Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Р. Ш. Липцер, Большие отклонения для эмпирических мер марковских процессов (дискретное время, некомпактный случай), *Теория вероятн. и ее примен.*, 1996, том 41, выпуск 1, 65–88

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp2776>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.174.149.18

26 апреля 2023 г., 12:16:18

© 1996 г.

ЛИПЦЕР Р. Ш.*

**БОЛЬШИЕ УКЛОНЕНИЯ ДЛЯ ЭМПИРИЧЕСКИХ МЕР
МАРКОВСКИХ ПРОЦЕССОВ**
(дискретное время, некомпактный случай)¹⁾

Приводится простое доказательство принципа больших уклонений Донскера и Варадана для семейства эмпирических мер марковского процесса с дискретным временем со значениями в $\mathbf{R}$ (не компактный случай). Доказательство не опирается ни на понятие условной энтропии, ни на результаты так называемого «третьего уровня» в больших уклонениях. Оно основано на теореме Пухальского и представляет собой новый вариант доказательства принципа больших уклонений Дюпуи и Эллиса для двумерных эмпирических мер, что позволяет заменить предположение о существовании инвариантной меры более естественным с точки зрения приложений условием. Приводится пример марковского процесса, задаваемого нелинейным рекуррентным соотношением, для которого условия существования принципа больших уклонений проверяются.

Ключевые слова и фразы: большие уклонения, экспоненциальная плотность, локальный принцип больших уклонений.

1. Введение. Формулировка основных результатов

1. Рассмотрим однородный марковский процесс $\xi = (\xi_k)_{k \geq 0}$, принимающий значения в $\mathbf{R}$, с начальным распределением $\alpha_0(dx)$. При фиксированной начальной точке $\xi_0 = x$ Донскер и Варадан [1] установили принцип больших уклонений (п.б.у.) для семейства $(\pi_n, n \geq 1)$ эмпирических распределений (окупационных мер):

$$\pi_n(A) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n I(\xi_k \in A), \quad (1.1)$$

при выполнении следующих предположений:

(F) переходная вероятность $\pi(x, dy)$ процесса ξ является феллеровской;

*Tel Aviv University, Dept. of Electrical Engineering-Systems, 69978 Tel Aviv, Israel.

¹⁾Эта работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований # 93-011-1450.

(I) существует единственная инвариантная мера $\alpha(dx)$:

$$\alpha(\Gamma) = \int_{\mathbf{R}} \pi(x, \Gamma) \alpha(dx), \quad \Gamma \in \mathbf{R};$$

(H*) найдется неотрицательная измеримая функция $v(x)$ такая, что $\sup_{|x| \leq N} v(x) < \infty$ для любого $N > 0$, и для функции

$$w(x) = \ln \frac{e^{v(x)}}{\int_{\mathbf{R}} e^{v(y)} \pi(x, dy)}$$

выполняются свойства $\inf_{x \in \mathbf{R}} w(x) = w_* > -\infty$, $\lim_{i \rightarrow \infty} \inf_{|x| > i} [w(x) - w_*] = \infty$;

(RM) существует σ -конечная мера $l = l(dx)$ такая, что

$$\pi(x, dy) = p(y|x) l(dy) \quad \alpha\text{-п.н.}$$

и для каждого x

$$p(y|x) > 0 \quad l\text{-п.н.}$$

Для точной формулировки результата Донскера и Варадана введем метрическое пространство (S, ρ) (S — множество вероятностных мер на $\mathbf{R}$, ρ — метрика Леви-Прохорова).

Теорема (Донскер, Варадан). Если выполнены условия (F), (I) (H*) и (RM), то

(i) для любого замкнутого (в метрике ρ) множества F

$$\limsup_n \frac{1}{n} \ln \mathbf{P}\{\pi_n \in F\} \leq - \inf_{\mu \in F} J(\mu),$$

(ii) для любого открытого (в метрике ρ) множества G

$$\liminf_n \frac{1}{n} \ln \mathbf{P}\{\pi_n \in G\} \geq - \inf_{\mu \in G} J(\mu),$$

где $J(\mu)$ — функционал действия, определяемый формулой

$$J(\mu) = \sup_{u \in \mathfrak{N}} \int_{\mathbf{R}} \ln \frac{e^{u(x)}}{\int_{\mathbf{R}} e^{u(y)} \pi(x, dy)} \mu(dx), \quad (1.2)$$

и $\mathfrak{N}$ — множество непрерывных финитных функций.

2. На протяжении всей работы будут использоваться обозначения:

$$\lambda_\gamma^\circ(dx, dy) = \pi(x, dy) \gamma(dx), \quad \forall \gamma \in S,$$

и $S_{\gamma\gamma}$ для множества вероятностных мер на $\mathbf{R}^2$ с одинаковыми маргиналами γ . Для $\lambda \in S_{\mu\mu}$ количество

$$H(\lambda|\lambda_\mu^\circ) = \begin{cases} \int_{\mathbf{R}^2} \ln \frac{d\lambda}{d\lambda_\mu^\circ}(x, y) \lambda(dx, dy), & \lambda \ll \lambda_\mu^\circ, \\ \infty, & \text{в остальных случаях,} \end{cases} \quad (1.3)$$

будем называть, следуя Донскеру и Варадану, условной энтропией меры λ относительно меры λ_μ° .

Существенным моментом в доказательстве Донскера и Варадана в части, касающейся нижней оценки, является тождество

$$J(\mu) \equiv \inf_{\lambda \in S_{\mu\mu}} H(\lambda | \lambda_\mu^\circ) \quad (= J'(\mu)). \quad (1.4)$$

Следует отметить, что неравенство $J(\mu) \leq J'(\mu)$ является очевидным, в то время как доказательство неравенства $J(\mu) \geq J'(\mu)$ даже в компактном случае (см. [2]) выглядит местами весьма сложно. Позднее Донскер и Варадан установили п.б.у. не прибегая к тождеству $J(\mu) \equiv J'(\mu)$. Предложенный ими подход использует метод непрерывных отображений (так называемый «contraction principle» Варадана [3]) и п.б.у. для оккупационных полей (эмпирических мер «третьего уровня» [4]).

3. Цель работы — установить п.б.у. Донскера и Варадана и его обобщения, не используя ни «третий уровень», ни тождество $J(\mu) \equiv J'(\mu)$.

В настоящей работе также не предполагается существование инвариантной меры у переходной вероятности $\pi(x, dy)$. Поэтому вместо условий (I) и (RM) вводятся условия:

(I') найдется хотя бы одна вероятностная мера $\lambda' = \lambda'(dx, dy)$ на $\mathbf{R}^2$ с одинаковыми маргиналами, обозначаемыми $\alpha = \alpha(dx)$, такая, что

$$1) \lambda' \sim \lambda_\alpha^\circ,$$

$$2) H(\lambda' | \lambda_\alpha^\circ) < \infty$$

((I) влечет за собой (I') с $\lambda' = \lambda_\alpha^\circ$);

(RM') у переходных вероятностей $\pi(x, dy)$ и $\pi'(x, dy)$ ($\lambda'(dx, dy) = \pi'(x, dy)\alpha(dx)$) существуют условные плотности $p(y|x)$ и $p'(y|x)$ относительно некоторой σ -конечной меры $l = l(dx)$ такие, что при каждом $x \in \mathbf{R}$

$$\begin{aligned} \pi(x, dy) &= p(y|x) l(dy), \\ \pi'(x, dy) &= p'(y|x) l(dy) \quad \alpha\text{-п.н.} \end{aligned}$$

и $p'(y|x) > 0$ ($l \times \alpha$)-п.н.

С начальной мерой α_0 свяжем еще одно условие:

(H₀) функция $u(x) = v(x) + \frac{1}{2}[w(x) - w_*]$, где $v(x)$ из (H*), такова, что

$$\exists b > 0: \int_{\mathbf{R}} e^{bu(x)} \alpha_0(dx) < \infty$$

и

$$\int_{\mathbf{R}} p(y|x) \alpha_0(dx) > 0 \quad l\text{-п.н.}$$

Основной результат приводится в нижеследующей теореме.

Теорема 1.1. Пусть выполнены условия (F), (I'), (H*), (RM') и (H₀). Тогда семейство $(\pi_n, n \geq 1)$ удовлетворяет п.б.у. в (S, ρ) с

функционалом действия

$$J'(\mu) = \inf_{\lambda \in S_{\mu\mu}} H(\lambda | \lambda_\mu^\circ), \quad \forall \mu \in S.$$

Для любых замкнутого F и открытого G (в метрике ρ) множеств

$$\begin{aligned} \limsup_n \frac{1}{n} \ln P\{\pi_n \in F\} &\leq - \inf_{\mu \in F} J'(\mu), \\ \liminf_n \frac{1}{n} \ln P\{\pi_n \in G\} &\geq - \inf_{\mu \in G} J'(\mu). \end{aligned}$$

Для доказательства этой теоремы используется метод непрерывных отображений («contraction principle») и п.б.у. для эмпирических мер $\pi_n^2(dx, dy)$:

$$\pi_n^2(A \times B) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n I(\xi_{k-1} \in A, \xi_k \in B) \quad (1.5)$$

(см. [5], [6]).

4. Введем метрическое пространство (S^2, ρ^2) , где S^2 — пространство вероятностных мер на R^2 и ρ^2 — метрика Леви–Прохорова. П.б.у. для семейства $(\pi_n^2, n \geq 1)$ дает следующая теорема.

Теорема 1.2. Пусть выполнены условия (F) , (I') , (H^*) , (RM') и (H_0) . Тогда семейство $(\pi_n^2, n \geq 1)$ удовлетворяет п.б.у. в (S^2, ρ^2) с функционалом действия $J^2 = J^2(\lambda)$, $\lambda \in S^2$, с

$$J^2(\lambda) = \begin{cases} \infty, & \text{маргиналы } \lambda \text{ различны,} \\ H(\lambda | \lambda_\gamma^\circ), & \text{маргиналы } \lambda \text{ совпадают } (= \gamma). \end{cases}$$

Для любых замкнутого F^2 и открытого G^2 (в метрике ρ^2) множеств

$$\begin{aligned} \limsup_n \frac{1}{n} \ln P\{\pi_n^2 \in F^2\} &\leq - \inf_{\lambda \in F^2} J^2(\lambda), \\ \liminf_n \frac{1}{n} \ln P\{\pi_n^2 \in G^2\} &\geq - \inf_{\lambda \in G^2} J^2(\lambda). \end{aligned}$$

В последнем разделе работы приводится пример марковского процесса, для которого проверка условий теорем 1.1 и 1.2 эффективна.

5. Теорема 1.2 несколько отличается по формулировке и существенно по методу доказательства от [5] и [6]. Чтобы пояснить это, нам потребуются следующие понятия.

О п р е д е л е н и е 1 [7]. Семейство $(\pi_n^2, n \geq 1)$ является экспоненциально плотным в (S^2, ρ^2) , если найдется последовательность компактов $K_j^2 \in S^2$, $j \geq 1$, такая, что

$$\limsup_n \frac{1}{n} \ln P\{\pi_n^2 \in S^2 \setminus K_j^2\} = -\infty. \quad (1.6)$$

О п р е д е л е н и е 2 [8]. Семейство $(\pi_n^2, n \geq 1)$ удовлетворяет *частичному принципу больших отклонений* в (S^2, ρ^2) , если всякая бесконечная подпоследовательность $(\pi_{n'}^2)$ последовательности (π_n^2) содержит подпоследовательность $(\pi_{n''}^2)$, удовлетворяющую п.б.у. в (S^2, ρ^2) с некоторым функционалом действия $\tilde{J}^2 = \tilde{J}^2(\lambda)$.

О п р е д е л е н и е 3 (ср. с [9]). Семейство $(\pi_n^2, n \geq 1)$ удовлетворяет *локальному п.б.у.* в (S^2, ρ^2) , если для любого $\lambda \in S^2$

$$\begin{aligned} & \liminf_{\delta \rightarrow 0} \liminf_n \frac{1}{n} \ln P\{\rho^2(\pi_n^2, \lambda) \leq \delta\} \\ &= \limsup_{\delta \rightarrow 0} \limsup_n \frac{1}{n} \ln P\{\rho^2(\pi_n^2, \lambda) \leq \delta\} \quad (= -I(\lambda)). \end{aligned} \quad (1.7)$$

В теореме 2.1 при условиях (H^*) и (H_0) устанавливается экспоненциальная плотность семейства $(\pi_n^2, n \geq 1)$. Комбинация теорем 3.1 и 4.1 дает локальный п.б.у. для этого семейства с

$$I(\lambda) \equiv J^2(\lambda). \quad (1.8)$$

Связующим звеном при доказательстве теоремы 1.2 служит теорема Пухальского [8], которую удобно представить здесь в виде импликации:

$$\text{«экспоненциальная плотность»} \iff \text{«частичный п.б.у.»}. \quad (1.9)$$

Итак, схема доказательства теоремы 1.2 выглядит следующим образом.

По теореме 2.1 $(\pi_n^2, n \geq 1)$ — экспоненциально плотное семейство. По теореме Пухальского можно взять подпоследовательность $(\pi_{\tilde{n}}^2)$, удовлетворяющую п.б.у. с функционалом действия $\tilde{J}^2(\lambda)$, являющимся полунепрерывной снизу функцией. Эти факты влекут за собой локальный п.б.у. для $(\pi_{\tilde{n}}^2)$: для любого $\lambda \in S^2$

$$\begin{aligned} & \liminf_{\delta \rightarrow 0} \liminf_{\tilde{n}} \frac{1}{\tilde{n}} \ln P\{\rho^2(\pi_{\tilde{n}}^2, \lambda) \leq \delta\} \\ &= \limsup_{\delta \rightarrow 0} \limsup_{\tilde{n}} \frac{1}{\tilde{n}} \ln P\{\rho^2(\pi_{\tilde{n}}^2, \lambda) \leq \delta\} \quad (= -\tilde{J}^2(\lambda)). \end{aligned} \quad (1.10)$$

Очевидное неравенство

$$\liminf_n \leq \liminf_{\tilde{n}} \leq \limsup_{\tilde{n}} \leq \limsup_n \quad (1.11)$$

и (1.7), (1.8), (1.10) приводят к тождеству

$$\tilde{J}^2(\lambda) \equiv J^2(\lambda), \quad (1.12)$$

т.е. $J^2(\lambda)$ — функционал действия (этот же прием использовался в [10]).

Верхние и нижние оценки теоремы 1.2 устанавливаются также с привлечением теоремы Пухальского.

По поводу других подходов к установлению п.б.у. для семейств (π_n) и (π_n^2) см. [11]–[14].

6. Как отмечалось выше, равенство (1.8) вытекает из теорем 3.1 и 4.1 для верхних и нижних оценок локального п.б.у. семейства $(\pi_n^2, n \geq 1)$. Доказательство нижней оценки требует лишь условий (I') и (RM') и использует стандартный прием локально абсолютно непрерывной замены меры, предложенный в работах Донскера и Варадана [1], [2], и идею регуляризации из недавней работы Ву [15]. По этому же поводу следует отметить работу Джейна [16].

Доказательство верхней оценки локального п.б.у. семейства $(\pi_n^2, n \geq 1)$ требует свойства феллеровости (F) и опирается на экспоненциальную плотность этого семейства.

2. Экспоненциальная плотность семейства $(\pi_n^2, n \geq 1)$

В соответствии с определением 1 достаточно проверить (1.6). Чтобы сделать это, нам потребуется ряд вспомогательных результатов.

Возьмем положительную убывающую функцию $\gamma = \gamma(y)$, $y \geq 0$, такую, что $\lim_{y \rightarrow \infty} \gamma(y) = 0$, и положим

$$K_j^2 = \bigcap_{i \geq j} \left\{ \lambda \in S^2: \int_{(|x| > i) \cup (|y| > i)} \lambda(dx, dy) \leq \gamma(i) \right\}. \quad (2.1)$$

Множество K_j^2 является плотным и, в силу теоремы Прохорова (см. [17]), относительно компактным. Поскольку $\{x, y: (|x| > l) \cup (|y| > l)\}$ — открытое множество, предел любой сходящейся последовательности из K_j^2 принадлежит K_j^2 , т.е. K_j^2 — компакт. Очевидно, что $K_j^2 \subseteq K_{j+1}^2$.

Для $j \geq 1$ и $\lambda \in S^2$ положим

$$L(j, \lambda) = \min \left\{ i \geq j: \int_{(|x| > i) \cup (|y| > i)} \lambda(dx, dy) > \gamma(i) \right\}. \quad (2.2)$$

Лемма 2.1. Семейство $(\pi_n^2, n \geq 1)$ экспоненциально плотно в (S^2, ρ^2) , если

$$\lim_j \limsup_n \frac{1}{n} \ln P\{L(j, \pi_n^2) < \infty\} = -\infty. \quad (2.3)$$

Доказательство. Возьмем компакт K_j^2 , определенный в (2.1), и заметим, что

$$\{\pi_n^2 \in S^2 \setminus K_j^2\} = \{L^2(j, \pi_n) < \infty\}.$$

Тогда (1.6) является следствием (2.3).

Лемма 2.2. Для любых измеримых множеств A_n , $n \geq 1$, и $B_{n,i}$, $n \geq 1, i \geq 1$, со свойством $\lim_{i \rightarrow \infty} \limsup_n (1/n) \ln P(B_{n,i}) = -\infty$ имеет

место равенство

$$\limsup_n \frac{1}{n} \ln P(A_n) = \limsup_{i \rightarrow \infty} \limsup_n \frac{1}{n} \ln P(A_n, \Omega \setminus B_{n,i}).$$

Доказательство. Требуемый результат вытекает из очевидных неравенств $P(A_n) \geq P(A_n, \Omega \setminus B_{n,i})$; $P(A_n) \leq 2[P(A_n, \Omega \setminus B_{n,i}) \vee P(B_{n,i})]$.

Теорема 2.1. Пусть выполнены условия (H^*) и (H_0) . Тогда семейство $(\pi_n^2, n \geq 1)$ экспоненциально плотно в (S^2, ρ^2) .

Доказательство. Возьмем

$$\gamma(y) = \frac{1}{\sqrt{\inf_{|x| > y} [w(x) - w_*]}}, \quad (2.4)$$

где $w(x)$ — функция из условия (H^*) , и покажем, что соотношение (2.3) выполняется с этой функцией $\gamma(y)$.

В силу условия (H_0) и неравенства Чебышева

$$P\{u(\xi_0) > in\} \leq e^{-(in)b} \int_{\mathbf{R}} e^{bu(x)} \alpha_0(dx).$$

Следовательно, для $B_{n,i} = \{v(\xi_0) > in\}$

$$\limsup_n \frac{1}{n} \ln P(B_{n,i}) \leq -ib \rightarrow -\infty, \quad i \rightarrow \infty.$$

Поэтому в силу лемм 2.1 и 2.2 экспоненциальная плотность семейства $(\pi_n^2, n \geq 1)$ будет иметь место, если

$$\lim_i \limsup_j \limsup_n \frac{1}{n} \ln P\{L(j, \pi_n^2) < \infty, v(\xi_0) \leq in\} = -\infty. \quad (2.5)$$

Для того, чтобы проверить (2.5), воспользуемся включениями (напомним, что $L(j, \pi_n^2) \geq j$):

$$\begin{aligned} \{L(j, \pi_n^2) < \infty\} &\subseteq \left\{ \int_{(|x| > L(j, \pi_n^2)) \cup (|y| > L(j, \pi_n^2))} \pi_n^2(dx, dy) > \gamma(L(j, \pi_n^2)) \right\} \\ &\subseteq \left\{ \int_{|x| > L(j, \pi_n^2)} \int_{\mathbf{R}} \pi_n^2(dx, dy) + \int_{\mathbf{R}} \int_{|y| > L(j, \pi_n^2)} \pi_n^2(dx, dy) > \gamma(L(j, \pi_n^2)) \right\} \\ &\subseteq \left\{ 2 \int_{|x| > L(j, \pi_n^2)} \int_{\mathbf{R}} \pi_n(dx) + \frac{1}{n} I(|\xi_0| > L(j, \pi_n^2)) > \gamma(L(j, \pi_n^2)) \right\}. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Тогда (2.5) выполняется при условии, что

$$\begin{aligned} \limsup_j \limsup_n \frac{1}{n} \ln P \left\{ \int_{|x| > j} \pi_n(dx) + \frac{1}{2n} I(|\xi_0| > L(j, \pi_n^2)) \right. \\ \left. > \gamma(L(j, \pi_n^2)), u(\xi_0) \leq in \right\} = -\infty. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Положим $Z_n = \prod_{k=0}^{n-1} [e^{v(\xi_{k+1})} / \mathbf{E} e^{v(\xi_{k+1})} | \xi_k]$, где $v(x)$ — функция из условия (H^*) . В силу марковского свойства:

$$\mathbf{E}(e^{v(\xi_{k+1})} | \xi_k) = \mathbf{E}(e^{v(\xi_{k+1})} | \xi_0, \dots, \xi_k) \quad \text{Р-п.н.}$$

и, значит, имеют место равенство $\mathbf{E} Z_n = 1$ и очевидное неравенство

$$\begin{aligned} 1 &\geq \mathbf{E} I \left(\int_{|x| > L(j, \pi_n^2)} \pi_n(dx) + \frac{1}{2n} I(|\xi_0| > L(j, \pi_n^2)) \right) \\ &> \gamma(L(j, \pi_n^2), u(\xi_0) \leq in) Z_n. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Из определения Z_n и $w(x)$ (см. (H^*)) следует, что

$$\begin{aligned} \ln Z_n &= \sum_{k=1}^n v(\xi_k) - \sum_{k=1}^n \ln \int_{\mathbf{R}} e^{v(y)} \pi(\xi_{k-1}, dy) = v(\xi_n) - v(\xi_0) + \sum_{k=1}^n w(\xi_{k-1}) \\ &= v(\xi_n) - v(\xi_0) + nw_* + n \int_{\mathbf{R}} [w(x) - w_*] \pi_n(dx). \end{aligned}$$

Оценим снизу $\ln Z_n$ на множестве

$$\left\{ \int_{|x| > L(j, \pi_n^2)} \pi_n(dx) + \frac{1}{2n} I(|\xi_0| > L(j, \pi_n^2)) > \gamma(L(j, \pi_n^2)) \right\}.$$

Имеем (напомним, что $L(j, \pi_n^2) \geq j$):

$$\begin{aligned} \ln Z_n &\geq -v(\xi_0) + nw_* + n \inf_{|y| > L(j, \pi_n^2)} [w(x) - w_*] \frac{1}{2} \gamma(L(j, \pi_n^2)) \\ &\quad - \frac{1}{2n} I(|\xi_0| > L(j, \pi_n^2)) \geq - \left[v(\xi_0) + \frac{1}{2} \inf_{|y| > |\xi_0|} [w(x) - w_*] \right] \\ &\quad + \frac{\inf_{|y| > L(j, \pi_n^2)} [w(x) - w_*]}{\sqrt{\inf_{|y| > L(j, \pi_n^2)} [w(x) - w_*]}} + nw_* \\ &= -u(\xi_0) + \frac{n}{2} \sqrt{\inf_{|y| > j} [w(x) - w_*]} + nw_* \\ &\geq -in + \frac{n}{2} \sqrt{\inf_{|y| > j} [w(x) - w_*]} + nw_*. \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \ln \mathbf{P} \left\{ \int_{|x| > L(j, \pi_n^2)} \pi_n(dx) + \frac{1}{2n} I(|\xi_0| > L(j, \pi_n^2)) > \gamma(L(j, \pi_n^2)) \right\} \\ \leq -i - \frac{1}{2} \sqrt{\inf_{|y| > j} [w(y) - w_*]} - w_* \rightarrow -\infty, \quad j \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

т.е. (2.7) имеет место.

Следствие. Справедливо соотношение

$$\lim_i \limsup_n \frac{1}{n} \ln \mathbf{P} \left\{ \int_{(|x| > i) \cup (|y| > i)} \pi_n^2(dx, dy) > q \right\} = -\infty, \quad q > 0.$$

3. Верхняя оценка в локальном п.б.у. для $\pi_n^2, n \geq 1$

Теорема 3.1. Пусть выполнены условия (F), (H*) и (H₀). Тогда для любой меры $\lambda \in S^2$

$$\limsup_{\delta \rightarrow 0} \limsup_n \frac{1}{n} \ln P \{ \rho^2(\pi_n^2, \lambda) \leq \delta \} \leq - \begin{cases} \infty, & \text{маргиналы } \lambda \text{ различны,} \\ H(\lambda | \lambda_\mu^\circ), & \text{маргиналы } \lambda \text{ совпадают } (= \mu), \end{cases}$$

где $H(\lambda | \lambda_\mu^\circ)$ — условная энтропия, определенная в (1.3).

Для доказательства этой теоремы используется ряд вспомогательных результатов, приводимых ниже в виде лемм.

Пусть P и Q — вероятностные меры на некотором измеримом пространстве $(\Omega, \mathcal{F})$. Введем множество неотрицательных $\mathcal{F}$ -измеримых функций

$$\mathcal{U}^m(Q) = \left\{ u(\omega) : \int_{\Omega} u(\omega) dQ = 1 \right\}.$$

В соответствии с (1.3) условная энтропия $H(P|Q)$ меры P относительно меры Q определяется следующим образом:

$$H(P|Q) = \begin{cases} \int_{\Omega} \ln \frac{dP}{dQ}(\omega) dP, & P \ll Q, \\ \infty, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Определим выпуклую вниз неотрицательную непрерывную функцию

$$V(x) = \begin{cases} x \ln x + 1 - x, & x > 0, \\ 1, & x = 0. \end{cases}$$

Тогда, очевидно, имеет место формула

$$H(P|Q) = \begin{cases} \int_{\Omega} V\left(\frac{dP}{dQ}(\omega)\right) dQ, & P \ll Q, \\ \infty, & \text{в остальных случаях.} \end{cases} \quad (3.1)$$

Для функции $u \in \mathcal{U}^m$ обозначим $G(u) = \int_{\Omega} \ln u(\omega) dP$.

Хорошо известно (см. [2]), что в этом случае

$$H(P|Q) = \sup_{u \in \mathcal{U}^m} G(u).$$

Действительно, при $P \ll Q$ ($h = dP/dQ$) для любой функции $u \in \mathcal{U}^m(Q)$ имеем $G(u) = \int_{\Omega} h \ln u dQ = \int_{\Omega} (h \ln u + 1 - u) dQ$ и, поскольку при $x \geq 0$

$$\sup_{y \geq 0} x \ln y + 1 - y = V(x),$$

имеет место неравенство $G(u) \leq \int_{\Omega} V(h) dQ = G(h)$, т.е. $\sup_{u \in \mathcal{U}^m} G(u)$ достигается в точке $h \in \mathcal{U}^m(Q)$.

Если предположение $P \ll Q$ не выполняется, обозначим P^s сингулярную часть меры P относительно Q . Мера P^s выделяет такое множество Γ , что $Q(\Gamma) = 0$ и $P^s(\Omega \setminus \Gamma) = 0$. Возьмем $u_N(\omega) = 1 + NI_\Gamma(\omega)$, принадлежащее $\mathcal{U}^m(Q)$. Имеем:

$$\begin{aligned} G(u_N) &= \int_{\Omega} \ln(1 + NI_\Gamma(\omega)) dP \geq \int_{\Omega} \ln(1 + NI_\Gamma(\omega)) dP^s \\ &= \ln(1 + N) \rightarrow \infty, \quad N \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

В применении к рассматриваемому нами случаю далее будет использоваться следующая лемма.

Лемма 3.1. Пусть $\Omega = \mathbf{R}^2$. Тогда

$$H(P|Q) = \sup_{u \in \mathcal{U}^c(Q)} G(u),$$

где $\mathcal{U}^c(Q)$ — подмножество $\mathcal{U}^m(Q)$ непрерывных функций.

Доказательство. Предположим, что $P \ll Q$ с $h(\omega) = (dP/dQ)(\omega)$. Обозначим

$$\begin{aligned} f_N(\omega) &= h(\omega) I_{[N^{-1}, N]}(h(\omega)) + (1 - I_{[N^{-1}, N]}(h(\omega))), \\ c_N &= \left(\int_{\Omega} f_N dQ \right)^{-1}, \quad h_N(\omega) = c_N f_N(\omega). \end{aligned}$$

Очевидно, $h_N \in \mathcal{U}^m(Q)$ и

$$\begin{aligned} G(h_N) &= \int_{\Omega} \ln h_N(\omega) dP = \int_{\Omega} h(\omega) \ln h_N(\omega) dQ \\ &= \ln c_N + \int_{1/N < h(\omega) \leq N} h(\omega) \ln h(\omega) dQ \\ &= \ln c_N + \int_{1/N < h(\omega) \leq 1} h(\omega) \ln h(\omega) dQ + \int_{1 < h(\omega) \leq N} h \ln h(\omega) dQ. \end{aligned}$$

Поскольку $\lim_N c_N = 1$, по теореме Лебега о мажорируемой сходимости

$$\lim_N \int_{1/N < h(\omega) \leq 1} h(\omega) \ln h(\omega) dQ = \int_{h(\omega) \leq 1} h(\omega) \ln h(\omega) dQ$$

и по теореме Беппо Леви

$$\lim_N \int_{1 < h(\omega) \leq N} h(\omega) \ln h(\omega) dQ = \int_{1 < h(\omega)} h(\omega) \ln h(\omega) dQ,$$

то

$$\lim_N G(h_N) = G(h).$$

Для фиксированного N выберем последовательность $u_{N,n}, n \geq 1$, непрерывных функций такую, что $1/(2N) \leq u_{N,n} \leq 2N$, $Q\text{-}\lim_n u_{N,n} = h_N$ (и,

следовательно, $\lim_n \int_{\Omega} u_{N,n} dQ = 1$). Положим $\bar{u}_{N,n} = u_{N,n} / \int_{\Omega} u_{N,n} dQ$ и заметим, что $\bar{u}_{N,n} \in \mathcal{U}^c(Q)$. В силу $P \ll Q$, P - $\lim_n u_{N,n} = h_N$. Тогда по теореме Лебега о мажорируемой сходимости $\lim_n G(u_{N,n}) = G(h_N)$. Поэтому для любого $\varepsilon > 0$ найдутся величины $N(\varepsilon)$ и $n(\varepsilon)$ такие, что $G(h_{N(\varepsilon)}) + \varepsilon \geq G(h)$ и $G(\bar{u}_{N(\varepsilon),n(\varepsilon)}) + \varepsilon \geq G(h_{N(\varepsilon)})$.

Таким образом, для любого $\varepsilon > 0$ существует функция $u_{\varepsilon} = \bar{u}_{N(\varepsilon),n(\varepsilon)} \in \mathcal{U}^c(Q)$ со свойством $G(u_{\varepsilon}) + 2\varepsilon \geq G(h) = H(P|Q)$, т.е. при условии $P \ll Q$ требуемый результат имеет место.

Если условие $P \ll Q$ не выполняется, то при фиксированном N выберем последовательность $u_{N,n}$, $n \geq 1$, с $u_{N,n} \in \mathcal{U}^c$, $\frac{1}{2} \leq u_{N,n} \leq 2N$, $n \geq 1$, P^s - $\lim_n u_{N,n} = u_N$ с определенной выше функцией $u_N(\omega) = 1 + NI_{\Gamma}(\omega)$.

Тогда

$$\begin{aligned} G(u_{N,n}) &= \int_{\Omega} \ln u_{N,n} dP = \int_{\Omega} \ln \left[\left(u_{N,n} + \frac{1}{2} \right) - \frac{1}{2} \right] dP \\ &\geq \int_{\Omega} \ln \left(u_{N,n} + \frac{1}{2} \right) dP - \ln 2 \geq \int_{\Omega} \ln \left(u_{N,n} + \frac{1}{2} \right) dP^s - \ln 2. \end{aligned}$$

Следовательно, $\liminf_n G(u_{N,n}) \geq \ln(\frac{3}{2} + N) - \ln 2$, т.е. $\sup_{u \in \mathcal{U}^c} G(u) = \infty$.

Лемма 3.2. Пусть $\lambda_{\alpha\beta}$ и $\lambda_{\mu\nu}$ — вероятностные меры из $\mathbf{S}^2$ с маргиналами α , β и μ , ν . Тогда

$$\rho^2(\lambda_{\alpha\beta}, \lambda_{\mu\nu}) \geq \begin{cases} \rho(\alpha, \mu) \\ \rho(\beta, \nu) \end{cases}$$

и для любого $\delta > 0$

$$\{\rho^2(\lambda_{\alpha\beta}, \lambda_{\mu\nu}) \leq \delta\} \subseteq \{\rho(\mu, \nu) \leq 2\delta + \rho(\alpha, \beta)\}.$$

Доказательство. Обозначим $F_{\alpha\beta}$ и $F_{\mu\nu}$ функции распределения мер $\lambda_{\alpha\beta}$ и $\lambda_{\mu\nu}$. По определению $\rho^2(\lambda_{\alpha\beta}, \lambda_{\mu\nu})$ и $\rho(\alpha, \mu)$ имеем:

$$\begin{aligned} \rho^2(\lambda_{\alpha\beta}, \lambda_{\mu\nu}) &= \sup_{x,y} \min [u: F_{\alpha\beta}(x-u, y-u) - u \\ &\leq F_{\mu\nu}(x, y) \leq F_{\alpha\beta}(x+u, y+u) + u] \\ &\geq \sup_x \min [u: F_{\alpha\beta}(x-u, \infty) - u \\ &\leq F_{\mu\nu}(x, \infty) \leq F_{\alpha\beta}(x+u, \infty) + u] = \rho(\alpha, \mu) \end{aligned}$$

и, аналогично, $\rho^2(\lambda_{\alpha\beta}, \lambda_{\mu\nu}) \geq \rho(\beta, \nu)$.

Следовательно,

$$\{\rho^2(\lambda_{\alpha\beta}, \lambda_{\mu\nu}) \leq \delta\} \subseteq \{\rho(\alpha, \mu) \leq \delta\} \cap \{\rho(\beta, \nu) \leq \delta\}.$$

По неравенству треугольника $\rho(\alpha, \beta) \leq \rho(\alpha, \mu) + \rho(\mu, \beta)$ и $\rho(\mu, \nu) \leq \rho(\mu, \beta) + \rho(\beta, \nu)$ и, значит,

$$\{\rho^2(\lambda_{\alpha\beta}, \lambda_{\mu\nu}) \leq \delta\} \subseteq \{\rho(\beta, \mu) \leq \delta + \rho(\alpha, \beta)\} \cap \{\rho(\beta, \nu) \leq \delta + \rho(\alpha, \beta)\}$$

$$\subseteq \left\{ \rho(\mu, \nu) \leq 2(\delta + \rho(\alpha, \beta)) \right\}.$$

Пусть ν_1 и ν_2 — вероятностные меры из S^2 и F_1 и F_2 — их функции распределения. Обозначим $a = \rho^2(\nu_1, \nu_2)$ и $x = (x_1, x_2)$.

Лемма 3.3. Если $f = f(x)$ — финитная непрерывно дифференцируемая функция (по $\partial^2/(\partial x_1 \partial x_2)$), то

$$\left| \int_{\mathbb{R}^2} f(x) [\nu_1(dx) - \nu_2(dx)] \right| \leq a \int_{\mathbb{R}^2} \left| \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} f(x) \right| dx + \int_{\mathbb{R}^2} \left| \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} f(x) \right| [F(x+a) - F(x-a)] dx,$$

где $F(x)$ — любая из функций $F_1(x)$ или $F_2(x)$.

Доказательство. Интегрируя по частям, получаем

$$\int_{\mathbb{R}^2} f(x) dF_i(x) = \int_{\mathbb{R}^2} \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} f(x) F_i(x) dx.$$

Тогда

$$\left| \int_{\mathbb{R}^2} f(x) [\nu_1(dx) - \nu_2(dx)] \right| \leq \int_{\mathbb{R}^2} \left| \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} f(x) \right| [F_1(x) - F_2(x)] dx.$$

По определению метрики Леви–Прохорова $F_1(x-a) - a \leq F_2(x)$ и $F_2(x) \leq F_1(x+a) + a$, т.е. требуемый результат имеет место с $F = F_1$: $|F_1(x) - F_2(x)| \leq a + |F_1(x+a) - F_1(x-a)|$.

Аналогичным образом устанавливается его справедливость при $F = F_2$.

Следствие. Если $f = f(x)$ — финитная непрерывная функция, то, равномерно аппроксимируя $f(x)$ функциями $f_\varepsilon(x)$ ($\sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x) - f_\varepsilon(x)| \leq \varepsilon/2$), удовлетворяющими условию леммы, приходим к оценке

$$\left| \int_{\mathbb{R}^2} f(x) [\nu_1(dx) - \nu_2(dx)] \right| \leq \varepsilon + a \int_{\mathbb{R}^2} \left| \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} f_\varepsilon(x) \right| dx + \int_{\mathbb{R}^2} \left| \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} f_\varepsilon(x) \right| [F(x+a) - F(x-a)] dx.$$

Следующая лемма играет важную роль при доказательстве теоремы 3.1.

Лемма 3.4. Пусть выполнены условия (F), (H*) и (H₀). Тогда для любой меры $\lambda \in S_{\mu\mu}$

$$\lim_{q \rightarrow 0} \limsup_i \limsup_{\delta \rightarrow 0} \limsup_n \frac{1}{n} \times \ln P \left\{ \rho^2(\pi_n^2, \lambda) \leq \delta, \int_{(|x|>i) \cup (|y|>i)} \pi_n^2(dx, dy) \leq q \right\} \leq -H(\lambda | \lambda_\mu^0).$$

Доказательство. Обозначим

$$A(n, i, q) = \left\{ \rho^2(\pi_n^2, \lambda) \leq \delta, \int_{(|x|>i) \cup (|y|>i)} \pi_n^2(dx, dy) \leq q \right\}.$$

Возьмем непрерывную финитную функцию $u(x, y)$ и определим

$$u(x, y) = \frac{e^{v(x, y)}}{\int_{\mathbf{R}} e^{v(x, z)} \pi(x, dz)}.$$

В силу условия (F), $u(x, y)$ — непрерывная ограниченная функция такая, что $\int_{\mathbf{R}^2} u(x, y) \lambda_\mu^\circ(dx, dy) = 1$, т.е. $u(x, y) \in \mathcal{U}^c(\lambda_\mu^\circ)$.

Положим $Z_n = \prod_{k=1}^n u(\xi_{k-1}, \xi_k)$. В силу марковского свойства

$$\mathbf{E}(u(\xi_{k-1}, \xi_k) | \xi_{k-1}) = \mathbf{E}(u(\xi_{k-1}, \xi_k) | \xi_{k-1}, \dots, \xi_0) \quad \text{Р-п.н.,}$$

получаем $\mathbf{E}Z_n = 1$ и очевидное неравенство

$$1 \geq \mathbf{E}I_{A(n, i, q)} Z_n. \quad (3.2)$$

На множестве $A(n, i, q)$ оценим снизу $\ln Z_n$. Имеем:

$$\begin{aligned} \ln Z_n &= \sum_{k=1}^n \ln u(\xi_{k-1}, \xi_k) = n \int_{\mathbf{R}^2} \ln u(x, y) \pi_n^2(dx, dy) \\ &\geq n \int_{\mathbf{R}^2} \ln u(x, y) \lambda(dx, dy) \\ &\quad - n \left| \int_{\mathbf{R}^2} \ln u(x, y) [\lambda(dx, dy) - \pi_n^2(dx, dy)] \right|. \end{aligned}$$

Выберем неотрицательную непрерывную функцию $\varphi_i(x, y)$ таким образом, чтобы $\varphi_i(x, y) = 1$ на $\{|x| \leq i-1\} \cap \{|y| \leq i-1\}$ и $\varphi_i(x, y) = 0$ на $\{|x| \geq i\} \cup \{|y| \geq i\}$. Тогда

$$\begin{aligned} \ln Z_n &\geq n \int_{\mathbf{R}^2} \ln u(x, y) \lambda(dx, dy) \\ &\quad - n \left| \int_{\mathbf{R}^2} \varphi_i(x, y) \ln u(x, y) [\lambda(dx, dy) - \pi_n^2(dx, dy)] \right| \\ &\quad - n \sup_{x, y} |\ln u(x, y)| \int_{(|x| \geq i) \cup (|y| \geq i)} \lambda(dx, dy) \\ &\quad - n \int_{(|x| \geq i) \cup (|y| \geq i)} \pi_n^2(dx, dy) \\ &= n \int_{\mathbf{R}^2} \ln u(x, y) \lambda(dx, dy) - nr'(i) - nr''(i) - nr'''(i, n). \end{aligned}$$

Обозначим $F(x, y)$ функцию распределения меры $\lambda(dx, dy)$. По следствию к лемме 3.3 получаем следующие оценки на множестве $A(n, i, q)$:

$$r'(i) \leq \varepsilon + \delta \int_{\mathbf{R}^2} \left| \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} f_\varepsilon(x, y) \right| dx dy$$

$$+ \int_{\mathbf{R}^2} \left| \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} f_\varepsilon(x, y) \right| [F(x + \delta, y + \delta) - F(x - \delta, y - \delta)] dx dy$$

$$(\leq \varepsilon + q'(i, \varepsilon)),$$

где $f_\varepsilon(x, y)$ является « $\varepsilon/2$ -аппроксимацией» функции $\varphi_i(x, y) \ln u(x, y)$.
Далее,

$$r''(i) = \sup_{x, y} |\ln u(x, y)| \int_{(|x| \geq i) \cup (|y| \geq i)} \lambda(dx, dy) \quad (= q''(i)),$$

$$r'''(i, n) \leq \sup_{x, y} |\ln u(x, y)| q.$$

Использование этих оценок и (3.2) приводит к неравенству

$$\frac{1}{n} \ln \mathbf{P}(A(n, i, q)) \leq - \int_{\mathbf{R}^2} \ln u(x, y) \lambda(dx, dy) + \varepsilon + q'(i, \varepsilon)$$

$$+ q''(i) + \sup_{x, y} |\ln u(x, y)| q,$$

согласно которому

$$\lim_{q \rightarrow 0} \limsup_i \limsup_{\delta \rightarrow 0} \limsup_n \frac{1}{n} \ln \mathbf{P}(A(n, i, q)) \leq \varepsilon - \int_{\mathbf{R}^2} \ln u(x, y) \lambda(dx, dy).$$

Таким образом, требуемый результат выводится, в силу произвольности ε , из леммы 3.1, поскольку $\sup_{u \in \mathcal{U}^c} \int_{\mathbf{R}^2} \ln u(x, y) \lambda(dx, dy) = H(\lambda | \lambda_\mu^\circ)$.

Доказательство теоремы 3.1. Предположим, что мера λ из $\mathbf{S}^2$ имеет разные маргиналы, скажем μ и ν . Обозначим π_n и π'_n маргиналы меры π_n^2 :

$$\pi_n(A) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n I(\xi_{k-1} \in A), \quad \pi'_n(A) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n I(\xi_k \in A).$$

Поскольку полная вариация $\|\pi_n - \pi'_n\| \leq 2/n$, то $\rho(\pi_n, \pi'_n) \leq 2/n$. По лемме 3.2 $\{\rho^2(\pi_n^2, \lambda) \leq \delta\} \subseteq \{\rho(\mu, \nu) \leq 2\delta + 2/n\}$ и, значит, при $2\delta + 2/n \leq \rho(\mu, \nu)$ выполнено соотношение $\ln \mathbf{P}\{\rho(\pi_n^2, \lambda) \leq \delta\} = -\infty$, т.е. эта часть утверждения доказана.

Рассмотрим случай меры λ из $\mathbf{S}^2$ с одинаковыми маргиналами. Обозначим

$$A(n) = \{\rho^2(\pi_n^2, \lambda) \leq \delta\}$$

и

$$B(n, i, q) = \left\{ \int_{(|x| > i) \cup (|y| > i)} \pi_n^2(dx, dy) > q \right\}.$$

Требуемый результат вытекает из леммы 3.4, следствия к теореме 2.1 и леммы 2.2, которая может быть переформулирована следующим обра-

зом: при $\lim_{q \rightarrow 0} \limsup_i \limsup_n \frac{1}{n} \ln P(B(n, i, q)) = -\infty$

$$\begin{aligned} & \limsup_{\delta \rightarrow 0} \limsup_n \frac{1}{n} \ln P(A(n)) \\ &= \lim_{q \rightarrow 0} \limsup_i \limsup_{\delta \rightarrow 0} \limsup_n \frac{1}{n} \ln P(A(n), \Omega \setminus B(n, i, q)), \end{aligned}$$

если заметить, что $A(n) \cap (\Omega \setminus B(n, i, q)) = A(n, i, q)$.

4. Нижняя оценка в локальном п.б.у. для π_n^2 , $n \geq 1$

Теорема 4.1. Пусть выполнены условия (I') и (RM'). Тогда для любого $\lambda \in S^2$ и $\delta > 0$

$$\liminf_n \frac{1}{n} \ln P\{\rho^2(\pi_n^2, \lambda) \leq \delta\} \geq -J^2(\lambda).$$

Доказательство этой теоремы состоит из нескольких этапов, сформулированных ниже в виде лемм.

Лемма 4.1. Пусть выполнены условия (I') и (RM'). Тогда меры α и l эквивалентны ($\alpha \sim l$).

Доказательство. В силу условий (I') и (RM'),

$$\alpha(dy) = l(dy) \int_{\mathbf{R}} p'(y|x) \alpha(dx), \quad (4.1)$$

т.е. $\alpha \ll l$. Заметим, что $d\alpha/dl > 0$ l -п.н. Тогда, в силу разложения Лебега меры l относительно α , имеет место $l \ll \alpha$.

Лемма 4.2. Пусть выполнены условия (I') и (RM'). Тогда

$$p(x|y) = \frac{d\lambda'}{d\lambda_\alpha^\circ}(x, y) p'(y|x) \quad (l \times \alpha)\text{-п.н.}$$

и $p(y|x) > 0$ $(l \times \alpha)$ -п.н.

Доказательство. В силу (I'), $\lambda' \sim \lambda_\alpha^\circ$ и, значит,

$$\pi(x, dy) \alpha(dx) = \frac{d\lambda_\alpha^\circ}{d\lambda'}(x, y) p'(y|x) l(dy) \alpha(dx).$$

Первое утверждение имеет место, поскольку $\pi(x, dy) = p(y|x) l(dy)$ при каждом x . Чтобы доказать второе, достаточно показать, что $d\lambda_\alpha^\circ/d\lambda' > 0$ $(l \times \alpha)$ -п.н. Воспользуемся тем, что $d\lambda_\alpha^\circ/d\lambda' > 0$ λ' -п.н., $\lambda'(dx, dy) = p'(y|x) l(dy) \alpha(dx)$ и $p'(y|x) > 0$ $(l \times \alpha)$ -п.н. Тогда $\lambda'(A) = 0$ влечет за собой $(l \times \alpha)(A) = 0$, т.е. $(l \times \alpha) \ll \lambda'$, и имеет место требуемое неравенство.

Лемма 4.3. Пусть выполнены условия (I') и (RM') и $H(\lambda|\lambda_\mu^\circ) < \infty$ для $\lambda \in S_{\mu\mu}$. Тогда мера μ абсолютно непрерывна относительно l ($\mu \ll l$).

Доказательство. В силу (1.3), $H(\lambda|\lambda_\mu^\circ) < \infty$ влечет за собой $\lambda' \ll \lambda_\mu^\circ$. По определению меры λ_μ° и условию (RM') имеем $\lambda_\mu^\circ(dx, dy) =$

$p(y|x)l(dy)\mu(dx)$. Пусть $l(A) = 0$. Тогда

$$\lambda_\mu^\circ(\mathbf{R} \times A) = \int_A \int_{\mathbf{R}} p(y|x) \mu(dx) l(dy) = 0.$$

Следовательно, $\mu(A) = \lambda(\mathbf{R} \times A) = 0$.

Лемма 4.4. Пусть $\eta = (\eta_k)_{k \geq 0}$ есть стационарный марковский процесс, принимающий значения в $\mathbf{R}$, с маргинальным распределением $\mu(dx)$. Если переходная вероятность $\pi_\mu(x, dy)$ этого марковского процесса имеет условную плотность $p_\mu(y|x)$ относительно некоторой σ -конечной меры l :

$$\pi_\mu(x, dy) = p_\mu(y|x)l(dy) \quad \mu\text{-п.н.}, \quad p_\mu(y|x) > 0 \quad (l \times \mu)\text{-п.н.},$$

то η есть μ -эргодический процесс.

Доказательство. Согласно теореме 4 (см. [18, гл. 4, § 1]), μ -эргодичность процесса η имеет место, если уравнение

$$f(x) = \int_{\mathbf{R}} f(y) \pi_\mu(x, dy) \quad \mu\text{-п.н.} \quad (4.2)$$

имеет единственное μ -п.н. (с точностью до мультипликативной константы) ограниченное решение.

Пусть $f(x)$ — какое-нибудь решение уравнения (4.2). Покажем сначала, что

$$\mu\{x: \text{sign } f(x) = \text{const}\} = 1. \quad (4.3)$$

Поскольку μ — инвариантная мера, то

$$\mu(dy) = l(dy) \int_{\mathbf{R}} p_\mu(y|x) \mu(dx). \quad (4.4)$$

Из (4.2) и (4.4) вытекает, что

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{R}} |f(x)| \mu(dx) &= \int_{\mathbf{R}} \left| \int_{\mathbf{R}} f(y) p_\mu(y|x) l(dy) \right| \mu(dx) \\ &\leq \int_{\mathbf{R}} \int_{\mathbf{R}} |f(y)| p_\mu(y|x) l(dy) \mu(dx) = \int_{\mathbf{R}} |f(y)| \mu(dy) \end{aligned}$$

и, следовательно,

$$\int_{\mathbf{R}} \left\{ \int_{\mathbf{R}} |f(y)| p_\mu(y|x) l(dy) - \left| \int_{\mathbf{R}} f(y) p_\mu(y|x) l(dy) \right| \right\} \mu(dx) = 0.$$

Последнее равенство означает, что μ -п.н.

$$\int_{f^+(y) > 0} f^+(y) p_\mu(y|x) l(dy) \int_{f^-(y) > 0} f^-(y) p_\mu(y|x) l(dy) = 0, \quad (4.5)$$

где $a^+ = \max(0, a)$, $a^- = -\min(a, 0)$. По лемме 4.1 $l \sim \mu$. Следовательно, нарушение (4.3) противоречит (4.5), т.е. (4.3) выполняется.

Пусть $f_1(x)$ и $f_2(x)$ — решения уравнения (4.2). Тогда $f(x) = c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x)$ также является решением этого уравнения при любых константах c_1 и c_2 , которые могут быть выбраны таким образом, чтобы нарушить (4.3). Значит (4.2) имеет единственное решение.

Лемма 4.5. Пусть выполнены условия (I') и (RM'). Для любой меры $\lambda \in S_{\mu\mu}$ с $H(\lambda|\lambda_\mu^0) < \infty$ существуют семейства $\lambda^\varepsilon \in S^2$, $\mu(\varepsilon) \in S$, $\varepsilon \in (0, 1)$, такие, что $\lambda^\varepsilon \in S_{\mu(\varepsilon)\mu(\varepsilon)}$ при любом ε и

1. $\lambda^\varepsilon \sim \lambda_{\mu(\varepsilon)}^0$,
2. $H(\lambda^\varepsilon|\lambda_{\mu(\varepsilon)}^0) < \infty$,
3. $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \rho^2(\lambda^\varepsilon, \lambda) = 0$,
4. $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} H(\lambda^\varepsilon|\lambda_{\mu(\varepsilon)}^0) = H(\lambda|\lambda_\mu^0)$.

Доказательство. Пусть λ' — мера из условия (I') с маргиналами α . Положим

$$\mu(\varepsilon) = (1 - \varepsilon)\mu + \varepsilon\alpha, \quad \lambda^\varepsilon = (1 - \varepsilon)\lambda + \varepsilon\lambda', \quad \lambda_{\mu(\varepsilon)}^0 = (1 - \varepsilon)\lambda_\mu^0 + \varepsilon\lambda_\alpha^0$$

и заметим, что маргиналами мер λ^ε являются $(1 - \varepsilon)\mu + \varepsilon\alpha = \mu(\varepsilon)$.

1. Пусть $\lambda_{\mu(\varepsilon)}^0(A) = 0$. Тогда $\lambda_\mu^0(A) = 0$ и $\lambda_\alpha^0(A) = 0$. Поскольку $H(\lambda|\lambda_\mu^0) < \infty$, то $\lambda \ll \lambda_\mu^0$ и, значит, $\lambda(A) = 0$. По условию (I') $\lambda' \sim \lambda_\alpha^0$, что влечет за собой $\lambda'(A) = 0$. Следовательно, $\lambda^\varepsilon(A) = 0$.

С другой стороны, если $\lambda^\varepsilon(A) = 0$, то $\lambda(A) = 0$ и $\lambda'(A) = 0$, а из эквивалентности мер λ' и λ_α^0 следует, что $\lambda_\alpha^0(A) = 0$. Поэтому равенство $\lambda_{\mu(\varepsilon)}^0(A) = 0$ будет иметь место, если $\lambda_\mu^0(A) = 0$. Последнее равенство выполняется, поскольку $\lambda_\alpha^0(A) = 0$ и, в силу представлений $\lambda_\alpha^0(dx, dy) = p(y|x)l(dy)\alpha(dx)$ и $\lambda_\mu^0(dx, dy) = p(y|x)l(dy)\mu(dx)$ и абсолютной непрерывности $\mu \ll \alpha$ (лемма 4.3)), имеет место $\lambda_\mu^0 \ll \lambda_\alpha^0$.

Итак, $\lambda^\varepsilon \sim \lambda_{\mu(\varepsilon)}^0$.

2. Очевидно, $\mu \ll \mu(\varepsilon)$ и $\alpha \ll \mu(\varepsilon)$. Обозначим

$$h_\alpha(x, y) = \frac{d\lambda'}{d\lambda_\alpha^0}(x, y), \quad h(x, y) = \frac{d\lambda}{d\lambda_\mu^0}(x, y),$$

$$g_\mu(x) = (1 - \varepsilon) \frac{d\mu}{d\mu(\varepsilon)}(x), \quad g(x) = \varepsilon \frac{d\alpha}{d\mu(\varepsilon)}(x).$$

Тогда

$$\frac{d\lambda^\varepsilon}{d\lambda_{\mu(\varepsilon)}^0}(x, y) = h(x, y)g(x) + h_\alpha(x, y)g_\mu(x) \quad (= h^\varepsilon(x, y)).$$

По определению условной энтропии (см. (3.1))

$$H(\lambda^\varepsilon|\lambda_{\mu(\varepsilon)}^0) = \int_{\mathbf{R}^2} V(h^\varepsilon(x, y)) \lambda_{\mu(\varepsilon)}^0(dx, dy). \quad (4.6)$$

Из определения функций $g(x)$ и $g_\alpha(x)$ следует, что $g(x) + g_\alpha(x) = 1$ $\mu(\varepsilon)$ -п.н. и, значит, $\lambda_{\mu(\varepsilon)}^0$ -п.н. Функция $V(x)$ выпукла вниз. Поэтому по

неравенству Йенсена

$$V(h^\varepsilon(x, y)) \leq g_\mu(x) V(h(x, y)) + g(x) V(h_\alpha(x, y)) \quad \lambda_{\mu(\varepsilon)}^\circ\text{-п.н.} \quad (4.7)$$

и, следовательно, с учетом (3.1) имеет место неравенство

$$\begin{aligned} H(\lambda^\varepsilon | \lambda_{\mu(\varepsilon)}^\circ) &\leq (1 - \varepsilon) \int_{\mathbf{R}^2} V(h(x, y)) \frac{d\mu}{d\mu(\varepsilon)} \lambda_{\mu(\varepsilon)}^\circ(dx, dy) \\ &\quad + \varepsilon \int_{\mathbf{R}^2} V(h_\alpha(x, y)) \frac{d\alpha}{d\mu(\varepsilon)} \lambda_{\mu(\varepsilon)}^\circ(dx, dy) \\ &= (1 - \varepsilon) \int_{\mathbf{R}^2} V(h(x, y)) \lambda_\mu^\circ(dx, dy) \\ &\quad + \varepsilon \int_{\mathbf{R}^2} V(h_\alpha(x, y)) \lambda_\alpha^\circ(dx, dy) \\ &= (1 - \varepsilon) H(\lambda | \lambda_\mu^\circ) + \varepsilon H(\lambda' | \lambda_\alpha^\circ) < \infty. \end{aligned} \quad (4.8)$$

3. Из определения λ^ε получаем, что полная вариация $\|\lambda^\varepsilon - \lambda\| \leq 2\varepsilon$, т.е. $\rho^2(\lambda^\varepsilon, \lambda) \rightarrow 0$, $\varepsilon \rightarrow 0$.

4. Неравенство (4.8) влечет за собой неравенство

$$\limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} H(\lambda^\varepsilon | \lambda_{\mu(\varepsilon)}^\circ) \leq H(\lambda | \lambda_\mu^\circ).$$

Обратное неравенство $\liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} H(\lambda^\varepsilon | \lambda_{\mu(\varepsilon)}^\circ) \geq H(\lambda | \lambda_\mu^\circ)$ выводится из (4.6) с помощью леммы Фату.

Доказательство теоремы 4.1. Очевидно, что в проверке нуждается лишь случай $J^2(\lambda) < \infty$. В данной ситуации $J^2(\lambda) = H(\lambda | \lambda_\mu^\circ)$ с $\lambda \in \mathbf{S}_{\mu\mu}$ и $\lambda \ll \lambda_\mu^\circ$.

Предположим сначала, что

$$\lambda \sim \lambda_\mu^\circ, \quad \alpha_0 \sim \alpha \quad (4.9)$$

и обозначим

$$h(x, y) = \frac{d\lambda}{d\lambda_\mu^\circ}(x, y). \quad (4.10)$$

На измеримом пространстве $(\mathbf{R}^\infty, \mathcal{B}(\mathbf{R}^\infty))$ ($\mathbf{R}^\infty = (x_0, x_1, \dots)$, $\mathcal{B}(\mathbf{R}^\infty)$ — борелевская σ -алгебра на $\mathbf{R}^\infty$) зададим вероятностную меру $\mathbf{Q}$, являющуюся распределением исходного марковского процесса ξ , и вероятностную меру $\mathbf{Q}^\mu$, отвечающую стационарному марковскому процессу с инвариантной мерой μ и переходной вероятностью

$$\pi_\mu(x, dy) = h(x, y) \pi(x, dy) \quad (= h(x, y) p(y|x) l(dy)). \quad (4.11)$$

В силу (4.9) и леммы 4.3 $\mu \ll \alpha_0$ и $p_\mu(y|x) > 0$ ($l \times \mu$)-п.н. Поэтому по лемме 4.4 процесс $(x_k, \mathbf{Q}^\mu)_{k \geq 0}$ является μ -эргодическим. Обозначим $\mathbf{Q}_n$ и $\mathbf{Q}_n^\mu$ сужения мер $\mathbf{Q}$ и $\mathbf{Q}^\mu$ на σ -алгебру $\mathcal{B}(\mathbf{R}^{n+1})$. Поскольку $\mu \ll \alpha_0$, то

$$\mathbf{Q}_n^\mu \ll \mathbf{Q}_n, \quad n \geq 0,$$

и процесс локальной плотности $(z_n(x_0^n))_{n \geq 0}$ меры Q^μ относительно Q задается формулой

$$z_n(x_0^n) = \frac{d\mu}{d\alpha_0}(x_0) \exp \left(\sum_{k=1}^n \ln h(x_{k-1}, x_k) \right). \quad (4.12)$$

Случайные величины $z_n(x_0^n)$ положительны Q^μ -п.н. и в соответствии с разложением Лебега меры Q_n относительно Q_n^μ имеет место неравенство: для любого $\Delta \in \mathcal{B}(R^{n+1})$

$$Q(\Delta) \geq \int_{\Delta} z^{-1}(x_0^n) dQ_n^\mu. \quad (4.13)$$

Введем оккупационные меры $\pi_n^2(x_0^n)$ с $\pi_n^2(A \times B)(x_0^n) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n I(x_{k-1} \in A, x_k \in B)$, определим множества

$$\begin{aligned} \Delta_n^1 &= \left\{ \rho^2(\pi_n^2(x_0^n), \lambda) \leq \delta \right\}, \\ \Delta_n^2 &= \left\{ \left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n h(x_{k-1}, x_k) - H(\lambda | \lambda_\mu^0) \right| \leq \beta \right\}, \\ \Delta^c &= \left\{ \frac{d\mu}{d\alpha_0}(x_0) > \frac{1}{c} \right\}, \end{aligned} \quad (4.14)$$

и положим $\Delta^{n,c} = \Delta_n^1 \cap \Delta_n^2 \cap \Delta^c$. Тогда, с учетом (4.13), получаем, что

$$\begin{aligned} P\{\rho^2(\pi_n^2, \lambda) \leq \delta\} &= Q\{\rho_n^2(\pi_n^2(x_0^n), \lambda) \leq \delta\} \geq \int_{\Delta^{n,c}} z_n^{-1}(x_0^n) dQ_n^\mu \\ &\geq c Q_n^\mu(\Delta^{n,c}) \exp \{ -nH(\lambda | \lambda_\mu^0) - n\beta \}. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что

$$\liminf_n \ln P\{\rho^2(\pi_n^2, \lambda) \leq \delta\} \geq -H(\lambda | \lambda_\mu^0) - \beta + \liminf_n \ln Q_n^\mu(\Delta^{n,c}).$$

В силу произвольности β требуемая нижняя оценка будет иметь место, если

$$\lim_{c \rightarrow \infty} \mu \left\{ x_0: \frac{d\mu}{d\alpha}(x_0) > \frac{1}{c} \right\} = 1, \quad \lim_n \left\{ \frac{Q_n^\mu(\Delta_n^1)}{Q_n^\mu(\Delta_n^2)} \right\} = 1. \quad (4.15)$$

Первое соотношение в (4.15) имеет место, поскольку, как уже отмечалось выше, $\mu \ll \alpha_0$. Второе соотношение в (4.15) выполнено в силу μ -эргодичности процесса $(x_k, Q^\mu)_{k \geq 0}$. Действительно, этот процесс имеет двумерное распределение λ и, значит, в соответствии с теоремой Биркгофа-Хинчина $\lim_n \rho^2(\pi_n^2(x_0^n), \lambda) = 0$ Q^μ -п.н., т.е. первая часть второго соотношения выполнена. По предположению

$$\infty > H(\lambda | \lambda_\mu^0) = \int_{R^2} \ln h(x, y) \lambda(dx, dy)$$

и, значит, по той же теореме Биркгофа–Хинчина выполняется и вторая часть второго соотношения в (4.15).

Итак, при условии (4.9) требуемая нижняя оценка имеет место.

Пусть в (4.9) выполнено лишь второе условие: $\alpha_0 \sim \alpha$. Возьмем меры λ^ε и $\mu(\varepsilon)$ из леммы 4.5. Для мер λ^ε и $\lambda_{\mu(\varepsilon)}^\varepsilon$ выполнено первое условие в (4.9). Покажем теперь, что $\mu(\varepsilon) \ll \alpha_0$. В силу лемм 4.1 и 4.3, $\mu \ll \alpha$. Тогда (см. определение $\mu(\varepsilon)$ в лемме 4.5) $\mu(\varepsilon) \ll \alpha$, что влечет за собой требуемую абсолютную непрерывность в силу второго условия в (4.9).

По доказанному

$$\liminf_n \frac{1}{n} \ln \mathbf{P} \{ \rho^2(\pi_n^2, \lambda^\varepsilon) \leq \delta \} \geq -H(\lambda^\varepsilon | \lambda_{\mu(\varepsilon)}^\varepsilon).$$

По лемме 4.5 можно выбрать ε_0 такое, что при фиксированном δ и $\varepsilon \leq \varepsilon_0$ выполняется неравенство $\rho^2(\lambda, \lambda^\varepsilon) \leq \delta/2$. Тогда, с учетом леммы 4.5,

$$\begin{aligned} \liminf_n \frac{1}{n} \ln \mathbf{P} \{ \rho^2(\pi_n^2, \lambda) \leq \delta \} &\geq \liminf_n \frac{1}{n} \ln \mathbf{P} \{ \rho^2(\pi_n^2, \lambda^\varepsilon) \leq \delta/2 \} \\ &\geq -H(\lambda^\varepsilon | \lambda_{\mu(\varepsilon)}^\varepsilon) \longrightarrow -H(\lambda | \lambda_\mu^\circ), \quad \varepsilon \rightarrow 0, \end{aligned}$$

т.е. требуемое неравенство имеет место при выполнении лишь второго условия в (4.9).

Чтобы отказаться и от этого условия, введем, следуя Донскеру и Варадану [1], новый марковский процесс $\xi^1 = (\xi_k^1)_{k \geq 0}$ с $\xi_k^1 \equiv \xi_{k+1}$. У этого марковского процесса та же переходная вероятность $\pi(x, dy)$ и начальное распределение

$$\alpha_0^1(dy) = \int_{\mathbf{R}} \pi(x, dy) \alpha_0(dx) = l(dy) \int_{\mathbf{R}} p(y|x) \alpha_0(dx).$$

Отсюда и в силу условия (H_0) вытекает, что $\alpha_0^1 \sim l$ и, значит, в силу леммы 4.1, $\alpha_0 \sim \alpha$. Поэтому по предшествующему доказательству нижняя оценка имеет место для $\pi_n^2(\xi^1)$, где

$$\pi_n^2 \left(A \times B(\xi^1) \right) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n I(\xi_{k-1}^1 \in A, \xi_k^1 \in B) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n I(\xi_k \in A, \xi_{k+1} \in B),$$

т.е.

$$\liminf_n \frac{1}{n} \ln \mathbf{P} \{ \rho^2(\pi_n^2(\xi^1), \lambda) \leq \delta \} \geq -H(\lambda | \lambda_\mu^\circ). \quad (4.16)$$

Требуемый результат вытекает теперь из (4.16) и того факта, что полная вариация $\|\pi_n^2 - \pi_n^2(\xi^1)\| \leq 2/n$.

5. Доказательство теоремы 1.2

По теореме 2.1 семейство (π_n^2) экспоненциально плотно. Тогда по теореме Пухальского (см. (1.9)) существует подпоследовательность (π_n^2) ,

удовлетворяющая п.б.у. с функционалом действия $\tilde{J}^2(\lambda)$ и, значит, для $\delta > 0$ имеют место верхние и нижние оценки:

$$\liminf_{\tilde{n}} \frac{1}{\tilde{n}} \ln \mathbf{P}\{\rho^2(\pi_{\tilde{n}}^2, \lambda) \leq \delta\} \geq \liminf_{\tilde{n}} \frac{1}{\tilde{n}} \ln \mathbf{P}\{\rho^2(\pi_{\tilde{n}}^2, \lambda) < \delta\} \geq - \inf_{\nu: \rho^2(\nu, \lambda) < \delta} \tilde{J}^2(\nu) \geq -\tilde{J}^2(\nu), \quad (5.1)$$

$$\limsup_{\tilde{n}} \frac{1}{\tilde{n}} \ln \mathbf{P}\{\rho^2(\pi_{\tilde{n}}^2, \lambda) \leq \delta\} \leq - \inf_{\nu: \rho^2(\nu, \lambda) < \delta} \tilde{J}^2(\nu). \quad (5.2)$$

По определению $\inf$ для любых $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$ найдется мера ν_ε^δ такая, что $\rho^2(\nu_\varepsilon^\delta, \lambda) \leq \delta$ и

$$\inf_{\nu: \rho^2(\nu, \lambda) < \delta} \tilde{J}^2(\nu) \geq \tilde{J}^2(\nu_\varepsilon^\delta) - \varepsilon. \quad (5.3)$$

В силу полунепрерывности снизу функции $\tilde{J}^2(\lambda)$ получаем

$$\liminf_{\delta \rightarrow 0} \tilde{J}^2(\nu_\varepsilon^\delta) \geq \tilde{J}^2(\lambda)$$

и, значит, согласно (5.2) и (5.3),

$$\begin{aligned} \limsup_{\tilde{n}} \frac{1}{\tilde{n}} \ln \mathbf{P}\{\rho^2(\pi_{\tilde{n}}^2, \lambda) \leq \delta\} &\leq \limsup_{\delta \rightarrow 0} [\varepsilon - \tilde{J}^2(\nu_\varepsilon^\delta)] = \varepsilon - \liminf_{\delta \rightarrow 0} \tilde{J}^2(\nu_\varepsilon^\delta) \\ &\leq \varepsilon - \tilde{J}^2(\lambda) \rightarrow -\tilde{J}^2(\lambda), \quad \varepsilon \rightarrow 0. \end{aligned} \quad (5.4)$$

Таким образом, из (5.1) и (5.4) получаем локальный п.б.у. (1.10) для $(\pi_{\tilde{n}}^2)$.

Как отмечалось во введении (см. (1.12)), имеет место тождество $\tilde{J}^2(\lambda) \equiv J^2(\lambda)$. Используя этот факт, установим верхнюю и нижнюю оценки больших отклонений для (π_n^2) .

Для замкнутого множества $F^2 \in \mathbf{S}^2$ выберем такую подпоследовательность $(\pi_{n'}^2)$ подпоследовательности (π_n^2) , что

$$\limsup_n \frac{1}{n} \ln \mathbf{P}\{\pi_n^2 \in F^2\} = \lim_{n'} \frac{1}{n'} \ln \mathbf{P}\{\pi_{n'}^2 \in F^2\}.$$

По теореме Пухальского (см. (1.9)) можно выбрать подпоследовательность $(\pi_{n'}^2)$ подпоследовательности (π_n^2) такую, что $(\pi_{n'}^2)$ удовлетворяет п.б.у. с функционалом действия $\tilde{J}^2(\lambda) \equiv J^2(\lambda)$. Тогда

$$\begin{aligned} \limsup_n \frac{1}{n} \ln \mathbf{P}\{\pi_n^2 \in F^2\} &= \lim_{n'} \frac{1}{n'} \ln \mathbf{P}\{\pi_{n'}^2 \in F^2\} \\ &= \lim_{\tilde{n}} \frac{1}{\tilde{n}} \ln \mathbf{P}\{\pi_{\tilde{n}}^2 \in F^2\} \leq - \inf_{\lambda \in F^2} J^2(\lambda). \end{aligned}$$

Нижняя оценка устанавливается аналогичным образом.

6. Доказательство теоремы 1.1

Пусть $\lambda^1, \lambda^2 \in S^2$. Маргиналы этих мер обозначим $(\mu^1, \nu^1), (\mu^2, \nu^2)$. По лемме 3.2

$$\rho^2(\lambda^1, \lambda^2) \geq \begin{cases} \rho(\mu^1, \mu^2) \\ \rho(\nu^1, \nu^2) \end{cases}.$$

Поэтому отображение $\lambda^1 \rightarrow (\mu^1, \nu^1)$ является равномерно непрерывным в метрике Леви-Прохорова. Отсюда, согласно методу непрерывного отображения Варадана [3], следует, что семейство $(\pi_n, n \geq 1)$ удовлетворяет п.б.у. в (S, ρ) с функционалом действия $J'(\mu) = \inf J^2(\lambda)$, где $\inf$ берется по всем мерам $\lambda \in S^2$ хотя бы с одним маргиналом μ . Поскольку $J^2(\lambda) = \infty$ для мер λ с различными маргиналами, то

$$J'(\mu) = \inf_{\lambda \in S_{\mu}} H(\lambda | \lambda_{\mu}^{\circ}).$$

7. Пример

Рассмотрим марковский процесс $\xi = (\xi_k)_{k \geq 0}$, заданный рекуррентным соотношением

$$\xi_{k+1} = f(\xi_k) + g(\xi_k) \zeta_{k+1}, \quad (7.1)$$

где $(\zeta_k)_{k \geq 1}$ — последовательность независимых и одинаково распределенных случайных величин, ξ_0 — независимая от $(\zeta_k)_{k \geq 1}$ случайная величина.

Предположим, что выполнены следующие условия:

(1) $f(x), g(x)$ — непрерывные функции,

$$\left| \frac{f(x)}{x} \right| \leq a < 1, \quad \frac{1}{r} \leq |g(x)| \leq r, \quad r > 0;$$

(2) случайная величина ζ_1 имеет плотность $p_{\zeta}(y)$ (относительно меры Лебега), $p_{\zeta}(y)$ — непрерывная функция с

$$r_1 \exp(-r_2 |y|^q) \leq p_{\zeta}(y) \leq r_3 \exp(-r_4 |y|), \\ r_i > 0, \quad i = 1, \dots, 4, \quad q \geq 1;$$

(3) $\exists b > 0: E e^{b|\xi_0|} < \infty$.

Покажем, что при выполнении этих условий для процесса ξ выполняется п.б.у. в (S^2, ρ^2) и (S, ρ) .

В соответствии с теоремами 1.1 и 1.2 достаточно установить импликацию

$$\{(1), (2), (3)\} \Rightarrow \{(F), (I'), (H^*), (RM'), (H_0)\}. \quad (7.2)$$

В силу (2) переходная вероятность $\pi(x, dy)$ процесса ξ при каждом x имеет плотность по мере Лебега

$$p(y|x) = p_{\zeta} \left(\frac{y - f(x)}{g(x)} \right). \quad (7.3)$$

Поэтому $\{(1), (2)\} \Rightarrow \{(F)\}$.

В качестве меры λ' возьмем двумерное распределение стационарного марковского гауссовского процесса $(\xi'_k)_{k \geq 0}$ с $\xi'_{k+1} = a\xi'_k + \zeta'_{k+1}$, где $(\zeta'_k)_{k \geq 1}$ — последовательность независимых и одинаково распределенных гауссовских случайных величин с параметрами $(0, 1)$, ξ'_0 — независимая от $(\zeta'_k)_{k \geq 1}$ гауссовская случайная величина с параметрами $(0, 1/(1-a^2))$. Тогда

$$\frac{d\alpha}{dx}(x) = \sqrt{\frac{1-a^2}{2\pi}} \exp \left\{ -\frac{x^2}{2(1-a^2)} \right\}$$

и

$$\lambda'(dx, dy) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp \left\{ -\frac{(y-ax)^2}{2} \right\} dy \alpha(dx).$$

С другой стороны, в силу (7.3), $\lambda'(dx, dy) = p_\zeta((y-f(x))/g(x)) dy \alpha(dx)$ и, значит, $\lambda' \sim \lambda_\alpha^\circ$ с

$$\frac{d\lambda'}{d\lambda_\alpha^\circ}(x, y) = \frac{\sqrt{(1-a^2)/(2\pi)} \exp\{-(y-ax)^2/2\}}{p_\zeta((y-f(x))/g(x))}.$$

Тогда, в соответствии с (1) и (2)

$$\frac{d\lambda'}{d\lambda_\alpha^\circ}(x, y) \leq \frac{1}{r_1} \exp \left\{ r_2 \left| \frac{y-f(x)}{g(x)} \right|^q \right\} \leq \frac{1}{r_1} \exp \left\{ \frac{r_2}{r} [|y| + a|x|]^q \right\},$$

что влечет за собой

$$H(\lambda' | \lambda_\alpha^\circ) \leq -\ln r_1 + \int_{\mathbf{R}^2} \frac{r_2}{r} [|y| + a|x|]^q \lambda'(dx, dy) < \infty,$$

т.е. $\{(1), (2)\} \Rightarrow \{(I')\}$.

Для проверки (H^*) возьмем $v(x) = c|x|$ с $c \in (ar_4/r, r_4/r)$. Тогда

$$w(x) = c|x| - \ln \int_{\mathbf{R}} \exp(c|y|) p_\zeta \left(\frac{y-f(x)}{g(x)} \right) dy.$$

Отсюда и в силу (2) приходим к неравенству

$$\begin{aligned} w(x) &\geq -\ln r_3 + c|x| - \ln \int_{\mathbf{R}} \exp \left\{ c|y| - r_4 \left| \frac{y-f(x)}{g(x)} \right| \right\} dy \\ &\geq -\ln r_3 + c|x| - \ln \int_{\mathbf{R}} \exp \left\{ c|y| - \frac{r_4}{r} |y| + a \frac{r_4}{r} |x| \right\} dy \\ &= \left(c - a \frac{r_4}{r} \right) |x| - \ln r_3 - \ln \int_{\mathbf{R}} \exp \left\{ - \left(\frac{r_4}{r} - c \right) |y| \right\} dy, \end{aligned}$$

т.е. $\{(2)\} \Rightarrow \{(H^*)\}$. Кроме того, $\{(2)\} \Rightarrow \{(RM')\}$ и $\{(2), (3)\} \Rightarrow \{(H_0)\}$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Donsker M. D., Varadhan S. R. S. Asymptotic evaluation of certain Markov process expectations for large time. III. — Commun. Pure Appl. Math., 1976, v. 29, № 4, p. 389–461.
2. Donsker M. D., Varadhan S. R. S. Asymptotic evaluation of certain Markov process expectations for large time. I. — Commun. Pure Appl. Math., 1975, v. 28, № 1, p. 1–47.
3. Varadhan S. R. S. Large Deviations and Applications. Philadelphia: SIAM, 1984.
4. Donsker M. D., Varadhan S. R. S. Asymptotic evaluation of certain Markov process expectations for large time. IV. — Commun. Pure Appl. Math., 1983, v. 36, № 2, p. 183–212.
5. Ellis R. S. Large deviations for the empirical of a Markov chain with an application to the multivariate empirical measure. — Ann. Probab., 1988, v. 16, № 4, p. 1496–1508.
6. Dupuis P., Ellis R. S. A stochastic optimal control approach to the theory of large deviations. — Preprint, 1992.
7. Deuschel J. D., Stroock D. W. Large Deviations. New York: Academic Press, 1989.
8. Puhalskii A. A. On functional principle of large deviations. — In: New Trends in Probability and Statistics. /Ed. by V. Sazonov and T. Shervashidze. Utrecht/Vilnius: VSP/Mokslas, 1991, p. 198–218.
9. Вентцель А. Д., Фрейдлин М. И. Флуктуации в динамических системах под действием малых случайных возмущений. М.: Наука, 1979, 424 с.
10. Liptser R. S., Pukhalskii A. A. Limit theorems on large deviations for semimartingales. — Stochastics and Stoch. Reports, 1992, v. 38, p. 201–249.
11. De Acosta A. Large deviations for empirical measures of Markov chains. — J. Theoret. Probab., 1990, v. 3, p. 395–431.
12. Гертнер Ю. О больших отклонениях от инвариантной меры. — Теория вероятн. и ее примен., 1977, т. 22, в. 1, с. 27–42.
13. Orey S., Pelikan S. Large deviation principles for stationary processes. — Ann. Probab., 1988, v. 16, № 4, p. 1481–1495.
14. Veretennikov A. Yu. On large deviations for ergodic process empirical measures. — Adv. Soviet Math., 1992, v. 12, p. 125–133.
15. Wu. Grandes déviations pour les processus de Markov essentiellement irréductibles. I. Temps discret. — C. R. Acad. Sci. Paris, 1991, v. 312, № 1, p. 609–614.
16. Jain N. C. Large deviation lower bounds for additive functionals of Markov processes. — Ann. Probab., 1990, v. 18, № 3, p. 1071–1098.
17. Биллингсли П. Сходимость вероятностных мер. М.: Наука, 1977, 352 с.
18. Скороход А. В. Асимптотические методы теории стохастических дифференциальных уравнений. Киев: Наукова думка, 1987, 328 с.

Поступила в редакцию

23.III.1993