Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Сюлюкин, О квазинеравномерных оценках остаточных частей для разложения Бергстрема–Чебышева, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2009, том 54, выпуск 2, 391–399

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp2717>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.89.185.249

26 апреля 2023 г., 14:15:17

4. Тюрин Ю. Н. Многомерный анализ: геометрическая теория. — Теория вероятн. и ее примен. (в печати).
5. Bilodeau M., Brenner D. Theory of Multivariate Statistics. New York: Springer-Verlag, 1999, 288 p.
6. Магнус Я. Р., Нейдеккер Х. Матричное дифференциальное исчисление с приложениями к статистике и эконометрике. М.: Физматлит, 2002, 496 с.
7. Hotelling H. Relation between two sets of variables. — Biometrika, 1936, v. 28, p. 321–377.
8. Scharf L. L., Mullis C. T. Canonical coordinates and the geometry of inference, rate, and capacity. — IEEE Trans. Signal Process., 2000, v. 48, p. 824–830.
9. Хорн Р., Джонсон Ч. Матричный анализ. М.: Мир, 1989, 655 с.

Поступила в редакцию
11.III.2008

© 2009 г.

СЮЛЮКИН А. В.*

О КВАЗИНЕРАВНОМЕРНЫХ ОЦЕНКАХ ОСТАТОЧНЫХ ЧАСТЕЙ ДЛЯ РАЗЛОЖЕНИЯ БЕРГСТРЁМА–ЧЕБЫШЁВА

Получено несколько квазинеравномерных оценок остаточных частей разложения Бергстрёма–Чебышёва для плотностей нормированных сумм n независимых одинаково распределённых случайных величин, т.е. таких оценок, у которых равномерные части убывают при $n \rightarrow \infty$ быстрее, чем неравномерные части.

Ключевые слова и фразы: центральная предельная теорема, асимптотические разложения, точность аппроксимации, неравномерные оценки.

Пусть P — распределение вероятностей на $\mathbf{R}$ с нулевым средним и единичной дисперсией, $P(x)$ — функция распределения меры P , $P_n(x)$ — функция распределения меры $P^{*n}(\sqrt{n}A)$, где $A \in \mathcal{R}(\mathbf{R})$, $\Phi(x)$ — функция распределения стандартного нормального закона. Хорошо известна неравномерная оценка в центральной предельной теореме

$$|P_n(x) - \Phi(x)| \leq \frac{C\beta_3}{(1 + |x|^3)\sqrt{n}},$$

где β_3 — третий абсолютный момент распределения P и $C \leq 31.94$ (см. [4]).

Известна неравномерная оценка Л. В. Осипова остаточного члена асимптотического разложения Эджворта–Крамера

$$\begin{aligned} & \left| P_n(x) - \Phi(x) - \sum_{l=1}^{k-2} \frac{\Gamma_l(x)}{n^{l/2}} \right| \\ & \leq C(k) \left\{ \frac{1}{n^{(k-2)/2}(1 + |x|)^k} \int_{|y| \geq \sqrt{n}(1 + |x|)} |y|^k dP(y) \right. \\ & \quad + \frac{1}{n^{(k-1)/2}(1 + |x|)^{k+1}} \int_{|y| < \sqrt{n}(1 + |x|)} |y|^{k+1} dP(y) \\ & \quad \left. + \left(\sup_{|t| \geq 1/(12\beta_3)} |f(t)| + \frac{1}{2n} \right)^n \frac{n^{k(k+1)/2}}{(1 + |x|)^{k+1}} \right\}, \end{aligned}$$

* Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, механико-математический факультет, кафедра теории вероятностей, Ленинские горы 1, 119992 Москва, Россия; e-mail: syulyukin@yandex.ru

которая справедлива для $k \geq 3$ при некоторых ограничениях на распределение P (см. [1, с. 197, гл. 6, § 3, теорема 1]). Величина $C(k)$ в оценке зависит только от числа k , а численная мажоранта для $C(k)$ при подсчете получается слишком большой и обычно не указывается. Поэтому приведенная оценка мало пригодна для расчетов.

В данной работе мы постараемся приблизиться к решению задачи о нахождении «хороших» неравномерных оценок для асимптотических разложений в центральной предельной теореме. Мы получим несколько квазинеравномерных оценок остаточных частей разложения Бергстрёма–Чебышёва для плотностей (определение см. в [3]) с подсчетом всех констант, входящих в эти оценки. Квазинеравномерными мы будем называть оценки, у которых одна часть слагаемых не зависит от x , но убывает при $n \rightarrow \infty$ быстрее, чем другая часть слагаемых, которая зависит от x и определяет порядок убывания по n .

Нам понадобятся следующие обозначения: $p_n(x)$ — плотность (если она существует), соответствующая распределению $P^{*n}(\sqrt{n}A)$, $A \in \mathcal{R}(\mathbf{R})$; $Q(x) = P(x) - \Phi(x)$; $\varphi(x)$ — плотность стандартного нормального закона; $\varphi_D(x)$ — плотность нормального закона с нулевым средним и дисперсией D ,

$$\begin{aligned}\Delta_j &= \int_{-\infty}^{\infty} x^j dQ(x), \quad j \in \mathbf{Z}_+, \\ |\Delta|_j &= \int_{-\infty}^{\infty} |x|^j dQ(x), \quad j \in \mathbf{Z}_+, \\ B_k^j &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |t|^j e^{-t^2 k/(2n)} dt, \quad j \in \mathbf{Z}_+, \quad k, n \in \mathbf{N}, \\ \psi_k^j(x) &= \max_{y \geq |x|} |\varphi_{k/n}^{(j)}(y)|, \quad j \in \mathbf{Z}_+, \quad k, n \in \mathbf{N}.\end{aligned}$$

Отметим, что величина $|\Delta|_j$ — это расстояние полной вариации с весом $|x|^j$. Числа B_k^j зависят и от n , но для краткости мы эту зависимость указывать не будем. Также отметим, что функции $\varphi_{k/n}^{(j)}(x)$ — производные порядка j функций $\varphi_{k/n}(x)$ — можно представить в виде произведений многочленов Чебышёва–Эрмита порядка j и функций $\varphi_{k/n}(x)$, но такое представление нам не понадобится. Функции $\psi_k^j(x)$ экспоненциально убывают при $|x| \rightarrow \infty$.

Предположим, что для характеристической функция $f(t)$ распределения P выполнено условие

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^\nu dt < \infty \quad (1)$$

для некоторого $\nu > 0$. Пусть функция $\mu(t)$, $e^{-t^2/2} \leq \mu(t) \leq 1$, и число $T > 0$ таковы, что

$$\mu(t) \geq |f(t)| \quad \text{для всех } |t| \leq T. \quad (2)$$

Обозначим

$$\begin{aligned}B_{n-m}^{j,\mu,T} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-T\sqrt{n}}^{T\sqrt{n}} |t|^j \mu^{n-m} \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right) dt, \quad \text{где } j \in \mathbf{Z}_+, \quad n, m \in \mathbf{N}, \quad n > m, \\ \alpha(T) &= \max_{t \geq T} (|f(t)|, e^{-t^2/2}).\end{aligned}$$

Отметим, что при выполнении условия (1) существует непрерывная плотность $p_n(x)$ при всех $n \geq \nu$, кроме того, $\alpha(T) < 1$ для любого $T > 0$. Также отметим, что для распределения P с нулевым средним, единичной дисперсией и конечным четвертым моментом пару μ, T всегда можно подобрать так, что $B_{n-m}^{j,\mu,T} \rightarrow B_n^j$ при $n \rightarrow \infty$ для любого фиксированного m (см. [2]).

Справедлива следующая теорема.

Теорема 1. Если четвертый момент распределения P с нулевым средним и единичной дисперсией конечен и выполнены условия (1), (2), то для $n > \nu + 3$ существует плотность $p_n(x)$ и верно разложение

$$p_n(x) = \varphi(x) - \frac{\Delta_3}{3!n^{1/2}}\varphi_{1-1/n}^{(3)}(x) + R_2,$$

где для любого x , не равного нулю,

$$\begin{aligned} |R_2| \leq & \frac{|\Delta|_4}{n} \left(\frac{\psi_{n-1}^4(x/2)}{4!} + \frac{2^4 B_{n-1}^0}{|x|^4} + \frac{2^4 \varphi_{1-1/n}(x)}{|x|^4} + \frac{2^3 |\varphi_{1-1/n}^{(1)}(x)|}{|x|^3} \right. \\ & \left. + \frac{2 |\varphi_{1-1/n}^{(2)}(x)|}{|x|^2} + \frac{|\varphi_{1-1/n}^{(3)}(x)|}{3|x|} \right) \\ & + C_n^2 \frac{\psi_{n-2}^6(x/2) |\Delta|_3^2}{(3!)^2 n^3} + 2C_n^2 \frac{B_{n-2}^6 |\Delta|_3 |\Delta|_4}{9n^{7/2} |x|} + 4C_n^2 \frac{B_{n-2}^6 |\Delta|_4^2}{9n^4 |x|^2} \\ & + C_n^3 \frac{|\Delta|_3^3 B_{n-9}^{9,\mu,T}}{(3!)^3 n^{9/2}} + \frac{8}{\pi} \sqrt{n} C_n^3 \alpha^{n-\nu-3}(T) \int_T^\infty \max^\nu(|f(t)|, e^{-t^2/2}) dt. \end{aligned}$$

З а м е ч а н и е 1. В приведенной оценке одна часть слагаемых имеет порядок $O(n^{-1}x^{-4})$ при $n \rightarrow \infty$, $|x| \rightarrow \infty$, а другая — порядок $O(n^{-3/2})$ при $n \rightarrow \infty$.

Нам понадобится следующая лемма (идея ее доказательства изложена в [3]).

Лемма 1. Если выполнены условия теоремы 1, то для $n > \nu + 3$ существует плотность $p_n(x)$ и верно разложение

$$p_n(x) = \varphi(x) - \frac{\Delta_3}{3!n^{1/2}}\varphi_{1-1/n}^{(3)}(x) + R_2,$$

где

$$\begin{aligned} R_2 = & \frac{1}{n} \int_{[0,1] \times \mathbf{R}} \frac{(1-\beta)^3}{3!} \varphi_{1-1/n}^{(4)}\left(x - \frac{\beta z}{n^{1/2}}\right) z^4 d\beta dQ(z) \\ & + \frac{C_n^2}{n^3} \int_{[0,1]^2 \times \mathbf{R}^2} \frac{(1-\beta_1)^2}{2!} \frac{(1-\beta_2)^2}{2!} \varphi_{1-2/n}^{(6)}\left(x - \frac{\beta_1 z_1 + \beta_2 z_2}{n^{1/2}}\right) \\ & \times z_1^3 z_2^3 d\beta_1 d\beta_2 dQ(z_1) dQ(z_2) + R_3^B \end{aligned}$$

и для любого x справедлива оценка

$$|R_3^B| \leq C_n^3 \frac{|\Delta|_3^3 B_{n-3}^{9,\mu,T}}{(3!)^3 n^{9/2}} + \frac{8}{\pi} \sqrt{n} C_n^3 \alpha^{n-\nu-3}(T) \int_T^\infty \max^\nu(|f(t)|, e^{-t^2/2}) dt. \quad (3)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о т е о р е м ы 1. Предположим, что $x > 0$ (доказательство в случае $x < 0$ аналогично). Обозначим

$$\begin{aligned} I_1 = & \frac{1}{n} \int_{[0,1] \times \mathbf{R}} \frac{(1-\beta)^3}{3!} \varphi_{1-1/n}^{(4)}\left(x - \frac{\beta z}{n^{1/2}}\right) z^4 d\beta dQ(z), \\ I_2 = & \frac{C_n^2}{n^3} \int_{[0,1]^2 \times \mathbf{R}^2} \frac{(1-\beta_1)^2}{2!} \frac{(1-\beta_2)^2}{2!} \varphi_{1-2/n}^{(6)}\left(x - \frac{\beta_1 z_1 + \beta_2 z_2}{n^{1/2}}\right) \\ & \times z_1^3 z_2^3 d\beta_1 d\beta_2 dQ(z_1) dQ(z_2). \end{aligned}$$

Для доказательства теоремы достаточно оценить величины I_1 и I_2 . Сначала оценим I_1 .

Представим I_1 в виде суммы двух слагаемых:

$$I_1 = \frac{1}{n} \int_{\beta \in [0,1], z \leq \sqrt{n}x/2} + \frac{1}{n} \int_{\beta \in [0,1], z > \sqrt{n}x/2} = I_1^1 + I_1^2.$$

Для первого слагаемого справедлива оценка

$$\begin{aligned} |I_1^1| &= \frac{1}{n} \int_{\beta \in [0,1], z \leq \sqrt{nx}/2} \frac{(1-\beta)^3}{3!} \left| \varphi_{1-1/n}^{(4)} \left(x - \frac{\beta z}{n^{1/2}} \right) \right| z^4 d\beta |dQ(z)| \\ &\leq \frac{\psi_{n-1}^4(x/2) |\Delta|_4}{4! n}. \end{aligned} \quad (4)$$

Чтобы оценить I_1^2 , вспомним, что, по формуле Тейлора с остаточным членом в интегральной форме,

$$\begin{aligned} \frac{1}{n^2} \int_0^1 \frac{(1-\beta)^3}{3!} \varphi_{1-1/n}^{(4)} \left(x - \frac{\beta z}{n^{1/2}} \right) z^4 d\beta &= \varphi_{1-1/n} \left(x - \frac{z}{n^{1/2}} \right) - \varphi_{1-1/n}(x) \\ &\quad + \frac{z}{n^{1/2}} \varphi_{1-1/n}^{(1)}(x) - \frac{z^2}{2! n} \varphi_{1-1/n}^{(2)}(x) \\ &\quad + \frac{z^3}{3! n^{3/2}} \varphi_{1-1/n}^{(3)}(x), \end{aligned}$$

поэтому

$$\begin{aligned} I_1^2 &= n \int_{z > \sqrt{nx}/2} \left\{ \varphi_{1-1/n} \left(x - \frac{z}{n^{1/2}} \right) - \varphi_{1-1/n}(x) + \frac{z}{n^{1/2}} \varphi_{1-1/n}^{(1)}(x) \right. \\ &\quad \left. - \frac{z^2}{2! n} \varphi_{1-1/n}^{(2)}(x) + \frac{z^3}{3! n^{3/2}} \varphi_{1-1/n}^{(3)}(x) \right\} dQ(z). \end{aligned}$$

Так как $(z/(\sqrt{nx}/2))^i \geq 1$ при $z \geq \sqrt{nx}/2$, $i \in \mathbf{N}$, то

$$\begin{aligned} |I_1^2| &\leq n \int_{\sqrt{nx}/2}^\infty \left\{ \frac{2^4 z^4 \varphi_{1-1/n}(x - z/\sqrt{n})}{n^2 x^4} + \frac{2^4 z^4 \varphi_{1-1/n}(x)}{n^2 x^4} + \frac{2^3 z^4 |\varphi_{1-1/n}^{(1)}(x)|}{n^2 x^3} \right. \\ &\quad \left. + \frac{2^2 z^4 |\varphi_{1-1/n}^{(2)}(x)|}{2! n^2 x^2} + \frac{2 z^4 |\varphi_{1-1/n}^{(3)}(x)|}{3! n^2 x} \right\} |dQ(z)| \\ &\leq \frac{2^4 B_{n-1}^0 |\Delta|_4}{n x^4} + \frac{2^4 \varphi_{1-1/n}(x) |\Delta|_4}{n x^4} + \frac{2^3 |\varphi_{1-1/n}^{(1)}(x)| |\Delta|_4}{n x^3} \\ &\quad + \frac{2^2 |\varphi_{1-1/n}^{(2)}(x)| |\Delta|_4}{2! n x^2} + \frac{2 |\varphi_{1-1/n}^{(3)}(x)| |\Delta|_4}{3! n x}. \end{aligned} \quad (5)$$

Сумма правых частей неравенств (4) и (5) оценивает I_1 .

Теперь оценим величину I_2 , которую можно представить в виде

$$I_2 = \frac{C_n^2}{n^3} \int_{A_1} + \int_{A_2} + \int_{A_3} + \int_{A_4} = I_2^1 + I_2^2 + I_2^3 + I_2^4,$$

где

$$\begin{aligned} A_1 &= \left\{ \beta_1, \beta_2 \in [0, 1], z_1 \leq \frac{\sqrt{nx}}{4}, z_2 \leq \frac{\sqrt{nx}}{4} \right\}, \\ A_2 &= \left\{ \beta_1, \beta_2 \in [0, 1], z_1 \leq \frac{\sqrt{nx}}{4}, z_2 > \frac{\sqrt{nx}}{4} \right\}, \\ A_3 &= \left\{ \beta_1, \beta_2 \in [0, 1], z_1 > \frac{\sqrt{nx}}{4}, z_2 \leq \frac{\sqrt{nx}}{4} \right\}, \\ A_4 &= \left\{ \beta_1, \beta_2 \in [0, 1], z_1 > \frac{\sqrt{nx}}{4}, z_2 > \frac{\sqrt{nx}}{4} \right\}. \end{aligned}$$

Легко видеть, что

$$\begin{aligned} |I_2^1| &= \frac{C_n^2}{n^3} \left| \int_{A_1} \frac{(1-\beta_1)^2}{2!} \frac{(1-\beta_2)^2}{2!} \varphi_{1-2/n}^{(6)} \left(x - \frac{\beta_1 z_1 + \beta_2 z_2}{n^{1/2}} \right) \right. \\ &\quad \left. \times z_1^3 z_2^3 d\beta_1 d\beta_2 dQ(z_1) dQ(z_2) \right| \leq C_n^2 \frac{\psi_{n-2}^6(x/2) |\Delta|_3^2}{(3!)^2 n^3}. \end{aligned} \quad (6)$$

Так как $z_2/(n^{1/2}x/4) \geq 1$ при $z_2 \geq n^{1/2}x/4$, то

$$\begin{aligned} |I_2^2 + I_2^3| &= 2|I_2^2| = 2 \frac{C_n^2}{n^3} \left| \int_{A_2} \frac{(1-\beta_1)^2}{2!} \frac{(1-\beta_2)^2}{2!} \varphi_{1-2/n}^{(6)} \left(x - \frac{\beta_1 z_1 + \beta_2 z_2}{n^{1/2}} \right) \right. \\ &\quad \left. \times z_1^3 z_2^3 d\beta_1 d\beta_2 dQ(z_1) dQ(z_2) \right| \\ &\leq 2 \frac{C_n^2}{n^3} \left| \int_{A_2} \frac{(1-\beta_1)^2}{2!} \frac{(1-\beta_2)^2}{2!} \varphi_{1-2/n}^{(6)} \left(x - \frac{\beta_1 z_1 + \beta_2 z_2}{n^{1/2}} \right) \right. \\ &\quad \left. \times \frac{4z_1^3 z_2^4}{n^{1/2}x} d\beta_1 d\beta_2 dQ(z_1) dQ(z_2) \right| \\ &\leq 2C_n^2 \frac{4B_{n-2}^6 |\Delta|_3 |\Delta|_4}{(3!)^2 n^{7/2} |x|}. \end{aligned} \quad (7)$$

Также легко получить, что

$$|I_2^4| \leq C_n^2 \frac{4^2 B_{n-2}^6 |\Delta|_4^2}{(3!)^2 n^4 |x|^2}. \quad (8)$$

Собирая вместе правые части (6)–(8), получаем оценку для I_2 , а сумма правых частей неравенств (3)–(8) дает оценку остатка в теореме 1.

Теорема 2. Пусть выполнены условия теоремы 1, тогда верна следующая, более точная в смысле убывания по x , оценка для величины R_2 :

$$\begin{aligned} |R_2| &\leq \frac{|\Delta|_4}{n} \left(\frac{\psi_{n-1}^4(x/2)}{4!} + \frac{2^4 B_{n-1}^0}{|x|^4} + \frac{2^4 \varphi_{1-1/n}(x)}{|x|^4} \right. \\ &\quad \left. + \frac{2^3 |\varphi_{1-1/n}(x)|}{|x|^3} + \frac{2 |\varphi_{1-1/n}^{(2)}(x)|}{|x|^2} + \frac{|\varphi_{1-1/n}^{(3)}(x)|}{3|x|} \right) \\ &\quad + C_n^2 \frac{\psi_{n-2}^6(x/2) |\Delta|_3^2}{(3!)^2 n^3} + C_n^2 \frac{|\Delta|_3 |\Delta|_4}{n^{7/2}} \left(\frac{4^4 B_{n-2}^3}{3|x|^4} + \frac{4^4 \psi_{n-2}^3(3x/4)}{3|x|^4} \right. \\ &\quad \left. + \frac{4^3 \psi_{n-2}^4(3x/4)}{3|x|^3} + \frac{4^2 \psi_{n-2}^5(3x/4)}{6|x|^2} \right) \\ &\quad + C_n^2 \frac{|\Delta|_4^2}{n^4} \left(3 \frac{4^8 B_{n-2}^0}{x^8} + \frac{4^8 \varphi_{1-2/n}(x)}{x^8} + 2 \frac{4^7 B_{n-2}^1}{x^7} + 2 \frac{4^7 |\varphi_{1-2/n}^{(1)}(x)|}{x^7} \right. \\ &\quad \left. + \frac{4^6 B_{n-2}^2}{x^6} + 3 \frac{4^6 |\varphi_{1-2/n}^{(2)}(x)|}{2x^6} + \frac{4^5 |\varphi_{1-2/n}^{(3)}(x)|}{x^5} + \frac{4^3 |\varphi_{1-2/n}^{(4)}(x)|}{x^4} \right) \\ &\quad + \frac{C_n^3 |\Delta|_3^3 B_{n-3}^{9,\mu,T}}{(3!)^3 n^{9/2}} + \frac{8}{\pi} \sqrt{n} C_n^3 \alpha^{n-\nu-3}(T) \int_T^\infty \max^\nu(|f(t)|, e^{-t^2/2}) dt. \end{aligned}$$

Нам понадобится следующая лемма (см. [3]).

Лемма 2. Пусть $\varphi_{a_i, D_i}^{(n_i)}(x)$ — производные порядков n_i нормальной плотности со средними a_i и дисперсиями D_i , где $n_i \in \mathbf{Z}_+$, $i = 1, 2$. Тогда

$$\left(\varphi_{a_1, D_1}^{(n_1)} * \varphi_{a_2, D_2}^{(n_2)} \right)(x) = \varphi_{a_1+a_2, D_1+D_2}^{(n_1+n_2)}(x).$$

Доказательство теоремы 2. Для доказательства теоремы мы уточним оценки для величин $I_2^2 + I_2^3 = 2I_2^2$ и I_2^4 из теоремы 1, а оценки для R_3^B , I_1 и I_2^1 оставим теми же, что в теореме 1.

Используя лемму 2 и формулу Тейлора, имеем

$$J = \int_{\beta_1, \beta_2 \in [0,1]} \frac{(1-\beta_1)^2}{2!} \frac{(1-\beta_2)^2}{2!} \varphi_{1-2/n}^{(6)} \left(x - \frac{\beta_1 z_1 + \beta_2 z_2}{n^{1/2}} \right) \frac{z_1^3 z_2^3}{n^3} d\beta_1 d\beta_2$$

$$\begin{aligned}
&= \left\{ \int_{\beta_1 \in [0,1]} \frac{(1-\beta_1)^2}{2!} \varphi_{(n-2)/(2n)}^{(3)} \left(x - \frac{\beta_1 z_1}{n^{1/2}} \right) \frac{z_1^3}{3! n^{3/2}} d\beta_1 \right\} \\
&\quad \times \left\{ \int_{\beta_2 \in [0,1]} \frac{(1-\beta_2)^2}{2!} \varphi_{(n-2)/(2n)}^{(3)} \left(x - \frac{\beta_2 z_2}{n^{1/2}} \right) \frac{z_2^3}{3! n^{3/2}} d\beta_2 \right\} \\
&= \left\{ \int_{\beta_1 \in [0,1]} \frac{(1-\beta_1)^2}{2!} \varphi_{(n-2)/(2n)}^{(3)} \left(x - \frac{\beta_1 z_1}{n^{1/2}} \right) \frac{z_1^3}{n^{3/2}} d\beta_1 \right\} \\
&\quad \times \left\{ \varphi_{(n-2)/(2n)} \left(x - \frac{z_2}{n^{1/2}} \right) - \varphi_{(n-2)/(2n)}(x) + \varphi_{(n-2)/(2n)}^{(1)}(x) \frac{z_2}{n^{1/2}} \right. \\
&\quad \left. - \varphi_{(n-2)/(2n)}^{(2)}(x) \frac{z_2^2}{2! n} \right\} \\
&= \int_{\beta_1 \in [0,1]} \frac{(1-\beta_1)^2}{2!} \left\{ \varphi_{1-2/n}^{(3)} \left(x - \frac{\beta_1 z_1}{n^{1/2}} - \frac{z_2}{n^{1/2}} \right) \frac{z_1^3}{n^{3/2}} - \varphi_{1-2/n}^{(3)} \left(x - \frac{\beta_1 z_1}{n^{1/2}} \right) \frac{z_1^3}{n^{3/2}} \right. \\
&\quad \left. + \varphi_{1-2/n}^{(4)} \left(x - \frac{\beta_1 z_1}{n^{1/2}} \right) \frac{z_1^3 z_2}{n^2} - \varphi_{1-2/n}^{(5)} \left(x - \frac{\beta_1 z_1}{n^{1/2}} \right) \frac{z_1^3 z_2^2}{2! n^{5/2}} \right\} d\beta_1.
\end{aligned}$$

Отсюда получаем, что

$$\begin{aligned}
|I_2^2 + I_2^3| &= 2|I_2^1| \leq 2C_n^2 \int_{z_1 \leq \sqrt{n}x/4, z_2 > \sqrt{n}x/4} |J| |dQ(z_1) dQ(z_2)| \\
&\leq 2C_n^2 \int_{z_1 \leq \sqrt{n}x/4, z_2 > \sqrt{n}x/4} \left\{ \left| \varphi_{1-2/n}^{(3)} \left(x - \frac{\beta_1 z_1}{n^{1/2}} - \frac{z_2}{n^{1/2}} \right) \frac{4^4 z_1^3 z_2^4}{3! n^{7/2} x^4} \right| \right. \\
&\quad + \left| \varphi_{1-2/n}^{(3)} \left(x - \frac{\beta_1 z_1}{n^{1/2}} \right) \frac{4^4 z_1^3 z_2^4}{3! n^{7/2} x^4} \right| + \left| \varphi_{1-2/n}^{(4)} \left(x - \frac{\beta_1 z_1}{n^{1/2}} \right) \frac{4^3 z_1^3 z_2^4}{3! n^{7/2} x^3} \right| \\
&\quad \left. + \left| \varphi_{1-2/n}^{(5)} \left(x - \frac{\beta_1 z_1}{n^{1/2}} \right) \frac{4^2 z_1^3 z_2^4}{2! 3! n^{7/2} x^2} \right| \right\} |dQ(z_1) dQ(z_2)| \\
&\leq C_n^2 \frac{4^4 B_{n-2} |\Delta|_3 |\Delta|_4}{3n^{7/2} |x|^4} + C_n^2 \frac{4^4 \psi_{n-2}^3 (3x/4) |\Delta|_3 |\Delta|_4}{3n^{7/2} x^4} \\
&\quad + C_n^2 \frac{4^3 \psi_{n-2}^4 (3x/4) |\Delta|_3 |\Delta|_4}{3n^{7/2} x^3} + C_n^2 \frac{4^2 \psi_{n-2}^5 (3x/4) |\Delta|_3 |\Delta|_4}{6n^{7/2} x^2}. \quad (9)
\end{aligned}$$

Осталось уточнить оценку для I_2^4 . Для этого представим величину J в следующем виде:

$$\begin{aligned}
J &= \left\{ \varphi_{(n-2)/(2n)} \left(x - \frac{z_1}{n^{1/2}} \right) - \varphi_{(n-2)/(2n)}(x) + \varphi_{(n-2)/(2n)}^{(1)}(x) \frac{z_1}{n^{1/2}} \right. \\
&\quad \left. - \varphi_{(n-2)/(2n)}^{(2)}(x) \frac{z_1^2}{2! n} \right\} \\
&\quad \times \left\{ \varphi_{(n-2)/(2n)} \left(x - \frac{z_2}{n^{1/2}} \right) - \varphi_{(n-2)/(2n)}(x) + \varphi_{(n-2)/(2n)}^{(1)}(x) \frac{z_2}{n^{1/2}} \right. \\
&\quad \left. - \varphi_{(n-2)/(2n)}^{(2)}(x) \frac{z_2^2}{2! n} \right\} \\
&= \varphi_{1-2/n} \left(x - \frac{z_1}{n^{1/2}} - \frac{z_2}{n^{1/2}} \right) - \varphi_{1-2/n} \left(x - \frac{z_1}{n^{1/2}} \right) \\
&\quad + \varphi_{1-2/n}^{(1)} \left(x - \frac{z_1}{n^{1/2}} \right) \frac{z_2}{n^{1/2}} - \varphi_{1-2/n}^{(2)} \left(x - \frac{z_1}{n^{1/2}} \right) \frac{z_2^2}{2! n} - \varphi_{1-2/n} \left(x - \frac{z_2}{n^{1/2}} \right) \\
&\quad + \varphi_{1-2/n}(x) - \varphi_{1-2/n}^{(1)}(x) \frac{z_2}{n^{1/2}} + \varphi_{1-2/n}^{(2)}(x) \frac{z_2^2}{2! n} + \varphi_{1-2/n}^{(1)} \left(x - \frac{z_1}{n^{1/2}} \right) \frac{z_1}{n^{1/2}} \\
&\quad - \varphi_{1-2/n}^{(1)}(x) \frac{z_1}{n^{1/2}} + \varphi_{1-2/n}^{(2)}(x) \frac{z_1 z_2}{n} - \varphi_{1-2/n}^{(3)}(x) \frac{z_1 z_2^2}{2! n^{3/2}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\varphi_{1-2/n}^{(2)}\left(x - \frac{z_2}{n^{1/2}}\right) \frac{z_1^2}{2!n} + \varphi_{1-2/n}^{(2)}(x) \frac{z_1^2}{2!n} - \varphi_{1-2/n}^{(3)}(x) \frac{z_1^2 z_2}{2!n^{3/2}} \\
& + \varphi_{1-2/n}^{(4)}(x) \frac{z_1^2 z_2^2}{(2!)^2 n^2}.
\end{aligned}$$

Легко видеть, что

$$\begin{aligned}
|I_2^4| & \leq C_n^2 \int_{z_1 > \sqrt{n}x/4, z_2 > \sqrt{n}x/4} |J| |dQ(z_1) dQ(z_2)| \\
& \leq C_n^2 \int_{z_1 > \sqrt{n}x/4, z_2 > \sqrt{n}x/4} \frac{z_1^4 z_2^4}{n^4} \\
& \quad \times \left(\left| \varphi_{1-2/n}\left(x - \frac{z_1}{n^{1/2}} - \frac{z_2}{n^{1/2}}\right) \frac{4^8}{x^8} \right| + \left| \varphi_{1-2/n}\left(x - \frac{z_1}{n^{1/2}}\right) \frac{4^8}{x^8} \right| \right. \\
& \quad + \left| \varphi_{1-2/n}^{(1)}\left(x - \frac{z_1}{n^{1/2}}\right) \frac{4^7}{x^7} \right| + \left| \varphi_{1-2/n}^{(2)}\left(x - \frac{z_1}{n^{1/2}}\right) \frac{4^6}{2!x^6} \right| \\
& \quad + \left| \varphi_{1-2/n}\left(x - \frac{z_2}{n^{1/2}}\right) \frac{4^8}{x^8} \right| + \left| \varphi_{1-2/n}(x) \frac{4^8}{x^8} \right| + \left| \varphi_{1-2/n}^{(1)}(x) \frac{4^7}{x^7} \right| \\
& \quad + \left| \varphi_{1-2/n}^{(2)}(x) \frac{4^6}{2!x^6} \right| + \left| \varphi_{1-2/n}^{(1)}\left(x - \frac{z_1}{n^{1/2}}\right) \frac{4^7}{x^7} \right| + \left| \varphi_{1-2/n}^{(1)}(x) \frac{4^7}{x^7} \right| \\
& \quad + \left| \varphi_{1-2/n}^{(2)}(x) \frac{4^6}{x^6} \right| + \left| \varphi_{1-2/n}^{(3)}(x) \frac{4^5}{2!x^5} \right| + \left| \varphi_{1-2/n}^{(2)}\left(x - \frac{z_2}{n^{1/2}}\right) \frac{4^6}{2!x^6} \right| \\
& \quad + \left| \varphi_{1-2/n}^{(2)}(x) \frac{4^6}{2!x^6} \right| + \left| \varphi_{1-2/n}^{(3)}(x) \frac{4^5}{2!x^5} \right| + \left| \varphi_{1-2/n}^{(4)}(x) \frac{4^4}{(2!)^2 x^4} \right| \Big) \\
& \quad \times |dQ(z_1) dQ(z_2)| \leq C_n^2 \frac{|\Delta|_4^2}{n^4} \\
& \quad \times \left(B_{n-2}^0 \frac{4^8}{x^8} + B_{n-2}^0 \frac{4^8}{x^8} + B_{n-2}^1 \frac{4^7}{x^7} + B_{n-2}^2 \frac{4^6}{2!x^6} \right. \\
& \quad + B_{n-2}^0 \frac{4^8}{x^8} + \varphi_{1-2/n}(x) \frac{4^8}{x^8} + |\varphi_{1-2/n}^{(1)}(x)| \frac{4^7}{x^7} + |\varphi_{1-2/n}^{(2)}(x)| \frac{4^6}{2!x^6} \\
& \quad + B_{n-2}^1 \frac{4^7}{x^7} + |\varphi_{1-2/n}^{(1)}(x)| \frac{4^7}{x^7} + |\varphi_{1-2/n}^{(2)}(x)| \frac{4^6}{x^6} + |\varphi_{1-2/n}^{(3)}(x)| \frac{4^5}{2!x^5} \\
& \quad + B_{n-2}^2 \frac{4^6}{2!x^6} + |\varphi_{1-2/n}^{(2)}(x)| \frac{4^6}{2!x^6} + |\varphi_{1-2/n}^{(3)}(x)| \frac{4^5}{2!x^5} + |\varphi_{1-2/n}^{(4)}(x)| \frac{4^4}{(2!)^2 x^4} \Big) \\
& \leq C_n^2 \frac{|\Delta|_4^2}{n^4} \left(3 \frac{4^8 B_{n-2}^0}{x^8} + \frac{4^8 \varphi_{1-2/n}(x)}{x^8} + 2 \frac{4^7 B_{n-2}^1}{x^7} + 2 \frac{4^7 |\varphi_{1-2/n}^{(1)}(x)|}{x^7} \right. \\
& \quad \left. + \frac{4^6 B_{n-2}^2}{x^6} + 3 \frac{4^6 |\varphi_{1-2/n}^{(2)}(x)|}{2x^6} + \frac{4^5 |\varphi_{1-2/n}^{(3)}(x)|}{x^5} + \frac{4^3 |\varphi_{1-2/n}^{(4)}(x)|}{x^4} \right). \quad (10)
\end{aligned}$$

Собирая вместе правые части неравенств (3)–(6), (9), (10), получим оценку для остаточной части R_2 из теоремы 2. Теорема доказана.

Приведем еще одну квазинеравномерную оценку для асимптотического разложения Бергстрёма–Чебышёва с остаточным членом порядка $O(n^{-3/2})$, $n \rightarrow \infty$.

Теорема 3. Если пятый момент распределения P с нулевым средним и единичной дисперсией конечен и выполнены условия (1), (2), то для $n > \nu + 4$ существует плотность $p_n(x)$ и верно разложение

$$p_n(x) = \varphi(x) - \frac{\Delta_3}{3!n^{1/2}} \varphi_{1-1/n}^{(3)}(x) + \frac{\Delta_4}{4!n} \varphi_{1-1/n}^{(4)}(x) + C_n^2 \frac{\Delta_3^2}{(3!)^2 n^3} \varphi_{1-2/n}^{(6)}(x) + R_3,$$

где для любого x , не равного нулю,

$$\begin{aligned}
 |R_3| \leq & \frac{|\Delta|^5}{n^{3/2}} \left(\frac{\psi_{n-1}^5(x/2)}{5!} + \frac{2^5 B_{n-1}^0}{|x|^5} + \frac{2^5 \varphi_{1-1/n}(x)}{|x|^5} + \frac{2^4 |\varphi_{1-1/n}^{(1)}(x)|}{|x|^4} \right. \\
 & \left. + \frac{4 |\varphi_{1-1/n}^{(2)}(x)|}{|x|^3} + \frac{2 |\varphi_{1-1/n}^{(3)}(x)|}{3|x|^2} + \frac{|\varphi_{1-1/n}^{(4)}(x)|}{12|x|} \right) \\
 & + C_n^2 \frac{\{\psi_{n-2}^7(x/2) + \psi_{n-2}^7(x/3)\} |\Delta|_3 |\Delta|_4}{3! 4! n^{7/2}} + C_n^3 \frac{\psi_{n-3}^9(x/4) |\Delta|_3^3}{(3!)^3 n^{9/2}} \\
 & + \frac{C_n^2}{n^4} \left(\frac{5 B_{n-2}^7 |\Delta|_3 |\Delta|_5}{3! 4! |x|} + \frac{3 B_{n-2}^7 |\Delta|_4^2}{3! 4! |x|} + \frac{9 B_{n-2}^7 |\Delta|_4 |\Delta|_5}{3! 4! |x|^2} \right) \\
 & + \frac{C_n^3}{n^5} \left(\frac{B_{n-3}^9 |\Delta|_3^2 |\Delta|_4}{18|x|} + \frac{2 B_{n-3}^9 |\Delta|_3 |\Delta|_4^2}{9n^4 |x|^2} + \frac{8 B_{n-3}^9 |\Delta|_4^3}{27n^4 |x|^3} \right) \\
 & + C_n^4 \frac{|\Delta|_3^4 B_{n-4}^{12, \mu, T}}{(3!)^4 n^6} + \frac{16}{\pi} \sqrt{n} C_n^4 \alpha^{n-\nu-4}(T) \int_T^\infty \max^\nu(|f(t)|, e^{-t^2/2}) dt. \quad (11)
 \end{aligned}$$

З а м е ч а н и е 2. В неравенстве (11) слагаемые из первых трех строк имеют порядок $O(n^{-3/2} x^{-5})$ при $n \rightarrow \infty$, $|x| \rightarrow \infty$, а оставшиеся слагаемые суть $O(n^{-2})$, $n \rightarrow \infty$.

Доказательство теоремы 3 мы опустим. Скажем лишь, что это доказательство аналогично доказательству теоремы 1 и основано на следующей лемме.

Лемма 3. Если выполнены условия теоремы 2, то для $n > \nu + 4$ существует плотность $p_n(x)$ и верно разложение

$$p_n(x) = \varphi(x) - \frac{\Delta_3}{3! n^{1/2}} \varphi_{1-1/n}^{(3)}(x) + \frac{\Delta_4}{4! n} \varphi_{1-1/n}^{(4)}(x) + C_n^2 \frac{\Delta_3^2}{(3!)^2 n^3} \varphi_{1-2/n}^{(6)}(x) + R_3,$$

где

$$\begin{aligned}
 R_3 = & \frac{1}{n^{3/2}} \int_{[0,1] \times \mathbf{R}} \frac{(1-\beta)^4}{4!} \varphi_{1-1/n}^{(5)} \left(x - \frac{\beta z}{n^{1/2}} \right) z^5 d\beta dQ(z) \\
 & + \frac{C_n^2 \Delta_3}{n^{7/2} 3!} \int_{[0,1] \times \mathbf{R}} \frac{(1-\beta)^3}{3!} \varphi_{1-2/n}^{(7)} \left(x - \frac{\beta z}{n^{1/2}} \right) z^4 d\beta dQ(z) \\
 & + \frac{C_n^2}{n^{7/2}} \int_{[0,1]^2 \times \mathbf{R}^2} \frac{(1-\alpha)^2}{2!} \frac{(1-\beta)^3}{3!} \varphi_{1-2/n}^{(7)} \left(x - \frac{\alpha y + \beta z}{n^{1/2}} \right) y^3 z^4 d\alpha d\beta dQ(y) dQ(z) \\
 & + \frac{C_n^3}{n^{9/2}} \int_{[0,1]^3 \times \mathbf{R}^3} \frac{(1-\beta_1)^2}{2!} \frac{(1-\beta_2)^2}{2!} \frac{(1-\beta_3)^2}{2!} \varphi_{1-3/n}^{(9)} \left(x - \frac{\beta_1 z_1 + \beta_2 z_2 + \beta_3 z_3}{n^{1/2}} \right) \\
 & \quad \times z_1^3 z_2^3 z_3^3 d\beta_1 d\beta_2 d\beta_3 dQ(z_1) dQ(z_2) dQ(z_3) + R_4^B
 \end{aligned}$$

и для любого x справедлива оценка

$$|R_4^B| \leq C_n^4 \frac{|\Delta|_3^4 B_{n-12}^{12, \mu, T}}{(3!)^4 n^6} + \frac{16}{\pi} \sqrt{n} C_n^4 \alpha^{n-\nu-4}(T) \int_T^\infty \max^\nu(|f(t)|, e^{-t^2/2}) dt.$$

В заключение отметим, что описанные приемы можно использовать и для оценок остатков асимптотических разложений Бергстрёма–Чебышёва с членами более высоких порядков. Правда, оценки для таких разложений получаются достаточно громоздкими.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Петров В. В. Суммы независимых случайных величин. М.: Наука, 1972, 414 с.

2. Сенатов В. В. Центральная предельная теорема: точность аппроксимации и асимптотические разложения. М.: Книжный дом Либроком, 2009, 352 с.
3. Сюлюкин А. В. Об асимптотических разложениях Бергстрёма–Чебышёва. — Теория вероятн. и ее примен., 2009, т. 54, в. 1, с. 176–185.
4. Paditz L. On the analytical structure of the constant in the nonuniform version of the Esseen inequality. — Statistics, 1989, v. 20, № 3, p. 453–464.

Поступила в редакцию
15.IX.2008

Исправленный вариант
2.XII.2008

© 2009 г.

FEINBERG E. A.* , PIUNOVSKIY A. B.**

ON STRONGLY EQUIVALENT NONRANDOMIZED TRANSITION PROBABILITIES¹⁾

В 1951 г. Дворецкий, Вальд и Вольфовиц доказали существование эквивалентных и сильно эквивалентных отображений для заданной вероятности перехода, когда множество неатомических мер конечно и множество решений также конечно. В настоящей статье вводится понятие сильно эквивалентных переходных вероятностей относительно конечного набора функций. Это понятие включает в себя как частный случай понятия эквивалентных и сильно эквивалентных переходных вероятностей. Мы показываем, что сильно эквивалентные отображения относительно конечного набора функций существуют, если конечно множество неатомических распределений и множество решений. Мы также предлагаем условие, когда это справедливо для счетного множества решений. В соответствии с недавним примером Лозба и Сана, сильно эквивалентное отображение при указанных условиях может не существовать в случае, если множество решений несчетно. В статье также приводятся два дополнительных контрпримера и показывается, что сильно эквивалентные отображения существуют для однородных переходных вероятностей.

Ключевые слова и фразы: сильно эквивалентные переходные вероятности, сильно эквивалентные переходные вероятности относительно конечного набора функций, множество решений, неатомическая мера.

1. Introduction. Dvoretzky, Wald and Wolfowitz [2], [3] studied the following problem. Consider a standard Borel space $\mathbf{X}$, i.e., $\mathbf{X}$ is a one-to-one measurable image of a Borel subset of a Polish space, and consider another standard Borel space $\mathbf{A}$. Sometimes $\mathbf{X}$ is called a state space (or set) and $\mathbf{A}$ is called a decision space (or set). Let a finite number of nonatomic probability measures $\mu_1, \dots, \mu_K$ on $\mathbf{X}$ be given. We recall that a measure μ on a standard Borel space $\mathbf{X}$ is called nonatomic if $\mu(\{x\}) = 0$ for all $x \in \mathbf{X}$. We follow the terminology that a finite set is countable. Of course, if $\mathbf{A}$ is countable, then $\int_{\mathbf{A}} f(a) \nu(da) = \sum_{a \in \mathbf{A}} f(a) \nu(a)$ for any measure ν and for any function f on $\mathbf{A}$. Denote by $\pi(da|x)$ a regular transition probability from $\mathbf{X}$ to $\mathbf{A}$. Since we consider only regular transition probabilities and only measurable functions, we sometimes omit the terms «regular» and «measurable». The following two facts were proved in [3].

* Department of Applied Mathematics and Statistics, State University of New York at Stony Brook, Stony Brook, NY 11794-3600, USA; e-mail: eugene.feinberg@sunysb.edu

** Department of Mathematical Sciences, University of Liverpool, Liverpool, L69 7ZL, UK; e-mail: piunov@liverpool.ac.uk

¹⁾ This research was partially supported by NSF grant DMI-0600538.