) \leq \frac{\mathbf{P}(\sum_{j \in \mathbf{Z}} a_j \xi_{-m-j} \geq x)}{\mathbf{P}(\sum_{j \in \mathbf{Z} \setminus \{i\}} a_j \xi_{-m-j} \geq 0)}, \\ d_1 &:= \max_{|i| \leq j_2} \left\{ \left(\mathbf{P} \left(\sum_{j \in \mathbf{Z} \setminus \{i\}} a_{-j} \xi_j \geq 0 \right) \right)^{-1} \right\}. \end{aligned}$$

Если d_{k-1} существует и J содержит k элементов, то справедлива следующая оценка:

$$\begin{aligned} \mathbf{P} \left(\sum_{j \in J} b_j \xi_{-m-j} \geq (1 - q^m t_{j_2})x \right) &\leq \sum_{i \in J} \mathbf{P} \left(\sum_{j \in J} b_j \xi_{-m-j} \geq (1 - q^m t_{j_2})x, \xi_{-m-i} < 0 \right) \\ &+ \mathbf{P} \left(\sum_{j \in J} b_j \xi_{-m-j} \geq (1 - q^m t_{j_2})x, \xi_{-m-j} \geq 0 \forall j \in J \right) \\ &\leq \sum_{i \in J} \mathbf{P} \left(\sum_{j \in J \setminus \{i\}} b_j \xi_{-m-j} \geq (1 - q^m t_{j_2})x \right) + \mathbf{P} \left(\sum_{j \in J} a_j \xi_{-m-j} \geq x \right) \\ &\leq k d_{k-1} \mathbf{P} \left(\sum_{j \in \mathbf{Z}} a_j \xi_{-m-j} \geq x \right) + \frac{\mathbf{P}(\sum_{j \in \mathbf{Z}} a_j \xi_{-m-j} \geq x)}{\mathbf{P}(\sum_{j \in \mathbf{Z} \setminus J} a_j \xi_{-m-j} \geq 0)}. \end{aligned}$$

Следовательно, существует и d_k , поскольку

$$d_k = k d_{k-1} + \max_{\tilde{J} \subset \{-j_2, \dots, j_2\}, \# \tilde{J} = k} \left\{ \left(\mathbf{P} \left(\sum_{j \in \mathbf{Z} \setminus \tilde{J}} a_{-j} \xi_j \geq 0 \right) \right)^{-1} \right\}.$$

Таким образом, доказано, что $\liminf_{x \rightarrow \infty} S_1 = 0$, и из (5) следует (4).

В рассматриваемом случае условие равномерного сильного перемешивания не выполнено, так как функция $\varphi(m)$ ограничена снизу:

$$\begin{aligned} \varphi(m) &\geq \sup_x \left| \mathbf{P}(X_0 < 0 | X_{-m} \geq x) - \mathbf{P}(X_0 < 0) \right| \\ &\geq \liminf_{x \rightarrow \infty} \left| \mathbf{P}(X_0 < 0 | X_{-m} \geq x) - \mathbf{P}(X_0 < 0) \right| = \mathbf{P}(X_0 < 0) > 0. \end{aligned}$$

Теорема 1 доказана.

Доказательство теоремы 2. Множество $\{a_j: a_j \neq 0, j < 0\}$ содержит бесконечно много коэффициентов a_j одного знака. Можно считать, что они положительны, так как смена знака не влияет на коэффициент перемешивания. Сдвиг последовательности вида $\tilde{X}_k = X_{k+k_0-j_0} = \sum a_{k+k_0-j} \xi_{j+j_0}$ также не влияет на коэффициент перемешивания, поэтому можно считать, что $a_0 > 0$ и ξ_0 — невырожденная центрированная случайная величина, не зависящая от остальных ξ_j . Тогда для некоторого $\delta > 0$ будут выполнены неравенства $\mathbf{P}(\xi_0 > \delta) > 0$, $\mathbf{P}(\xi_0 < -\delta) > 0$.

Пусть целое число m таково, что $a_{-m} > 0$, и пусть y_0 — нижняя граница носителя распределения величины $\sum_{j \neq 0} a_{-j} \xi_j$, а x_m — верхняя граница для величины $\sum_{j \neq 0} a_{-m-j} \xi_j$. Тогда

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(X_{-m} \geq x_m) &\geq \mathbf{P} \left(\sum_{j \neq 0} a_{-m-j} \xi_j \geq x_m - \delta a_{-m} \right) \mathbf{P}(a_{-m} \xi_0 > \delta a_{-m}) \neq 0, \\ \mathbf{P}(X_0 < y_0) &\geq \mathbf{P} \left(\sum_{j \neq 0} a_{-j} \xi_j < y_0 + \delta a_0 \right) \mathbf{P}(a_0 \xi_0 < -\delta a_0) \neq 0, \end{aligned}$$

$$\{X_{-m} \geq x_m\} \subset \left\{ \xi_0 = \frac{1}{a_{-m}} \left(X_{-m} - \sum_{j \neq 0} a_{-m-j} \xi_j \right) \geq 0 \right\},$$

$$\{X_0 < y_0\} \subset \left\{ \xi_0 = \frac{1}{a_0} \left(X_0 - \sum_{j \neq 0} a_{-j} \xi_j \right) < 0 \right\}.$$

Коэффициент φ -перемешивания не стремится к нулю с ростом m , так как $\varphi(m) \geq |\mathbf{P}(X_0 < y_0 | X_{-m} \geq x_m) - \mathbf{P}(X_0 < y_0)| = \mathbf{P}(X_0 < y_0)$. Теорема 2 доказана.

Доказательство теоремы 3. Можно считать, что $a_0 \neq 0$ и $a_j = 0$ при всех $j < 0$. Пусть $G := (g_{k,j})_{k,j \in \mathbf{Z}}$ — оператор, обратный к L , при этом $g_{k,j} := g_{k-j}$, $g_{k-j} = 0$ при $k < j$. Определим операторы $G^{(n)}$, $L^{(n)}: \mathbf{R}^{n+1} \rightarrow \mathbf{R}^{n+1}$ их матрицами

$$L^{(n)} := \begin{pmatrix} a_0 & 0 & \dots & 0 \\ a_1 & a_0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_n & a_{n-1} & \dots & a_0 \end{pmatrix}, \quad G^{(n)} := \begin{pmatrix} g_0 & 0 & \dots & 0 \\ g_1 & g_0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ g_n & g_{n-1} & \dots & g_0 \end{pmatrix}.$$

При этом $G^{(n)}$ является обратным к $L^{(n)}$ и $\|G^{(n)}\| \leq \|G\|$. Нам достаточно доказать, что существует функция $\tilde{\varphi}$ такая, что $\tilde{\varphi}(m) \rightarrow 0$ при $m \rightarrow \infty$ и

$$\frac{|\mathbf{P}(A \cap B) - \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B)|}{\mathbf{P}(A)} \leq \tilde{\varphi}(m) \quad (7)$$

для любых событий $A \in \sigma\{X_k, k \leq k_0\}$ с условием $\mathbf{P}(A) \neq 0$ и событий $B = \bigcap_{k=k_0+m}^{k_0+m+M} \{X_k \in B_k\}$, где B_k — любые борелевские множества, k_0 — любое целое, M — любое натуральное число.

Обозначим $m_1 := k_0 + m$, $m_2 := k_0 + m + M$. Для $m_1 \leq k \leq m_2$ введем случайные величины $Y_k := \sum_{j=k_0+1}^k a_{k-j} \xi_j$ и множество $D := \bigcap_{k=m_1}^{m_2} \{Y_k \in B_k\}$ и сначала оценим величину $|\mathbf{P}(A \cap B) - \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(D)|$. Так как $A \in \mathcal{F}_{-\infty}^{m_1-1} := \sigma\{\xi_j, j \leq m_1 - 1\}$, то

$$\begin{aligned} & |\mathbf{P}(A \cap B) - \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(D)| \\ &= \left| \mathbf{E} \left(\mathbf{E}(I_A I_B - I_A I_D | \mathcal{F}_{-\infty}^{m_1-1}) \right) \right| = \left| \mathbf{E} \left(I_A \mathbf{E}(I_B - I_D | \mathcal{F}_{-\infty}^{m_1-1}) \right) \right| \\ &\leq \mathbf{P}(A) \operatorname{ess\,sup} \left| \mathbf{E}(I_B | \mathcal{F}_{-\infty}^{m_1-1}) - \mathbf{E}(I_D | \mathcal{F}_{-\infty}^{m_1-1}) \right|, \end{aligned} \quad (8)$$

где I_A, I_B, I_D — индикаторы соответствующих множеств. Имеем:

$$\begin{aligned} I_1 &:= \operatorname{ess\,sup} \left| \mathbf{E}(I_B | \mathcal{F}_{-\infty}^{m_1-1}) - \mathbf{E}(I_D | \mathcal{F}_{-\infty}^{m_1-1}) \right| \\ &\leq \sup \left| \int I \left(\bigcap_{k=m_1}^{m_2} \left\{ \sum_{j=-\infty}^{m_1-1} a_{k-j} v_j + \sum_{j=m_1}^k a_{k-j} \tilde{y}_j \in B_k \right\} \right) \prod_{j=m_1}^{m_2} p_j(\tilde{y}_j) d\tilde{y}_j \right. \\ &\quad \left. - \int I \left(\bigcap_{k=m_1}^{m_2} \left\{ \sum_{j=k_0+1}^{m_1-1} a_{k-j} v_j + \sum_{j=m_1}^k a_{k-j} y_j \in B_k \right\} \right) \prod_{j=m_1}^{m_2} p_j(y_j) dy_j \right|, \end{aligned} \quad (9)$$

где супремум берется по множеству последовательностей v_j таких, что $\|v_j\|_q < C$. Сделаем замену переменных в первом интеграле правой части (9) по формуле $y_k = \tilde{y}_k + w_k$, $m_1 \leq k \leq m_2$, где

$$(w_{m_1}, w_{m_1+1}, \dots, w_{m_2})^T = G^{(M)}(z_{m_1}, z_{m_1+1}, \dots, z_{m_2})^T, \quad z_k := \sum_{j \leq k_0} a_{k-j} v_j,$$

при этом w_k удовлетворяют условию

$$\sum_{k=m_1}^{m_2} |w_k| \leq \|G\| \sum_{k=m_1}^{m_2} |z_k| \leq \|G\| \sum_{k=k_0+m}^{m_2} \left| \sum_{j \leq k_0} a_{k-j} v_j \right| \leq S(m),$$

где $S(m)$ определяется формулами:

$$S(m) = C \|G\| \sum_{k \geq m} \left(\sum_{j \geq k} |a_j|^p \right)^{1/p}, \quad \text{если } p < \infty,$$

$$S(m) = C \|G\| \sum_{k \geq m} \sup_{j \geq k} |a_j|, \quad \text{если } p = \infty.$$

Из равенств $w_k + \tilde{y}_k = y_k$, $m_1 \leq k \leq m_2$, следует, что

$$\sum_{j \leq k_0} a_{k-j} v_j + \sum_{m_1 \leq j \leq k} a_{k-j} \tilde{y}_j = \sum_{m_1 \leq j \leq k} a_{k-j} y_j,$$

поэтому после замены переменных аргументы индикаторных функций в (9) совпадают, а стало быть,

$$\begin{aligned} I_1 &\leq \sup_{\sum |w_j| < S(m)} \int \left| \prod_{j=m_1}^{m_2} p_j(y_j - w_j) - \prod_{j=m_1}^{m_2} p_j(y_j) \right| \prod_{j=m_1}^{m_2} dy_j \\ &\leq \sup_{\sum |w_j| < S(m)} \sum_{j=m_1}^{m_2} \int |p_j(y_j - w_j) - p_j(y_j)| dy_j \\ &\leq C_1 \sup_{\sum |w_j| < S(m)} \sum_{j=m_1}^{m_2} |w_j| \leq C_1 S(m). \end{aligned}$$

Таким образом, из (8) следует $|\mathbf{P}(A \cap B) - \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(D)| \leq \mathbf{P}(A)C_1 S(m)$. Так как это верно для любого множества $A \in \sigma\{X_k, k \leq k_0\}$, то из этого неравенства также следует, что $|\mathbf{P}(B) - \mathbf{P}(D)| \leq C_1 S(m)$ и

$$\frac{|\mathbf{P}(A \cap B) - \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B)|}{\mathbf{P}(A)} \leq \frac{|\mathbf{P}(A \cap B) - \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(D)|}{\mathbf{P}(A)} + |\mathbf{P}(D) - \mathbf{P}(B)| \leq 2C_1 S(m),$$

т.е. (7) выполнено с $\tilde{\varphi}(m) = 2C_1 S(m)$. Теорема 3 доказана.

В заключение автор хотел бы поблагодарить профессора И. С. Борисова за постановку задачи и внимание к работе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Andrews D. W. K. Nonstrong mixing autoregressive processes. — J. Appl. Probab., 1984, v. 21, № 4, p. 930–934.
2. Колмогоров А. Н., Розанов Ю. А. Об условиях сильного перемешивания гауссовского стационарного процесса. — Теория вероятн. и ее примен., 1960, т. 5, в. 2, с. 222–227.
3. Ибрагимов И. А., Линник Ю. В. Независимые и стационарно связанные величины. М.: Наука, 1965, 524 с.
4. Chanda K. C. Strong mixing properties of linear stochastic processes. — J. Appl. Probab., 1974, v. 11, № 2, p. 401–408.
5. Городецкий В. В. О свойстве сильного перемешивания для линейно порожденных последовательностей. — Теория вероятн. и ее примен., 1977, т. 22, в. 2, с. 421–423.
6. Doukhan P. Mixing: Properties and Examples. New York: Springer-Verlag, 1994, 142 p. (Lecture Notes in Statistics, v. 85.)
7. Ибрагимов И. А., Розанов Ю. А. Гауссовские случайные процессы. М.: Наука, 1970, 384 с.
8. Rosenblatt M. A central limit theorem and a strong mixing condition. — Proc. Natl. Acad. Sci. USA, 1956, v. 42, p. 43–47.

Поступила в редакцию
21.V.2007

Исправленный вариант
25.VIII.2008