Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. В. Мазалов, Н. В. Пешков, Об асимптотических свойствах оптимального момента останова, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2003, том 48, выпуск 3, 583–589

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp272>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.23.180.231

26 апреля 2023 г., 12:59:04

13. Борисов И. С., Миронов Д. В. Асимптотическое представление отношения правдоподобия для многомерных выборок с разрывными плотностями. — Теория вероятн. и ее примен., 2000, т. 45, в. 2, с. 345–356.
14. Боровков К. А. К вопросу об уточнении пуассоновской аппроксимации. — Теория вероятн. и ее примен., 1988, т. 33, в. 2, с. 343–347.
15. Reiss R.-D. A Course on Point Processes, New York: Springer, 1993.
16. Прохоров Ю. В. Асимптотическое поведение биномиальных распределений. — Успехи матем. наук, 1953, т. 8, № 3, с. 135–142.
17. Barbour A. D., Hall P. On the rate of Poisson convergence. — Math. Proc. Cambridge Philos. Soc., 1984, т. 95, p. 473–480.
18. Einmahl J. H. J. Poisson and Gaussian approximation of weighted local empirical processes. — Stochastic Process. Appl. 1997, v. 70, p. 31–58.
19. Deheuvels P., Mason D. M. Nonstandard functional laws of the iterated logarithm for tail empirical and quantile processes. — Ann. Probab., 1990, v. 18, p. 1693–1722.
20. Deheuvels P., Mason D. M. Nonstandard local empirical processes indexed by sets. — J. Statist. Plann. Inference, 1995, v. 45, p. 91–112.
21. Deheuvels P., Pfeifer D. Poisson approximation of multinomial distributions and point processes. — J. Multivariate Anal., 1988, v. 25, p. 65–89.
22. Horváth L. A note on the rate of Poisson approximation of empirical processes. — Ann. Probab., 1990, v. 18, № 2, p. 724–726.
23. Major P. A note on the approximation of the uniform empirical processes. — Ann. Probab., 1990, v. 18, № 1, p. 129–139.
24. Serfling R. J. A general Poisson approximation theorem. — Ann. Probab., 1975, v. 3, № 4, p. 726–731.
25. Боровков А. А. Теория вероятностей. М.: Наука, 1976, 352 с.
26. Прохоров Ю. В. Сходимость случайных процессов и предельные теоремы теории вероятностей. — Теория вероятн. и ее примен., 1956, т. 1, в. 2, с. 757–238.

Поступила в редакцию
16.XII.2002

© 2003 г.

МАЗАЛОВ В. В.*, ПЕШКОВ Н. В.*

ОБ АСИМПТОТИЧЕСКИХ СВОЙСТВАХ ОПТИМАЛЬНОГО МОМЕНТА ОСТАНОВКИ¹⁾

Показано, что оптимальный момент остановки N независимых одинаково распределенных случайных величин в задаче с полной информацией имеет следующие асимптотические свойства: $ET_N \approx N/3$, $DT_N \approx N^2/18$.

Ключевые слова и фразы: оптимальный момент остановки, асимптотические свойства, полная информация.

1. Введение. При решении задачи оптимальной остановки случайных величин $X_1, X_2, \dots, X_N$ с полной информацией, в которой необходимо определить момент остановки τ , максимизирующий EX_τ , используется уравнение оптимальности [1]–[4] вида

$$V_N(x) = x, \quad V_i(x) = \max\{x, EV_{i+1}(X_i)\}, \quad i = 1, \dots, N-1.$$

* Институт прикладных математических исследований, Карельский научный центр РАН, ул. Пушкинская, 11, 185610 Петрозаводск, Россия; e-mail: vmazalov@krc.karelia.ru, peshkovn@mail.ru

¹⁾ Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 01-01-00126).

Без ограничения общности предположим, что $X_1, X_2, \dots, X_N$ — независимые равномерно распределенные на $[0, 1]$ случайные величины. Тогда оптимальный момент остановки [3], [4]

$$\tau_N = \begin{cases} 1, & \text{если } X_1 \geq v_1, \\ i, & \text{если } X_1 < v_1, \dots, X_{i-1} < v_{i-1}, X_i \geq v_i, \\ N, & \text{если } X_1 < v_1, \dots, X_{N-1} < v_{N-1}, \end{cases}$$

определяется набором из $N - 1$ порогов $(v_1, \dots, v_{N-1})$, где

$$v_N = 0, \quad v_i = \frac{1 + v_{i+1}^2}{2}, \quad i = N - 1, \dots, 1. \tag{1}$$

Последовательность (1) часто встречается в задачах оптимальной остановки и называется последовательностью Мозера [1], [5]. Цель данной работы — найти асимптотику $E\tau_N$ и $D\tau_N$ при $N \rightarrow \infty$.

2. Асимптотические свойства оптимального момента остановки.

Теорема 1. При $N \rightarrow \infty$: $E\tau_N/N \rightarrow \frac{1}{3}$, $D\tau_N/N^2 \rightarrow \frac{1}{18}$.

Согласно оптимальному правилу остановки,

$$\begin{aligned} E\tau_N &= \sum_{i=1}^N P\{\tau_N \geq i\} = 1 + \sum_{i=1}^{N-1} P\{X_1 < v_1, \dots, X_i < v_i\} \\ &= 1 + \sum_{k=1}^{N-1} \prod_{i=1}^k v_i = 1 + v_1 + v_1 v_2 + \dots + v_1 \dots v_{N-1}. \end{aligned} \tag{2}$$

Непрерывным аналогом уравнения (1) является дифференциальное уравнение

$$w' = -\frac{(1 - w)^2}{2} \tag{3}$$

с начальным условием $w(N) = 0$.

Нетрудно найти решение уравнения (3):

$$w_i = w(i) = \frac{N - i}{N - i + 2}. \tag{4}$$

Лемма 1. $w_i \leq v_i \leq w_i + \alpha_i$, где $\alpha_i = (N - i)^{-3/2}$, $i = N - 1, \dots, 1$.

Доказательство проведем индукцией по i . Сначала докажем левое неравенство. При $i = N$ имеем $v_N = w_N = 0$.

При $i = N - 1$ имеем $v_{N-1} = \frac{1}{2} > \frac{1}{3} = w_{N-1}$. Пусть утверждение истинно для $i + 1$, тогда

$$\begin{aligned} v_i &= \frac{1 + v_{i+1}^2}{2} \geq \frac{1 + ((N - i - 1)/(N - i + 1))^2}{2} \\ &= \frac{N - i}{N - i + 2} + \frac{2}{(N - i + 2)(N - i + 1)^2} \geq \frac{N - i}{N - i + 2} = w_i, \end{aligned}$$

т.е. левая часть неравенства верна.

Докажем теперь правую часть. При $i = N - 1$ имеем $v_{N-1} = \frac{1}{2} \leq w_{N-1} + \alpha_{N-1} = \frac{1}{3} + 1 = \frac{4}{3}$.

Используя (1), нетрудно непосредственно проверить, что неравенство выполняется для $i = N - 1, \dots, N - 25$.

i	$N - 1$	$N - 2$	$N - 3$	$N - 4$	$N - 5$	$N - 6$	$N - 7$	$N - 8$	$N - 9$
$w_i + \alpha_i$	1.3333	0.8535	0.7924	0.7916	0.8037	0.8180	0.8317	0.8441	0.8552
v_i	0.5000	0.6250	0.6953	0.7417	0.7750	0.8003	0.8203	0.8364	0.8498

i	$N - 10$	$N - 11$	$N - 12$	$N - 13$	$N - 14$	$N - 15$	$N - 16$	$N - 17$
$w_i + \alpha_i$	0.8649	0.8735	0.8811	0.8880	0.8940	0.8995	0.9045	0.9090
v_i	0.8610	0.8707	0.8790	0.8864	0.8928	0.8985	0.9037	0.9083

i	$N - 18$	$N - 19$	$N - 20$	$N - 21$	$N - 22$	$N - 23$	$N - 24$	$N - 25$
$w_i + \alpha_i$	0.9130	0.9168	0.9202	0.9234	0.9263	0.9290	0.9315	0.9339
v_i	0.9125	0.9163	0.9198	0.9230	0.9260	0.9287	0.9313	0.9336

Предположим, что правая часть неравенства верна для $i + 1$, т.е.

$$v_{i+1} \leq w_{i+1} + \alpha_{i+1} = \frac{N-i-1}{N-i+1} + \frac{1}{(N-i-1)^{3/2}} = \frac{(N-i-1)^{5/2} + N-i+1}{(N-i+1)(N-i-1)^{3/2}},$$

и докажем его истинность для i . Получим

$$\begin{aligned} v_i &= \frac{1 + v_{i+1}^2}{2} \leq \frac{1 + (w_{i+1} + \alpha_{i+1})^2}{2} = \frac{1}{2(N-i+1)^2(N-i-1)^3} \\ &\quad \times \left((N-i+1)^2(N-i-1)^3 + (N-i-1)^5 + (N-i+1)^2 \right. \\ &\quad \left. + 2(N-i-1)^{5/2}(N-i+1) \right). \end{aligned}$$

Для доказательства утверждения достаточно показать неотрицательность выражения $w_i + \alpha_i - v_i$. Сделав замену $t^2 = N - i$, получим:

$$\begin{aligned} w_1 + \alpha_i - v_i &= \frac{t^5 + t^2 + 2}{(t^2 + 2)t^3} - \frac{1}{2(t^2 + 1)^2(t^2 - 1)^3} \\ &\quad \times \left((t^2 + 1)^2(t^2 - 1)^3 + (t^2 - 1)^5 + (t^2 + 1)^2 + 2(t^2 - 1)^{5/2}(t^2 + 1) \right) \\ &= \frac{1}{2(t^2 + 2)t^3(t^2 + 1)^2(t^2 - 1)^3} \\ &\quad \times \left([2t^{12} + 2t^{10} - 5t^9 - 8t^8 + 8t^7 - 4t^6 - 17t^5 + 10t^4 + 2t^3 + 2t^2 - 4] \right. \\ &\quad \left. - [2(t^2 - 1)^{5/2}(t^7 + 3t^5 + 2t^3)] \right) = \frac{f(t) - g(t)}{2(t^2 + 2)t^3(t^2 + 1)^2(t^2 - 1)^3}, \quad (5) \end{aligned}$$

где выражения в квадратных скобках мы обозначили соответственно как $f(t)$ и $g(t)$. Так как выражение знаменателя в правой части (5) всегда больше нуля, оценим $f(t) - g(t)$. Определим верхнюю границу t^* для положительных корней уравнения

$$f^2(t) - g^2(t) = 0. \quad (6)$$

Очевидно, что она является верхней границей и для уравнения $f(t) - g(t) = 0$. Представим выражение $f^2(t) - g^2(t)$ в виде знакопеременной суммы

$$Q_1(x) - Q_2(x) + Q_3(x) - Q_4(x) + \dots + Q_{2m-1}(x) - Q_{2m}(x) = \sum_{k=1}^m (Q_{2k-1} - Q_{2k}),$$

где Q_1 — сумма последовательных членов полинома с положительными коэффициентами, начиная со старшей степени, Q_2 — сумма последовательных членов полинома с отрицательными коэффициентами, непосредственно примыкающих к членам первой суммы, и т.д. Получим

$$\begin{aligned} f^2(t) - g^2(t) &= (4t^{22} - 20t^{21}) + (12t^{19} - 11t^{18}) + (44t^{17} - 148t^{15}) \\ &\quad + (350t^{14} + 116t^{13} - 360t^{12}) + (244t^{11} + 165t^{10} - 284t^9) \\ &\quad + (48t^8 - 92t^7) + (92t^6 + 144t^5 - 76t^4 - 16t^3 - 16t^2) + (16 - 0). \quad (7) \end{aligned}$$

Согласно методу знакопеременных сумм [6], верхняя граница t^* уравнения (6) находится как $\max(c_k)$, где c_k — положительные числа такие, что $Q_{2k-1}(c_k) - Q_{2k}(c_k) \geq 0$, $k = 1, \dots, 8$. Таким образом, из вида (7) следует $t^* = \max(5, 1, 4, 1, 1, 2, 1, 1) = 5$, и, с учетом замены, получаем, что правое неравенство истинно и для $i = N - 26, \dots, 1$. Лемма доказана.

Введем в рассмотрение последовательности $\{S_i\}$ и $\{\hat{S}_i\}$:

$$S_1 = v_{N-1}, \quad S_i = \frac{S_{i-1}(i-1) + 1}{i} v_{N-i}, \quad i = 2, \dots, N-1; \quad (8)$$

$$\hat{S}_1 = w_{N-1}, \quad \hat{S}_i = \frac{\hat{S}_{i-1}(i-1) + 1}{i} w_{N-i}, \quad i = 2, \dots, N-1. \quad (9)$$

По построению $S_{N-1} = (\mathbf{E}\tau_N - 1)/(N-1)$.

Нетрудно показать, что $\widehat{S}_i = \frac{1}{3}$, $i = 1, \dots, N-1$. Действительно, при $i = 1$ имеем $\widehat{S}_1 = w_{N-1} = \frac{1}{3}$. Предположив истинность равенства для i , непосредственно проверяем

$$\widehat{S}_{i+1} = \frac{(i/3 + 1)(i+1)/(i+3)}{i+1} = \frac{(i+3)(i+1)}{3(i+3)(i+1)} = \frac{1}{3}.$$

Лемма 2. $S_i \leq \frac{1}{3} + 2/\sqrt{i}$, $i = 1, \dots, N-1$.

Доказательство. Сначала покажем, что

$$S_i \leq \frac{1}{3} + \beta_i, \quad (10)$$

где $\beta_i = [3(i-1)\beta_{i-1}(i^{5/2} + i + 2) + (i+2)^2]/[3(i+2)i^{5/2}]$, $i = 2, \dots, N-1$.

Из леммы 1, с учетом (8) и (9), следует: $S_1 \leq \widehat{S}_1 + \alpha_{N-1} = \widehat{S}_1 + \beta_1$ и $S_2 = (S_1 \cdot 1 + 1)w_{N-2}/2 \leq ((\widehat{S}_1 + \beta_1) \cdot 1 + 1)(w_{N-2} + \alpha_{N-2})/2$. Индуктивно рассуждая, получаем:

$$\begin{aligned} S_i &\leq \frac{1}{i} ((\widehat{S}_{i-1} + \beta_{i-1})(i-1) + 1)(w_{N-i} + \alpha_{N-i}) = \frac{1}{i} (\widehat{S}_{i-1}(i-1) + 1)w_{N-i} \\ &\quad + \frac{1}{i} (\beta_{i-1}(i-1)(w_{N-i} + \alpha_{N-i}) + \alpha_{N-i}(\widehat{S}_{i-1}(i-1) + 1)) \\ &= \widehat{S}_i + \frac{1}{i} \left[\left(\frac{i}{i+2} + \frac{1}{i^{3/2}} \right) (i-1)\beta_{i-1} + \frac{i+2}{3i^{3/2}} \right] \\ &= \widehat{S}_i + \frac{3(i-1)\beta_{i-1}(i^{5/2} + i + 2) + (i+2)^2}{3(i+2)i^{5/2}} = \frac{1}{3} + \beta_i, \quad i = 2, \dots, N-1, \end{aligned}$$

т.е. неравенство (10) справедливо.

Теперь покажем, что

$$\beta_i < \frac{2}{\sqrt{i}}, \quad i = 1, \dots, N-1. \quad (11)$$

Непосредственно проверяется, что (11) истинно для $i = 1, 2, 3$:

$$i = 1: \quad \beta_1 = \alpha_{N-1} = 1 < 2,$$

$$i = 2: \quad \beta_2 = \frac{3(4\sqrt{2} + 4) + 16}{48\sqrt{2}} = \frac{7\sqrt{2} + 6}{24} = \sqrt{2} - \frac{17\sqrt{2} - 6}{24} < \sqrt{2},$$

$$i = 3: \quad \beta_3 = \frac{3 \cdot 2 \frac{7\sqrt{2}+6}{24} (9\sqrt{3} + 5) + 25}{15 \cdot 9\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}} - \frac{950 - 63\sqrt{6} - 35\sqrt{2} - 54\sqrt{3}}{540\sqrt{3}} < \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

Пусть (11) выполняется для i , тогда покажем его истинность для $i+1$:

$$\begin{aligned} \frac{2}{\sqrt{i+1}} - \beta_{i+1} &\geq \frac{2}{\sqrt{i+1}} - \frac{3 \cdot 2\sqrt{i}((i+1)^{5/2} + i + 3) + (i+3)^2}{3(i+3)(i+1)^{5/2}} \\ &\geq \frac{6(i+3)(i+1)^2 - 6\sqrt{i+1}((i+1)^{5/2} + i + 3) - (i+3)^2}{3(i+3)(i+1)^{5/2}}. \end{aligned} \quad (12)$$

При замене $t^2 = i+1$ правая часть неравенства (12) принимает вид

$$\frac{11t^4 - 6t^3 - 4t^2 - 12t - 4}{3(t^2 + 2)t^5}. \quad (13)$$

Так как выражение, стоящее в знаменателе (13), положительное, оценим числитель, определив для него по методу Лагранжа [6] верхнюю границу положительных корней $R = 1 + \sqrt[k]{B/a_0}$, где B — наибольшая из абсолютных величин отрицательных коэффициентов, a_k — первый отрицательный коэффициент; тогда $R = 1 + \sqrt[11]{\frac{12}{11}} = 2\frac{1}{11}$. Таким образом, выражение (13) будет принимать положительные значения при $t > 2$, и, с учетом замены, получаем, что утверждение леммы истинно и для $i = 4, \dots, N-1$.

Из леммы 1 следует:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}\tau_N &\geq 1 + \sum_{k=1}^{N-1} \prod_{i=1}^k w_i = 1 + \sum_{k=1}^{N-1} \prod_{i=1}^k \frac{N-i}{N-i+2} = 1 + \sum_{k=1}^{N-1} \left(1 - \frac{k}{N}\right) \left(1 - \frac{k}{N+1}\right) \\ &= 1 + \frac{(N-1)N(N+1)}{3N(N+1)} = \frac{N+2}{3}. \end{aligned} \quad (14)$$

Из (14) и леммы 2 получаем:

$$\frac{N+2}{3} \leq \mathbf{E}\tau_N \leq \frac{N+2}{3} + 2\sqrt{N-1}, \quad (15)$$

где $2\sqrt{N-1}/N$ — бесконечно малая при $N \rightarrow \infty$, и, следовательно, $\mathbf{E}\tau_N/N \rightarrow \frac{1}{3}$ при $N \rightarrow \infty$. Таким образом, математическое ожидание оптимального момента остановки ведет себя, как $N/3$.

Докажем второе утверждение теоремы. Представим $\mathbf{E}\tau_N^2$ в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{E}\tau_N^2 &= \sum_{i=1}^N (2i-1) \mathbf{P}\{\tau_N \geq i\} = 1 + \sum_{i=1}^{N-1} (2i+1) \mathbf{P}\{X_1 < v_1, \dots, X_i < v_i\} \\ &= 1 + \sum_{k=1}^{N-1} (2k+1) \prod_{i=1}^k v_i = 1 + 3v_1 + 5v_1v_2 + \dots + (2N-1)v_1 \dots v_{N-1}. \end{aligned} \quad (16)$$

Лемма 3. *Имеют место неравенства*

$$\frac{(N+1)(N+2)}{6} \leq \mathbf{E}\tau_N^2 \leq \frac{(N+1)(N+2)}{6} + (4N-2)\sqrt{N-1}. \quad (17)$$

Доказательство. Имеем:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}\tau_N^2 &\geq 1 + \sum_{k=1}^{N-1} (2k+1) \frac{(N-k)(N-k+1)}{N(N+1)} = 1 + \frac{N(N^2-1)(N+4)}{6N(N+1)} \\ &= \frac{(N-1)(N+4)+6}{6} = \frac{(N+1)(N+2)}{6}. \end{aligned}$$

Теперь, согласно (2) и (16), перепишем $\mathbf{E}\tau_N^2$ в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{E}\tau_N^2 &= \mathbf{E}\tau_N + 2 \sum_{k=1}^{N-1} k \prod_{i=1}^k v_i = \mathbf{E}\tau_N + 2(v_1 + 2v_1v_2 + \dots + (N-1)v_1 \dots v_{N-1}) \\ &= \mathbf{E}\tau_N + 2 \left((v_1 + v_1v_2 + \dots + v_1 \dots v_{N-1}) \right. \\ &\quad \left. + (v_1v_2 + \dots + v_1 \dots v_{N-1}) + \dots + v_1 \dots v_{N-1} \right) \\ &= \mathbf{E}\tau_N + 2 \left((\mathbf{E}\tau_N - 1) + (\mathbf{E}\tau_N - 1 - v_1) \right. \\ &\quad \left. + \dots + (\mathbf{E}\tau_N - 1 - v_1 - v_1v_2 - \dots - v_1 \dots v_{N-2}) \right) \\ &= \mathbf{E}\tau_N + 2 \left((N-1)(\mathbf{E}\tau_N - 1) - \sum_{k=1}^{N-2} (N-k-1) \prod_{i=1}^k v_i \right). \end{aligned}$$

Из леммы 1 следует

$$\begin{aligned} \mathbf{E}\tau_N^2 &\leq \mathbf{E}\tau_N + 2 \left((N-1)(\mathbf{E}\tau_N - 1) - \sum_{k=1}^{N-2} (N-k-1) \prod_{i=1}^k w_i \right) \\ &= (2N-1) \mathbf{E}\tau_N - (2N-2) - 2 \sum_{i=1}^{N-2} \frac{i(i+1)(i+2)}{N(N+1)} \\ &= (2N-1) \mathbf{E}\tau_N - (2N-2) - \frac{2(N-2)(N-1)N(N+1)}{4N(N+1)}. \end{aligned}$$

Тогда, с учетом (15),

$$\begin{aligned} \mathbf{E}\tau_N^2 &\leq \frac{(2N-1)(N+2+6\sqrt{N-1})}{3} - (2N-2) - \frac{(N-2)(N-1)}{2} \\ &= \frac{(N+1)(N+2)}{6} + (4N-2)\sqrt{N-1}. \end{aligned}$$

Лемма доказана.

Из представления дисперсии $\mathbf{D}\tau_N$ в виде $\mathbf{D}\tau_N = \mathbf{E}\tau_N^2 - (\mathbf{E}\tau_N)^2$, с учетом неравенств (15) и (17), получаем следующие оценки:

$$\begin{aligned} \mathbf{D}\tau_N &\geq \frac{(N+1)(N+2)}{6} - \frac{(N+2+6\sqrt{N-1})^2}{9} \\ &= \frac{(N-1)(N-70) - 24(N+2)\sqrt{N-1}}{18}, \\ \mathbf{D}\tau_N &\leq \frac{(N+1)(N+2)}{6} + (4N-2)\sqrt{N-1} - \frac{(N+2)^2}{9} \\ &= \frac{(N-1)(N+2)}{18} + 4(N-2)\sqrt{N-1}. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\frac{(N-1)(N-70)}{18} - \frac{4(N+2)\sqrt{N-1}}{3} \leq \mathbf{D}\tau_N \leq \frac{(N-1)(N+2)}{18} + 4(N-2)\sqrt{N-1},$$

где $4(N+2)\sqrt{N-1}/(3N^2)$ и $4(N-2)\sqrt{N-1}/N^2$ — бесконечно малые при $N \rightarrow \infty$.

Из этого сразу следует второе утверждение теоремы.

Следствие. $\sigma(\tau_N) \approx N\sqrt{2}/6$.

3. Заключение. Интересно сравнить полученные выше результаты для задачи оптимальной остановки с полной информацией с классической задачей о секретаре, в которой требуется выбрать наилучший объект из последовательности N наблюдений, поступающих одно за другим [1], [3], [7]. Обозначим X_i относительный ранг объекта, рассматриваемого в момент i (ранг 1 соответствует наилучшему объекту). Известно, что оптимальное решающее правило имеет пороговый вид $\tau_N = \min\{i: i \geq r, X_i = 1\}$, где $r \geq 1$, вероятность $\mathbf{P}\{\tau = i\} = (r-1)/(i(i-1))$, $i = r, \dots, N-1$ [7], и при $N \rightarrow \infty$

$$\frac{r}{N} \rightarrow \frac{1}{e}. \quad (18)$$

Тогда

$$\begin{aligned} \mathbf{E}\tau_N &= \sum_{i=r}^N \mathbf{P}\{\tau_N = i\} i = \sum_{i=r}^{N-1} \frac{r-1}{i-1} + N \left(1 - \sum_{i=r}^{N-1} \mathbf{P}\{\tau = i\} \right) \\ &= \sum_{i=r}^{N-1} \frac{r-1}{i-1} + N \left(1 - \sum_{i=r}^{N-1} \frac{r-1}{i(i-1)} \right) = (r-1) \sum_{i=r}^{N-1} \frac{1}{i-1} + N \\ &\quad - N(r-1) \left(\frac{1}{r-1} - \frac{1}{N-1} \right) = N \left(\frac{r-1}{N} \sum_{i=r}^{N-1} \frac{1}{i-1} + \frac{r-1}{N-1} \right). \end{aligned}$$

Так как при $N \rightarrow \infty$

$$\sum_{i=r}^{N-1} \frac{1}{i-1} \sim \ln \left(\frac{N}{r} \right), \quad (19)$$

получаем, что

$$\frac{\mathbf{E}\tau_N}{N} \rightarrow \frac{1}{e} + \frac{1}{e} = \frac{2}{e} \approx 0.735.$$

То есть $\mathbf{E}\tau_N$ при $N \rightarrow \infty$ ведет себя как $2N/e$.

Для оценки дисперсии запишем $E\tau_N^2$ в виде

$$\begin{aligned} E\tau_N^2 &= (r-1) \sum_{i=r}^{N-1} \frac{i}{i-1} + N^2 \left(1 - (r-1) \sum_{i=r}^{N-1} \frac{1}{i(i-1)} \right) \\ &= (r-1)(N-r) + (r-1) \sum_{i=r}^{N-1} \frac{1}{i-1} + \frac{N^2(r-1)}{N-1}. \end{aligned}$$

Тогда, с учетом (18) и (19),

$$E\tau_N^2 \sim N^2 \left(\frac{r-1}{N} - \frac{r(r-1)}{N^2} + \frac{r-1}{N^2} \ln \frac{N}{r} + \frac{r-1}{N-1} \right) \sim N^2 \left(\frac{2}{e} - \frac{1}{e^2} \right).$$

Из представления $N^{-2}D\tau_N = N^{-2}E\tau_N^2 - N^{-2}(E\tau_N)^2$, с учетом (18) и (19), получаем

$$\frac{D\tau_N}{N^2} \rightarrow \frac{2}{e} - \frac{1}{e^2} - \frac{4}{e^2} = \frac{2}{e} - \frac{5}{e^2} \approx 0.059.$$

Таким образом, среднее время, необходимое для определения наилучшего объекта, в задаче о секретаре почти в 2.1 раза больше, чем в модели с полной информацией, при этом дисперсия приблизительно одинакова.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Gilbert J., Mosteller F. Recognizing the maximum of a sequence. — J. Amer. Statist. Assoc., 1966, v. 61, p. 35–73.
2. Ширяев А. Н. Статистический последовательный анализ. М.: Наука, 1976, 272 с.
3. Роббинс Г., Сигмунд Д., Чао И. Теория оптимальных правил останковки. М.: Наука, 1977, 168 с.
4. Мазалов В. В., Винниченко С. В. Моменты останковки и управляемые случайные блуждания. Новосибирск: Наука, 1992, 199 с.
5. Moser L. On a problem of Cayley. — Scripta Math., 1957, v. 22, № 3–4, p. 289–292.
6. Демидович Б. П., Марон И. А. Основы вычислительной математики. М.: Наука, 1960, 660 с.
7. Дынкин Е. Б., Юшкевич А. А. Теоремы и задачи о процессах Маркова. М.: Наука, 1967, 232 с.

Поступила в редакцию
17.II.2002

© 2003 г.

РОЗОВСКИЙ Л. В.*

О ТОЧНОЙ АСИМПТОТИКЕ В СЛАБОМ ЗАКОНЕ БОЛЬШИХ ЧИСЕЛ ДЛЯ СУММ НЕЗАВИСИМЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН С ОБЩЕЙ ФУНКЦИЕЙ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ИЗ ОБЛАСТИ ПРИТЯЖЕНИЯ УСТОЙЧИВОГО ЗАКОНА¹⁾

Рассматриваются независимые одинаково распределенные случайные величины $X_1, X_2, \dots$, такие, что

$$U_n = \frac{S_n}{B_n} - n a_n \rightarrow \xi_\alpha \quad \text{по вероятности при } n \rightarrow \infty,$$

* С.-Петербургская химико-фармацевтическая академия, кафедра высшей математики, ул. проф. Попова, 14, 197376 С.-Петербург, Россия; e-mail: l.rozovsky@mail.ru

¹⁾ Работа выполнена при поддержке гранта Мин. образования № Е00-1.0-45, гранта РФФИ № 02-01-01099 и гранта ведущих научных школ № 00-15-96019.