Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Л. В. Розовский, О точной асимптотике в слабом законе больших чисел для сумм независимых случайных величин с общей функцией распределения из области притяжения устойчивого закона, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2003, том 48, выпуск 3, 589–596

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp273>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.196.121.252

26 апреля 2023 г., 09:59:55

Для оценки дисперсии запишем $E\tau_N^2$ в виде

$$\begin{aligned} E\tau_N^2 &= (r-1) \sum_{i=r}^{N-1} \frac{i}{i-1} + N^2 \left(1 - (r-1) \sum_{i=r}^{N-1} \frac{1}{i(i-1)} \right) \\ &= (r-1)(N-r) + (r-1) \sum_{i=r}^{N-1} \frac{1}{i-1} + \frac{N^2(r-1)}{N-1}. \end{aligned}$$

Тогда, с учетом (18) и (19),

$$E\tau_N^2 \sim N^2 \left(\frac{r-1}{N} - \frac{r(r-1)}{N^2} + \frac{r-1}{N^2} \ln \frac{N}{r} + \frac{r-1}{N-1} \right) \sim N^2 \left(\frac{2}{e} - \frac{1}{e^2} \right).$$

Из представления $N^{-2}D\tau_N = N^{-2}E\tau_N^2 - N^{-2}(E\tau_N)^2$, с учетом (18) и (19), получаем

$$\frac{D\tau_N}{N^2} \rightarrow \frac{2}{e} - \frac{1}{e^2} - \frac{4}{e^2} = \frac{2}{e} - \frac{5}{e^2} \approx 0.059.$$

Таким образом, среднее время, необходимое для определения наилучшего объекта, в задаче о секретаре почти в 2.1 раза больше, чем в модели с полной информацией, при этом дисперсия приблизительно одинакова.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Gilbert J., Mosteller F. Recognizing the maximum of a sequence. — J. Amer. Statist. Assoc., 1966, v. 61, p. 35–73.
2. Ширяев А. Н. Статистический последовательный анализ. М.: Наука, 1976, 272 с.
3. Роббинс Г., Сигмунд Д., Чао И. Теория оптимальных правил останковки. М.: Наука, 1977, 168 с.
4. Мазалов В. В., Винниченко С. В. Моменты останковки и управляемые случайные блуждания. Новосибирск: Наука, 1992, 199 с.
5. Moser L. On a problem of Cayley. — Scripta Math., 1957, v. 22, № 3–4, p. 289–292.
6. Демидович Б. П., Марон И. А. Основы вычислительной математики. М.: Наука, 1960, 660 с.
7. Дынкин Е. Б., Юшкевич А. А. Теоремы и задачи о процессах Маркова. М.: Наука, 1967, 232 с.

Поступила в редакцию
17.II.2002

© 2003 г.

РОЗОВСКИЙ Л. В.*

О ТОЧНОЙ АСИМПТОТИКЕ В СЛАБОМ ЗАКОНЕ БОЛЬШИХ ЧИСЕЛ ДЛЯ СУММ НЕЗАВИСИМЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН С ОБЩЕЙ ФУНКЦИЕЙ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ИЗ ОБЛАСТИ ПРИТЯЖЕНИЯ УСТОЙЧИВОГО ЗАКОНА¹⁾

Рассматриваются независимые одинаково распределенные случайные величины $X_1, X_2, \dots$, такие, что

$$U_n = \frac{S_n}{B_n} - n a_n \rightarrow \xi_\alpha \quad \text{по вероятности при } n \rightarrow \infty,$$

* С.-Петербургская химико-фармацевтическая академия, кафедра высшей математики, ул. проф. Попова, 14, 197376 С.-Петербург, Россия; e-mail: l.rozovsky@mail.ru

¹⁾ Работа выполнена при поддержке гранта Мин. образования № E00-1.0-45, гранта РФФИ № 02-01-01099 и гранта ведущих научных школ № 00-15-96019.

где $S_n = X_1 + \dots + X_n$, $B_n > 0$, a_n — некоторые числа ($n \geq 1$), а случайная величина ξ_α имеет устойчивое распределение с характеристическим показателем $\alpha \in (0, 2)$.

Основной целью работы является нахождение условий при которых

$$\sum_n f_n \mathbf{P}\{|U_n| \geq \varepsilon \varphi_n\} \sim \sum_n f_n \mathbf{P}\{|\xi_\alpha| \geq \varepsilon \varphi_n\}, \quad \varepsilon \searrow 0,$$

где φ_n — положительная последовательность, растущая к бесконечности и удовлетворяющая некоторым дополнительным ограничениям, а f_n — неотрицательная последовательность, такая, что $\sum_n f_n = \infty$.

Ключевые слова и фразы: независимые случайные величины, закон больших чисел, устойчивый закон.

1. Введение. Результаты

Рассмотрим независимые случайные величины $X, X_1, X_2, \dots$ с общей функцией распределения F . Положим $S_n = X_1 + \dots + X_n$, $n \geq 1$.

Поводом для проведения настоящего исследования послужила статья [1], в которой были получены следующие результаты.

Теорема. *Предположим, что $\mathbf{E}X = 0$ и $\mathbf{E}|X| < \infty$, и*

$$\frac{S_n}{n^{1/\alpha}} \rightarrow \xi_\alpha \quad \text{по вероятности при } n \rightarrow \infty, \quad (1.1)$$

где случайная величина ξ_α имеет некоторое устойчивое распределение с характеристическим показателем α . Тогда при $1 \leq p < r < \alpha$ и $\rho = \alpha(r-p)/(\alpha-p)$

$$\lim_{\varepsilon \searrow 0} \varepsilon^\rho \sum_{n \geq 1} n^{r/p-2} \mathbf{P}\{|S_n| \geq \varepsilon n^{1/p}\} = \frac{p}{r-p} \mathbf{E}|\xi_\alpha|^\rho. \quad (1.2)$$

Кроме того, если для некоторой положительной последовательности $\{B_n\}$

$$\frac{S_n}{B_n} \rightarrow \xi_\alpha \quad \text{по вероятности при } n \rightarrow \infty, \quad (1.3)$$

то

$$\lim_{\varepsilon \searrow 0} \frac{1}{-\ln \varepsilon} \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n} \mathbf{P}\{|S_n| \geq \varepsilon n^{1/p}\} = \frac{\alpha p}{\alpha - p}. \quad (1.4)$$

Заметим, что соотношение (1.4) при $p = 1$ было ранее доказано в [2].

Отметим еще, что в [1] было сделано предположение (как оказалось, неверное), что соотношение (1.2) останется без изменения, если условие (1.1) заменить более общим условием (1.3).

Приведем результаты.

Всюду в дальнейшем будем предполагать, что F принадлежит области притяжения некоторого невырожденного устойчивого распределения F_α с характеристическим показателем $\alpha \in (0, 2)$, т.е. при подходящих a_n и $B_n > 0$ выполняется условие

$$U_n = \frac{S_n}{B_n} - n a_n \rightarrow \xi_\alpha \quad \text{по вероятности при } n \rightarrow \infty, \quad (1.5)$$

в котором случайная величина ξ_α имеет распределение F_α .

При $x \geq 0$ положим

$$\begin{aligned} \bar{F}(x) &= 1 - F(x), & R(x) &= \bar{F}(x) + F(-x), \\ \bar{F}_\alpha(x) &= 1 - F_\alpha(x), & R_\alpha(x) &= \bar{F}_\alpha(x) + F_\alpha(-x). \end{aligned}$$

Можно показать (см. [3, гл. XVII, § 5 и гл. V, § 1]), что из условия (1.5) следует, что функция $R(x)$ правильно меняется на бесконечности с показателем $-\alpha$, хвосты распределений F и F_α удовлетворяют условиям

$$\frac{\bar{F}(x)}{R(x)} \rightarrow p, \quad \frac{F(-x)}{R(x)} \rightarrow q, \quad (1.6)$$

$$x^\alpha \bar{F}_\alpha(x) \rightarrow cp, \quad x^\alpha F_\alpha(-x) \rightarrow cq, \quad (1.7)$$

при $x \rightarrow \infty$, и, кроме того ([4, гл. 4, § 2]),

$$nR(B_n) \rightarrow c, \quad na_n - \frac{n}{B_n} \int_{-B_n}^{B_n} x dF(x) \rightarrow \gamma \quad \text{при } n \rightarrow \infty, \quad (1.8)$$

где $c > 0$, p, q и γ — некоторые постоянные, причем $p, q \geq 0$, $p + q = 1$.

Заметим, что, не умаляя общности, в качестве a_n при $\alpha \neq 1$ (полагая $EX = 0$, если $\alpha > 1$) можно взять нуль, а при $\alpha = 1$ положить $a_n = B_n^{-1} \int_{-B_n}^{B_n} x dF(x)$.

Обозначим

$$R_{\alpha,n}(x) = R_\alpha(x) \begin{cases} 1, & x \leq 1; \\ x^\alpha \frac{R(xB_n)}{R(B_n)}, & x > 1; \end{cases}$$

$$R_{\alpha,n}^+(x) = \bar{F}_\alpha(x) \begin{cases} 1, & x \leq 1; \\ x^\alpha \frac{R(xB_n)}{R(B_n)}, & x > 1. \end{cases}$$

Ниже, не оговаривая это каждый раз отдельно, помимо (1.5) будем также предполагать, что неотрицательные числовые последовательности f_n, φ_n удовлетворяют условиям

$$\sum_{n \geq 1} f_n = \infty, \quad (1.9)$$

$$\varphi_n \rightarrow \infty, \quad n \rightarrow \infty. \quad (1.10)$$

Нас будет интересовать поведение при $\varepsilon \searrow 0$ сумм

$$S(\varepsilon) = \sum_{n \geq 1} f_n \mathbf{P}\{|U_n| \geq \varepsilon \varphi_n\} \quad \text{и} \quad S_+(\varepsilon) = \sum_{n \geq 1} f_n \mathbf{P}\{U_n \geq \varepsilon \varphi_n\}.$$

Справедливы следующие утверждения.

Предложение 1. Ряд $S(\varepsilon)$ сходится при каждом $\varepsilon > 0$ тогда и только тогда, когда

$$\sum_n n f_n R(B_n \varphi_n) < \infty. \quad (1.11)$$

Предложение 2. Пусть выполняется условие (1.11). Тогда

$$S(\varepsilon) \sim \sum_{n \geq 1} f_n R_{\alpha,n}(\varepsilon \varphi_n), \quad \varepsilon \searrow 0. \quad (1.12)$$

Кроме того, если постоянная p из условий (1.6), (1.7) положительна, то

$$S_+(\varepsilon) \sim \sum_{n \geq 1} f_n R_{\alpha,n}^+(\varepsilon \varphi_n), \quad \varepsilon \searrow 0. \quad (1.13)$$

Две нижеследующих теоремы — следствия предложений 1 и 2.

Теорема 1. Предположим, что в условии (1.5) $B_n = n^{1/\alpha}$ (т.е. F принадлежит области нормального притяжения распределения F_α) и $\sum_{n \geq 1} f_n \varphi_n^{-\alpha} < \infty$. Тогда ряд $S(\varepsilon)$ сходится при любом $\varepsilon > 0$ и, кроме того,

$$S(\varepsilon) \sim \sum_{n \geq 1} f_n R_\alpha(\varepsilon \varphi_n) \quad \text{и (если } p > 0) \quad S_+(\varepsilon) \sim \sum_{n \geq 1} f_n \bar{F}_\alpha(\varepsilon \varphi_n), \quad \varepsilon \searrow 0. \quad (1.14)$$

Теорема 2. Пусть последовательность φ_n монотонно растет к бесконечности или эквивалентна некоторой последовательности с таким свойством. Если

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \frac{\varphi_k^\delta \sum_{n > k} f_n \varphi_n^{-\delta}}{\sum_{n=1}^k f_n} < \infty \quad (\exists \delta < \alpha) \quad \text{и} \quad \limsup_{k \rightarrow \infty} \frac{\varphi_{k+1}}{\varphi_k} < \infty, \quad (1.15)$$

то ряд $S(\varepsilon)$ сходится при любом $\varepsilon > 0$ и имеет место (1.14).

З а м е ч а н и е 1. Последовательность φ_n в правых частях асимптотических равенств из соотношений (1.12)–(1.14) можно заменить любой другой эквивалентной ей последовательностью. Другими словами, асимптотическое поведение $S(\varepsilon)$ (или $S_+(\varepsilon)$) не изменится, если в соответствующих определениях φ_n заменить на $\bar{\varphi}_n$, где $\bar{\varphi}_n \sim \varphi_n$, $n \rightarrow \infty$.

Приведем несколько следствий теорем 1 и 2.

Введем условие

$$\varphi_n \sim \varphi_{n+1}, \quad \varphi_n \sim \bar{\varphi}_n \quad \text{при } n \rightarrow \infty, \quad \text{где } \bar{\varphi}_n \nearrow \infty. \quad (1.16)$$

Положим

$$f_n = \int_{\bar{\varphi}_n}^{\bar{\varphi}_{n+1}} g(u) \frac{du}{u}, \quad (1.17)$$

предполагая, что функция $g(u)$ интегрируема на любом конечном отрезке и

$$\int_1^\infty g(u) \frac{du}{u} = \infty. \quad (1.18)$$

Следствие 1. Пусть $B_n = n^{1/\alpha}$. Если выполняются условия (1.16)–(1.18) и $\int_1^\infty g(u) du/u^{1+\alpha} < \infty$, то ряд $S(\varepsilon)$ сходится при любом $\varepsilon > 0$ и при $\varepsilon \searrow 0$

$$S(\varepsilon) \sim \psi_\alpha(\varepsilon) = \int_1^\infty g(u) R_\alpha(\varepsilon u) \frac{du}{u}, \quad (1.19)$$

и, если $p > 0$,

$$S_+(\varepsilon) \sim \psi_\alpha^+(\varepsilon) = \int_1^\infty g(u) \bar{F}_\alpha(\varepsilon u) \frac{du}{u}. \quad (1.20)$$

Следствие 2. Пусть выполняются условия (1.16)–(1.18). Если

$$\frac{g(u)}{u^\delta} \quad \text{убывает на } [1, \infty) \text{ при некотором } \delta < \alpha, \quad (1.21)$$

то выполняется заключение следствия 1.

З а м е ч а н и е 2.

1) Если $g(u)$ правильно меняется на бесконечности с показателем $\rho \in (0, \alpha)$, то

$$\psi_\alpha(\varepsilon) \sim g\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) \rho^{-1} \mathbf{E}|\xi_\alpha|^\rho, \quad \psi_\alpha^+(\varepsilon) \sim g\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) \rho^{-1} \mathbf{E} \max(0, \xi_\alpha)^\rho, \quad \varepsilon \searrow 0. \quad (1.22)$$

2) Если $g(u)$ медленно меняется на бесконечности, то

$$\psi_\alpha(\varepsilon) \sim \int_1^{1/\varepsilon} g(u) \frac{du}{u}, \quad \psi_\alpha^+(\varepsilon) \sim \bar{F}_\alpha(0) \int_1^{1/\varepsilon} g(u) \frac{du}{u}, \quad \varepsilon \searrow 0. \quad (1.23)$$

3) Если $g(u)$ правильно меняется на бесконечности с показателем α и $\int_1^\infty g(u) u^{-(1+\alpha)} du < \infty$, то (см. (1.7))

$$\psi_\alpha(\varepsilon) \sim c\varepsilon^{-\alpha} \int_{1/\varepsilon}^\infty g(u) \frac{du}{u^{1+\alpha}}, \quad \psi_\alpha^+(\varepsilon) \sim c p \varepsilon^{-\alpha} \int_{1/\varepsilon}^\infty g(u) \frac{du}{u^{1+\alpha}}, \quad \varepsilon \searrow 0. \quad (1.24)$$

Отметим, что если функция $f_\gamma(u)$ правильно меняется на бесконечности с показателем γ и $g(u) = f_\gamma(\ln u)$, $\gamma > -1$, то

$$\int_1^z g(u) \frac{du}{u} \sim \frac{\ln z}{1+\gamma} g(z), \quad z \rightarrow \infty; \quad (1.25)$$

если $g(u) = f_\gamma(\ln \ln u)/\ln u$, $\gamma > -1$, то

$$\int_1^z g(u) \frac{du}{u} \sim \frac{\ln z \ln \ln z}{1+\gamma} g(z), \quad z \rightarrow \infty;$$

если $g(u) = u^\alpha f_\gamma(\ln u)$, $\gamma < -1$, то

$$z^\alpha \int_z^\infty g(u) \frac{du}{u^{1+\alpha}} \sim -\frac{\ln z}{1+\gamma} g(z), \quad z \rightarrow \infty, \quad (1.26)$$

а если $g(u) = u^\alpha f_\gamma(\ln \ln u) / \ln u$, $\gamma < -1$, то

$$z^\alpha \int_z^\infty g(u) \frac{du}{u^{1+\alpha}} \sim -\frac{\ln z \ln \ln z}{1+\gamma} g(z), \quad z \rightarrow \infty.$$

Отметим также, что в условиях замечания 2 можно считать, что функция $g(u)$ удовлетворяет условию (1.21), а

$$f_n \sim g(\varphi_n) \ln \frac{\bar{\varphi}_{n+1}}{\bar{\varphi}_n} \sim g(\varphi_n) \frac{\bar{\varphi}_{n+1} - \bar{\varphi}_n}{\varphi_n}. \quad (1.27)$$

Следствие 3. Пусть функции $b(t)$ и $f_\rho(t)$ правильно меняются на бесконечности с показателями $\gamma + 1/\alpha$ и $\rho \in [0, \alpha)$ соответственно; $b_n = b(n)$. Если выполняется условие (1.3), $\alpha \neq 2$, то при $\rho > 0$,

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n} f_\rho \left(\frac{b_n}{B_n} \right) \mathbf{P} \{ |S_n| \geq \varepsilon b_n \} \sim \frac{1}{\gamma \rho} f_\rho \left(\frac{1}{\varepsilon} \right) \mathbf{E} |\xi_\alpha|^\rho, \quad \varepsilon \searrow 0, \quad (1.28)$$

и

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n} f_0 \left(\frac{b_n}{B_n} \right) \mathbf{P} \{ |S_n| \geq \varepsilon b_n \} \sim \frac{1}{\gamma} \int_1^{1/\varepsilon} f_0(u) \frac{du}{u}, \quad \varepsilon \searrow 0. \quad (1.29)$$

В частности, при $f_\rho(t) = t^\rho$ получим обобщение (в том числе на случай $\alpha \leq 1$) теорем 1 и 2 из [1]. Например, при каждом $p \in (0, \alpha)$ и любой медленно меняющейся функции $h(t)$

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n} \mathbf{P} \{ |S_n| \geq \varepsilon n^{1/p} h(n) \} \sim \frac{\alpha p}{\alpha - p} \ln \frac{1}{\varepsilon}, \quad \varepsilon \searrow 0$$

(см. [1] при $h(t) = 1$ и $p \in [1, \alpha)$).

Правосторонний вариант следствия 3 формулируется аналогично с заменой ξ_α на $\max(0, \xi_\alpha)$ в (1.28) и добавлением множителя $\bar{F}_\alpha(0)$ в правой части (1.29).

Отметим, что в отличие от [1] и [2], из рассмотрения исключен случай $\alpha = 2$, поскольку он доказывается несколько по иному и приводит, вообще говоря, к другим формулировкам результатов. Мы предполагаем рассмотреть этот случай, а также ситуацию, когда $1 \leq \alpha < 2$, а $p = 0$ (см. (1.6)) в другой работе.

Следствие 3 вытекает из следствия 2 и соотношений (1.27), (1.22), (1.23) и того, что

$$\frac{b_n}{B_n} \sim \varphi_n = a \exp \left\{ \int_1^n \frac{\gamma + \eta(u)}{u} du \right\},$$

где $\eta(u) \rightarrow 0$, так что

$$\ln \frac{\varphi_{n+1}}{\varphi_n} \sim \frac{\gamma}{n}, \quad n \rightarrow \infty. \quad (1.30)$$

Если $B_n \sim n^{1/\alpha}$, соотношение (1.28) можно дополнить, рассмотрев показатель $\rho = \alpha$. Так, имеет место следующее следствие.

Следствие 4. Пусть выполняется условие (1.1), $\alpha \neq 2$. Тогда при любых положительных γ и β

$$\sum_{n \geq 3} n^{\alpha\gamma-1} \left(\frac{1}{\ln n} \right)^{1+\beta} \mathbf{P} \{ |S_n| \geq \varepsilon n^{\gamma+1/\alpha} \} \sim \frac{c}{\beta} \gamma^\beta \varepsilon^{-\alpha} \left(\ln \frac{1}{\varepsilon} \right)^{-\beta}, \quad \varepsilon \searrow 0,$$

где c такое же, как в (1.7).

Для проверки следствия 4 воспользуемся соотношениями (1.19), (1.24), (1.26) при $g(u) = u^\alpha / \ln^{1+\beta} u$, а также (1.27), (1.30) при $\varphi_n = n^\gamma$.

Следствие 5. Пусть $\ln_j n$, $j = 1, 2, \dots$, обозначает j -кратный натуральный логарифм n (т.е. $\ln_1 n = \ln n$, $\ln_2 n = \ln \ln n$ и т.д.). Пусть $\gamma > 0$, $0 \leq \rho < \alpha$. Если выполняется условие (1.3), $\alpha \neq 2$, то

$$\sum_{n: \ln_k n \geq 1} (\ln_k n)^{\gamma\rho} \frac{1}{n \prod_{j=1}^k \ln_j n} \mathbf{P} \{ |S_n| \geq \varepsilon B_n (\ln_k n)^\gamma \} \sim \frac{1}{\gamma} \tau_\rho \left(\frac{1}{\varepsilon} \right), \quad \varepsilon \searrow 0,$$

где $\tau_\rho(z) = \rho^{-1} z^\rho \mathbf{E} |\xi_\alpha|^\rho$, если $\rho > 0$, и $\tau_0(z) = \ln z$.

Для проверки следствия 5 следует воспользоваться следствием 2, замечанием 2 и соотношением

$$\frac{(\ln k(n+1))^\gamma - (\ln k n)^\gamma}{(\ln k n)^\gamma} \sim \frac{\gamma}{n \prod_{j=1}^k \ln_j n}, \quad n \rightarrow \infty.$$

2. Доказательства

Лемма 1. Пусть $\{X_{nk}; 1 \leq k \leq n, n \geq 1\}$ — последовательность серий независимых в каждой серии случайных величин. Положим

$$S_n = \sum_{k=1}^n X_{nk}, \quad \Theta_n(u) = \sum_{k=1}^n \mathbf{P}\{X_{nk} < u\}, \quad Q_n(u) = \int_{|y|>u} \Theta_n(dy),$$

$$Q_n^+(u) = \int_{y>u} \Theta_n(dy), \quad \lambda_2(u) = u^{-2} \int_0^u y Q_n(y) dy, \quad \lambda_2^+(u) = u^{-2} \int_0^u y Q_n^+(y) dy.$$

Пусть $\kappa_n > 0$ изменяется таким образом, что

$$\lambda_2(\kappa_n) + \left| \frac{1}{\kappa_n} \int_{-\kappa_n}^{\kappa_n} y \Theta_n(dy) \right| \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty. \quad (2.1)$$

Тогда равномерно по $x > \kappa_n$

$$\mathbf{P}\{S_n > x\} \leq Q_n^+(x - \kappa_n) + o(1) \lambda_2(x); \quad (2.2)$$

кроме того, если $Q_n^+(y) \sim c_0 \lambda_2^+(y)$ равномерно по $y > \beta \kappa_n$, при $n \rightarrow \infty$ и $\lambda_2(y) \leq c_1 \lambda_2^+(y)$, $y > \kappa_n$, где $\beta < 1$, c_0, c_1 — некоторые положительные числа, то

$$\mathbf{P}\{S_n > x\} \sim Q_n^+(x), \quad x > \kappa_n. \quad (2.3)$$

Лемма 1 вытекает из [5, следствие 2, теорема 1 и замечание]. Пользуясь случаем, отметим, что в [5] в условии (3) и в определении коэффициента η_1 из леммы 1 следует $\bar{S}_n$ заменить на $\tilde{S}_n = \max_{1 \leq l \leq k_n} |\sum_{k=1}^l X_{nk}|$.

Пусть выполняются условия (1.5)–(1.8) и положительная последовательность ρ_n стремится к бесконечности как угодно медленно. Покажем, что тогда равномерно по $x > \rho_n$

$$\mathbf{P}\{U_n \geq x\} = (p + o(1)) n R(x B_n), \quad n \rightarrow \infty. \quad (2.4)$$

Для этого воспользуемся леммой 1 при $\kappa_n = \rho_n$ и $X_{nk} = X_k/B_n - a_n$. Несложно убедиться в том, что все условия леммы 1 выполняются. Например, при проверке условия (2.1) можно воспользоваться соотношениями

$$\frac{1}{\kappa_n} \int_{-\kappa_n}^{\kappa_n} y \Theta_n(dy) = \frac{n}{\rho_n} \int_{|x/B_n - a_n| < \rho_n} \left(\frac{x}{B_n} - a_n \right) dF(x) = I_1 + I_2,$$

где (с учетом того, что $a_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$)

$$|I_1| = \left| \frac{n}{\rho_n} \int_{\substack{|x/B_n - a_n| < \rho_n, \\ |x| \geq B_n}} \left(\frac{x}{B_n} - a_n \right) dF(x) \right|$$

$$\leq \frac{n}{\rho_n} \left(\sqrt{\rho_n} R(B_n) + \rho_n R(0.5 B_n \sqrt{\rho_n}) \right) = o(1)$$

и

$$I_2 = \frac{n}{\rho_n} \int_{|x/B_n - a_n| < \rho_n, |x| < B_n} \left(\frac{x}{B_n} - a_n \right) dF(x)$$

$$= \frac{1}{\rho_n} \left(\frac{n}{B_n} \int_{-B_n}^{B_n} x dF(x) - n a_n (1 - R(B_n)) \right)$$

$$= \frac{1}{\rho_n} (-\gamma + o(1) + n R(B_n) a_n) = o(1).$$

Столь же очевидно, что (см. (1.6)),

$$Q_n^+(x) = n \int_{y>x} dF((y + a_n) B_n) = n \bar{F}((x + a_n) B_n) = n (p + o(1)) R(x B_n),$$

$x > \rho_n$, $n \rightarrow \infty$. Соотношение (2.4) легко следует из (2.3) при $p > 0$ и из (2.2) при $p = 0$.

Лемма 2. Пусть выполнено условие (1.5). Тогда равномерно по $x \geq 0$

$$\mathbf{P}\{|U_n| \geq x\} \sim R_{\alpha,n}(x), \quad n \rightarrow \infty; \quad (2.5)$$

кроме того, если постоянная p из условий (1.6), (1.7) положительна, то

$$\mathbf{P}\{U_n \geq x\} \sim R_{\alpha,n}^+(x), \quad n \rightarrow \infty. \quad (2.6)$$

Доказательство леммы 2. Пусть положительная последовательность ρ_n стремится к бесконечности как угодно медленно. Соотношения (2.5) и (2.6) при $x \leq \rho_n$ следуют из (1.5). Пусть теперь $x > \rho_n$. Если $p > 0$, (2.6) вытекает из (2.4) и (1.6), (1.7). Для проверки условия (2.5) представим вероятность $\mathbf{P}\{|U_n| \geq x\}$ в виде суммы $\mathbf{P}\{U_n \geq x\} + \mathbf{P}\{U_n \leq -x\}$ и снова оценим каждое слагаемое при помощи равенства (2.4).

Предложения 1 и 2 являются очевидными следствиями леммы 2 и условия (1.9).

Теорема 1 — прямое следствие предложений 1 и 2, поскольку (см. (1.8)) если $B_n = n^{1/\alpha}$, то $R(x) \sim cx^{-\alpha}$ при $x \rightarrow \infty$.

Доказательство теоремы 2. Пусть положительная функция $M = M(\varepsilon)$ как угодно медленно возрастает к бесконечности при $\varepsilon \searrow 0$; последовательность φ_n монотонно растет к бесконечности. Положим $n_1 = \max\{n: \varphi_n \leq \varepsilon\}$, $n_2 = \max\{n: \varphi_n \leq M/\varepsilon\}$. Имеем

$$S(\varepsilon) = \left(\sum_{n=1}^{n_2} + \sum_{n>n_2} \right) f_n R_{\alpha,n}(x) = S_1 + S_2. \quad (2.7)$$

Очевидно, что

$$S_1 \geq \sum_{n=1}^{n_1} f_n R_{\alpha}(\varepsilon \varphi_n) \geq R_{\alpha}(1) \sum_{n=1}^{n_1} f_n. \quad (2.8)$$

С другой стороны, с учетом свойств правильно меняющихся функций, $R_{\alpha,n} \leq 2x^{\eta-\alpha}$ при всех $x \geq 1$ и при всех достаточно больших n , каково бы ни было положительное η , и, следовательно (см. (1.6), (1.15) и (2.8)), при всех достаточно малых ε

$$\begin{aligned} S_2 &\leq A_1 \sum_{n>n_2} f_n (\varepsilon \varphi_n)^{\eta-\alpha} \leq A_1 M^{-\gamma} \sum_{n>n_2} f_n (\varepsilon \varphi_n)^{-\delta} \leq A_1 M^{-\gamma} \varepsilon^{-\delta} \sum_{n>n_1} f_n \varphi_n^{-\delta} \\ &\leq A_2 M^{-\gamma} (\varepsilon \varphi_{n_1})^{-\delta} \sum_{n=1}^{n_1} f_n \leq A_3 M^{-\gamma} S_1, \end{aligned} \quad (2.9)$$

где $\gamma = \alpha - \delta - \eta > 0$, A_i — некоторые постоянные, не зависящие от ε .

Из (2.7)–(2.9) следует, что $S(\varepsilon) \sim S_1$, $\varepsilon \searrow 0$, но

$$\sum_{n \geq 1} f_n R_{\alpha}(\varepsilon \varphi_n) = (1 + o(1)) S_1 + \sum_{n>n_2} f_n R_{\alpha}(\varepsilon \varphi_n) \sim S_1, \quad \varepsilon \searrow 0,$$

что (см. также (1.12)) доказывает первую часть соотношения (1.14). Вторая часть проверяется совершенно аналогично. Случай немонотонной последовательности φ_n охватывается замечанием 1. Теорема 2 доказана.

Следствие 1 очевидно. Чтобы обосновать следствие 2, надо убедиться в справедливости первого условия в (1.15).

Пусть δ взято из условия (1.21) и $\delta < \gamma < \alpha$. С учетом (1.21) при всех достаточно больших k , предполагая без потери общности последовательность φ_n монотонной, имеем

$$\begin{aligned} \varphi_k^{\gamma} \sum_{n>k} f_n \varphi_n^{-\gamma} &< 2 \varphi_k^{\gamma} \int_{\varphi_k}^{\infty} \frac{g(u)}{u^{\delta}} u^{-(\gamma-\delta)} \frac{du}{u} \leq \varphi_k^{\gamma} \frac{g(\varphi_k)}{\varphi_k^{\delta}} \frac{1}{\gamma-\delta} \varphi_k^{-(\gamma-\delta)} = \frac{1}{\gamma-\delta} g(\varphi_k); \\ \sum_{n=1}^k f_n &\geq \int_{\varphi_{k/2}}^{\varphi_k} \frac{g(u)}{u^{\delta}} u^{\delta} \frac{du}{u} \geq \frac{g(\varphi_k)}{\varphi_k^{\delta}} \int_{\varphi_{k/2}}^{\varphi_k} u^{\delta} \frac{du}{u} = \frac{1-2^{-\delta}}{\delta} g(\varphi_k). \end{aligned}$$

Отсюда следует нужный результат.

В замечании 2 для примера проверим пункт 2. Пусть положительная функция $\eta = \eta(\varepsilon)$ достаточно медленно убывает к нулю при $\varepsilon \searrow 0$. Имеем

$$\begin{aligned} \psi_\alpha(\varepsilon) &= \int_1^{1/\varepsilon} g(u) \frac{du}{u} + \int_1^{\eta/\varepsilon} g(u)(R_\alpha(\varepsilon u) - 1) \frac{du}{u} \\ &\quad + \int_{\eta/\varepsilon}^{1/\varepsilon} g(u)(R_\alpha(\varepsilon u) - 1) \frac{du}{u} + \int_1^\infty g\left(\frac{u}{\varepsilon}\right) R_\alpha(u) \frac{du}{u} = I_1 + \dots + I_4. \end{aligned}$$

Далее, используя свойства медленно меняющихся функций (например, [3]), получим при $\varepsilon \searrow 0$

$$\begin{aligned} I_1 &\geq \int_{\eta/\varepsilon}^{1/\varepsilon} g(u) \frac{du}{u} \sim g\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) \ln \frac{1}{\eta}, \quad I_2 = o(1) \int_1^{\eta/\varepsilon} g(u) \frac{du}{u} = o(I_1), \\ I_4 + I_3 &= g\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) \left(\int_1^\infty R_\alpha(u) \frac{du}{u} - \int_0^1 (1 - R_\alpha(u)) \frac{du}{u} + o(1) \right). \end{aligned}$$

Отсюда следует соотношение (1.23).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Gut A., Spataru A. Precise asymptotics in the Baum–Katz and Davis laws of large numbers. — J. Math. Anal. Appl., 2000, v. 248, № 1, p. 233–246.
2. Spataru A. Precise asymptotics in Spitzer's law of large numbers. — J. Theor. Probab., 1999, v. 12, № 3, p. 811–819.
3. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. Т. 2. М.: Мир, 1984, 752 с.
4. Петров В. В. Предельные теоремы для сумм независимых случайных величин. М.: Наука, 1987.
5. Розовский Л. В. Одна оценка для вероятностей больших отклонений. — Матем. заметки, 1987, v. 42, p. 145–156.

Поступила в редакцию
20.XI.2002

© 2003 г.

BENHENNI K.*, DROUILHET R.*

ADJUSTED EULER–MACLAURIN PREDICTOR FOR INTEGRATING SMOOTH SPATIAL PROCESSES

Рассматривается задача нахождения предсказующих интегралов пространственного стационарного процесса Z над единичным квадратом. При помощи аппроксимации среднеквадратичных производных процесса в двумерной формуле Эйлера–Маклорена по конечным разностям вплоть до некоторого порядка построены предикторы, основанные на систематической выборке размера m^2 . Показано, что если спектральная плотность удовлетворяет соотношению $f_Z(\omega) = o(|\omega|^{-p})$ для любого фиксированного положительного целого p , то соответствующая среднеквадратичная ошибка имеет порядок m^{-p} .

Ключевые слова и фразы: пространственный стационарный процесс, предиктор, формула Эйлера–Маклорена.

* Labsad-BSHM, Université Pierre Mendès France, 1251, avenue centrale, B.P. 47, 38040 Grenoble Cedex 9, France; e-mail: Karim.Benhenni@upmf-grenoble.fr; Remy.Drouilhet@upmf-grenoble.fr