Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. М. Максимов, Кубические стохастические матрицы и их вероятностные интерпретации, *Теория вероятн. и ее примен.*, 1996, том 41, выпуск 1, 89–106

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp2777>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.234.197.8

26 апреля 2023 г., 17:16:38

© 1996 г.

МАКСИМОВ В. М.*

КУБИЧЕСКИЕ СТОХАСТИЧЕСКИЕ МАТРИЦЫ И ИХ ВЕРОЯТНОСТНЫЕ ИНТЕРПРЕТАЦИИ¹⁾

В работе рассматриваются ассоциативные умножения кубических матриц, обобщающие обычное матричное умножение. Вводятся кубические аналоги стохастических матриц и даются их вероятностные интерпретации. Описываются кубические стационарные стохастические матрицы и доказывается предложение о сходимости кубической стохастической матрицы к стационарной. Вводится понятие процесса марковского взаимодействия, обобщающее понятие марковского процесса, и показано, что понятие эргодичности такого процесса естественно связано с ассоциативным умножением кубических матриц.

Ключевые слова и фразы: вероятность, марковская цепь, кубические стохастические матрицы, процесс марковского взаимодействия.

Введение. Обычно марковская цепь рассматривается как одна из физических интерпретаций умножения квадратных матриц. Эта интерпретация связана с так называемым каноническим базисом, который образуют канонические матрицы, обозначаемые нами (i, j) , $i, j = 1, \dots, s$. Матрица (i, j) — это квадратная $s \times s$ матрица, единственный отличный от нуля элемент которой равен единице и стоит в i -й строке и в j -м столбце. Поскольку операция умножения канонических матриц подчиняется правилу

$$(i, j) \cdot (k, m) = \begin{cases} (i, m), & \text{если } j = k, \\ 0, & \text{если } j \neq k, \end{cases} \quad (1)$$

где 0 обозначает нулевую $s \times s$ матрицу, то естественная вероятностная интерпретация умножения (1) приводит к марковской цепи.

Именно, символ (i, j) можно интерпретировать как переход блуждающей частицы из состояния i в состояние j (или же, в другой интерпретации, как превращение частицы с номером i в частицу с номером j). Последовательные переходы блуждающей частицы отвечают матрич-

*Тверской государственный университет, ул. Желябова, 33, 170000 Тверь, Россия.

¹⁾Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 93-01-1442).

ному умножению (1), в то время как свойство ассоциативности этого умножения соответствует марковскому свойству блуждания.

Совокупность матриц (i, j) естественным образом порождает преобразование множества $(1, 2, \dots, s)$ в себя согласно правилу $i \cdot (i, j) = j$, которое ассоциативно согласовано с умножением (1).

Ясно, что для произвольной матрицы $\|\alpha_{ij}\|$ имеет место однозначное разложение: $\|\alpha_{ij}\| = \sum \alpha_{ij} \cdot (i, j)$. Если элементы матрицы $P = \|p_{i,j}\| = \sum p_{i,j} \cdot (i, j)$ удовлетворяют соотношениям $p_{i,j} \geq 0$ и $\sum p_{i,j} = 1$, то матрица называется стохастической. Стохастическая матрица соответствует переходу блуждающей частицы из фиксированного состояния i в какое-либо из состояний $(1, 2, \dots, s)$ с вероятностью 1.

Другие базисы могут приводить к совершенно иным вероятностным интерпретациям. Рассмотрим, например, в алгебре квадратных матриц некоторую выпуклую пологруппу $\mathcal{P}$. Пусть $e_1, e_2, \dots, e_d$ — ее крайние точки, т.е. такие матрицы из $\mathcal{P}$, что любая матрица P из $\mathcal{P}$ единственным образом представляется в виде $P = p_1 e_1 + p_2 e_2 + \dots + p_d e_d$, где $p_i \geq 0$ и $\sum p_i = 1$. Тогда,

$$e_i e_j = \sum_{k=1}^d p_k^{(i,j)} e_k, \quad \text{где } p_k^{(i,j)} \geq 0 \text{ и } \sum_{k=1}^d p_k^{(i,j)} = 1.$$

Это позволяет произведение $e_i e_j$ интерпретировать как воздействие частицы e_i на частицу e_j (процесс взаимодействия), в результате которого с вероятностью $p_k^{(i,j)}$ появляется частица e_k . Поэтому степени матрицы $P^n = \sum_{k=1}^d p_k^{(i,j,n)} e_k$, точнее, вероятности $p_k^{(i,j,n)}$, $k, i, j = 1, \dots, d$, для которых $\sum_k p_k^{(i,j,n)} = 1$ при любых $i, j = 1, \dots, d$ и любом натуральном n , можно рассматривать как результат эволюции за n шагов описываемого ниже процесса.

Первоначально в некотором объеме может находиться одна из частиц типов $e_1, \dots, e_d$ с вероятностями $p_1, \dots, p_d$ соответственно. По находящейся в этом объеме с вероятностью p_j частице e_j мы в первый момент времени с вероятностью p_i выстреливаем частицей e_i . В результате в тот же момент с вероятностью $p_i p_j p_k^{(i,j)}$ появляется частица e_k . После этого процесс выстреливания продолжается во второй момент времени, третий и т.д. Ясно, что вероятность $p_k^{(i,j,n)}$, $k = 1, \dots, d$, есть вероятность появления частицы e_k после n -го выстрела.

Можно было бы рассмотреть и другие физические интерпретации вероятностей $p_k^{(i,j,n)}$, например, на языке химической кинетики, катализа или даже демографии. Однако, с математической точки зрения это не имеет особого значения. Важно другое. В возникшем в результате интерпретации матричной выпуклой пологруппы $\mathcal{P}$ процессе взаимодействия можно так изменить параметры взаимодействия, что процесс уже не будет управляться произведением квадратных матриц из $\mathcal{P}$. В качестве примера можно предложить ситуацию, когда выстреленные с

вероятностью p_i частицы e_i попадают в частицу e_j с вероятностью $p_{i,j}$, $\sum_{i,j} p_{i,j} = 1$, и в результате их взаимодействия появляется частица e_k с вероятностью $p_{i,j,k}$, $\sum_k p_{i,j,k} = 1$. Возникающий таким образом дискретный по времени процесс мы будем называть процессом марковского взаимодействия, и он будет рассмотрен ниже. Разница в описании процессов принципиальна. В первом случае элементы кубической матрицы $\|p_k^{(i,j)}\|$ являются структурными константами матричной выпуклой полугруппы и поэтому не могут быть произвольными. Во втором случае матрица $\|p_{i,j,k}\|$ фактически произвольна: на нее наложены лишь условия стохастичности $p_{i,j,k} \geq 0$, $\sum_k p_{i,j,k} = 1$. Кроме того, в образовании процесса участвует произвольная квадратная стохастическая матрица $\|p_{i,j}\|$.

Представляет интерес следующий вопрос: какие интерпретации в терминах блужданий частиц или их взаимодействий можно найти для многоразрядных матриц, если подходящим способом определить для них операцию умножения, обладающую свойством ассоциативности?

Поскольку при рассмотрении многоразрядных (многомерных, или пространственных) матриц число нетривиальных ассоциативных операций естественно возрастает, то можно ожидать, что им отвечают новые понятия многомерных стохастических матриц и соответствующие им вероятностные интерпретации.

В настоящей работе на примере кубических матриц приводится одна из реализаций этой идеи. С многомерными матрицами и их приложениями можно познакомиться в [1].

1. Ассоциативные умножения кубических матриц. Пусть Γ — произвольный конечный алфавит из s элементов, т.е. конечное множество без каких бы то ни было дополнительных структур на нем. Аналогично квадратным каноническим матрицам, определим канонические тройки (i, j, k) , $i, j, k \in \Gamma$, которые будут образовывать кубический канонический базис, относительно которого каждая кубическая матрица $\|\alpha_{i,j,k}\|$, $i, j, k \in \Gamma$, однозначно представляется в виде $\|\alpha_{i,j,k}\| = \sum_{i,j,k} \alpha_{i,j,k} \cdot (i, j, k)$.

В следующих ниже рассмотрениях конечность множества Γ фактически не имеет значения, если рассматривать кубические матрицы, допускающие лишь конечное разложение по каноническому базису.

По аналогии с умножением (1) определим для троек (i, j, k) элементов из Γ следующие умножения:

$$\text{I. } (i, j, k) \cdot (m, n, r) = \begin{cases} (i, j, r), & \text{если } k = m \text{ и } j = n, \\ 0 & \text{в противном случае;} \end{cases} \quad (2)$$

$$\text{II. } (i, j, k) \cdot (m, n, r) = \begin{cases} (i, j, r), & \text{если } k = m, \\ 0 & \text{в противном случае;} \end{cases} \quad (3)$$

$$\text{III. } (i, j, k) \cdot (m, n, r) = \begin{cases} (i, n, r), & \text{если } k = m, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases} \quad (4)$$

Ассоциативность введенных умножений легко проверяется. Проще всего устроено умножение (2), сводящееся к обычному матричному умножению. Действительно, справедливо

Предложение 1. *Алгебра кубических матриц с умножением (2) является прямой суммой алгебр квадратных матриц.*

Доказательство. Ясно, что совокупность канонических матриц (i, j, k) при фиксированном j , ввиду определения (2), является полугруппой, которая при отображении $(i, j, k) \mapsto (i, k)$ изоморфна полугруппе, образованной каноническим базисом (i, k) с умножением (1). Следовательно, j -е сечение в алгебре матриц с умножением (2) изоморфно алгебре квадратных матриц с умножением (1). С другой стороны, снова ввиду определения (2), произведения различных сечений равны нулю. Предложение доказано.

Умножения (3) и (4) являются частными случаями более общей операции. В самом деле, если на алфавите Γ задана произвольная ассоциативная операция $\circ$, то для канонических матриц (i, j, k) можно определить умножение

$$\text{IV. } (i, j, k) \cdot (l, m, r) = \begin{cases} (i, j \circ m, r), & \text{если } k = l, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases} \quad (5)$$

Ассоциативность умножения (5) вытекает из следующей цепочки очевидных равенств:

$$\begin{aligned} [(i, j, k) \cdot (k, n, r)] \cdot (r, s, t) &= (i, j \circ n, r) \cdot (r, s, t) = (i, (j \circ n) \circ s, t); \\ (i, j, k) \cdot [(k, n, r) \cdot (r, s, t)] &= (i, j, k) \cdot (k, n \circ s, t) = (i, j \circ (n \circ s), t). \end{aligned}$$

Если операцию $\circ$ на Γ определить соотношением $j \circ n = j$ (ассоциативность этой операции очевидна), то умножение (5) превращается в (3). Аналогично, ассоциативная операция $j \circ n = n$ на Γ превращает (5) в (4).

Отметим, что для первой из рассмотренных операций уравнение $x \circ a = b$, а для второй — уравнение $a \circ x = b$ однозначно разрешимы при любых $a, b \in \Gamma$.

В дальнейшем всегда будем предполагать, что операция $\circ$ на Γ обладает либо правой, либо левой однозначной разрешимостью. Справедлива следующая

Лемма 1. *Если операция $\circ$ на Γ обладает либо правой, либо левой однозначной разрешимостью, то сумма $\sum_{d \in \Gamma} \sum_{j \circ m = d} \gamma_{j, m}$ совпадает с суммой $\sum_{j \in \Gamma} \sum_{m \in \Gamma} \gamma_{j, m}$.*

Доказательство. Пусть, например, операция $\circ$ обладает левой однозначной разрешимостью. Тогда для любых m и $d \in \Gamma$ однозначно определен элемент j_d как решение уравнения $j_d \circ m = d$, причем при разных d элементы j_d различны. Поэтому множество $\{j_d, d \in \Gamma\}$ для любого фиксированного $m \in \Gamma$ есть перестановка множества Γ . Следова-

вательно,

$$\sum_{d \in \Gamma} \sum_{j \circ m = d} \gamma_{j,m} = \sum_{m \in \Gamma} \sum_{j \circ d = m, d \in \Gamma} \gamma_{j,m} = \sum_{m \in \Gamma} \sum_{j \circ m, j \in \Gamma} \gamma_{j,m} = \sum_{m \in \Gamma} \sum_{j \in \Gamma} \gamma_{j,m}.$$

Лемма доказана.

Предложение 2. Алгебра кубических матриц с операцией (5) изоморфна тензорному произведению алгебры квадратных матриц и полугрупповой алгебры с базисом Γ и операцией $\circ$.

Доказательство. Из определения (5) следует, что взаимно однозначное сопоставление базисной тройке (i, j, k) элемента $(i, j) \otimes k$ из тензорного произведения задает гомоморфизм. Так как тройки линейно независимы в алгебре кубических матриц, а элементы $(i, j) \otimes k$ образуют базис тензорного произведения, то, продолжая гомоморфизм по линейности, получаем требуемый изоморфизм.

2. Стохастические кубические матрицы. Из предложения 2 ясно, что прямое произведение квадратной стохастической матрицы $\|p_{i,j}\|$ и распределения $\mu = \{p_k\}$ на Γ задает кубическую матрицу $P = \|p_{i,j,k}\|$, где $p_{i,j,k} = p_{i,j}p_k$, причем, очевидно,

$$\sum_{j,k} p_{i,j,k} = \sum_k p_k \sum_j p_{i,j} = \sum_k p_k = 1. \quad (6)$$

Если аналогично определить кубическую матрицу $Q = \|q_{r,s,t}\|$, где $q_{r,s,t} = q_{r,s}q_t$, $\|q_{r,s}\|$ — стохастическая матрица, а $\nu = \{q_t\}$ — распределение на Γ , то ясно, что кубическая матрица PQ является прямым произведением матрицы $\|p_{i,j}\| \cdot \|q_{r,s}\|$ и распределения $\mu \circ \nu$ на Γ . Другими словами, если рассматривать введенное прямое произведение как трехмерный аналог стохастических квадратных матриц, то так определенная стохастичность сохраняется при умножении. К сожалению, такое множество стохастических матриц недостаточно в приложениях. Очевидно, однако, что всякое его расширение должно сохранять свойство (6). Поэтому естественно ввести

О п р е д е л е н и е 1. Кубическая матрица $P = \|p_{i,j,k}\|$ называется стохастической, если $p_{i,j,k} \geq 0$ и $\sum_{j,k \in \Gamma} p_{i,j,k} = 1$ для всех $i \in \Gamma$.

В дальнейшем, если специально не оговорено, все утверждения рассматриваются для алгебры кубических матриц с операцией (5).

Предложение 3. Стохастические кубические матрицы образуют выпуклую полугруппу.

Доказательство. Если $P = \|p_{i,j,k}\|$ и $Q = \|q_{r,s,t}\|$ — две стохастические кубические матрицы, то для $(i, j \circ m, r)$ -го элемента $t_{i,j \circ m, r}$ произведения PQ , согласно определению (5), имеем:

$$t_{i,d,r} = \sum_{j,m} \sum_k p_{i,j,k} q_{k,m,r}, \quad j \circ m = d.$$

Поэтому, используя лемму 1 и определение 1, получим

$$\begin{aligned}\sum_{d,r} t_{i,d,r} &= \sum_r \sum_{d=j \circ m} \sum_k p_{i,j,k} q_{k,m,r} = \sum_k \sum_r \sum_j \sum_m p_{i,j,k} q_{k,m,r} \\ &= \sum_{k,j} p_{i,j,k} \sum_{m,r} q_{k,m,r} = 1.\end{aligned}$$

Свойство выпуклости рассматриваемой совокупности кубических матриц очевидно. Предложение доказано.

Пусть теперь $\|p_{i,j}\|$ — дважды стохастическая квадратная матрица и $\mu = \{p_k\}$ — распределение на Γ . В этой ситуации для кубической матрицы $P = \|p_{i,j,k}\|$ с элементами $p_{i,j,k} = p_{i,j} p_k$ имеем: $\sum_i p_{i,j,k} = p_k \sum_i p_{i,j} = p_k$. Сумма $\sum_i p_{i,j,k}$ зависит только от k . Если же все p_k равны между собой, т.е. равны $1/s$ (s — размерность матрицы), то сумма не зависит ни от j , ни от k . Этим оправдано

О п р е д е л е н и е 2. Стохастическая кубическая матрица называется дважды стохастической, если $\sum_i p_{i,j,k} = 1/s$ при всех $j, k \in \Gamma$.

Предложение 4. *Дважды стохастические кубические матрицы образуют выпуклую полугруппу.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. В обозначениях, использованных при доказательстве предложения 3, имеем:

$$\begin{aligned}\sum_i t_{i,d,r} &= \sum_i \sum_{m,j \in \Gamma; j \circ m = d} \sum_k p_{i,j,k} q_{k,m,r} = \sum_{j,m; j \circ m = d} \frac{1}{s} \sum_k q_{k,m,r} \\ &= \frac{1}{s^2} \sum_{j,m; j \circ m = d} 1 = \frac{s}{s^2} = \frac{1}{s},\end{aligned}$$

ибо сумма взята по j и m таким, что $j \circ m = d$, и при любом фиксированном $d \in \Gamma$ имеет, в силу свойства однозначной (правой или левой) разрешимости, ровно s членов. Свойство линейной выпуклости очевидно.

Понятие дважды стохастичности можно существенно расширить при увеличении размера матрицы.

О п р е д е л е н и е 3. Кубическая матрица $P = \|p_{i,j,k}\|$ с неотрицательными элементами называется дважды стохастической по первому, второму или третьему индексу, если выполнено, соответственно, первое, второе или третье из равенств

$$\begin{aligned}\sum_i p_{i,j,k} &= \frac{1}{s} && \text{при любых } j, k \in \Gamma; \\ \sum_j p_{i,j,k} &= \frac{1}{s} && \text{при любых } i, k \in \Gamma; \\ \sum_k p_{i,j,k} &= \frac{1}{s} && \text{при любых } i, j \in \Gamma.\end{aligned}$$

Предложение 5. Множество кубических матриц, дважды стохастических относительно или первого, или второго, или же третьего индекса, образуют выпуклую полугруппу.

Доказательство. Прежде всего заметим, что то, что в определении 2 мы называем дважды стохастичностью, есть дважды стохастичность по первому индексу. Поэтому предложение достаточно доказать для дважды стохастичности относительно второго и третьего индексов.

Выпуклость рассматриваемых совокупностей очевидна. Проверим полугрупповое свойство для матриц, дважды стохастических относительно второго индекса. Используя обозначения, принятые в доказательстве предложения 4, имеем:

$$\begin{aligned} \sum_d t_{i,d,r} &= \sum_d \sum_{j \in \Gamma} \sum_{m \in \Gamma} p_{i,j,k} q_{k,m,r} \\ &= \sum_k \sum_j \sum_m p_{i,j,k} q_{k,m,r} = \sum_k \frac{1}{s^2} = \frac{s}{s^2} = \frac{1}{s}. \end{aligned}$$

Доказательство для третьего индекса аналогично.

Заметим, что дважды стохастичность матрицы $P = \|p_{i,j,k}\|$ по второму или третьему индексу влечет стохастичность P . В самом деле, $\sum_j p_{i,j,k} = 1/s$. Тогда, очевидно,

$$\sum_{j,k} p_{i,j,k} = \sum_k \sum_j p_{i,j,k} = \frac{1}{s} \sum_k 1 = \frac{s}{s} = 1.$$

Это приводит к мысли, что стохастичность кубической матрицы может быть определена для любой пары ее индексов. В исходном определении 1 стохастическую матрицу естественно называть стохастической типа (2,3). Аналогично, назовем кубическую матрицу $P = \|p_{i,j,k}\|$ стохастической типа (1,2) (соответственно, типа (1,3)), если $\sum_{i,j} p_{i,j,k} = 1$ при всех $k \in \Gamma$ (соответственно, $\sum_{i,k} p_{i,j,k} = 1$ для всех $j \in \Gamma$).

Предложение 6. Совокупности стохастических матриц типа (1,2) и типа (2,3) образуют выпуклые полугруппы.

Доказательство достаточно провести, в силу предложения 3, для стохастических матриц типа (1,2). В обозначениях, использованных при доказательстве предложения 3, имеем:

$$\sum_{i,d} t_{i,d,r} = \sum_i \sum_d \sum_{j \in \Gamma} \sum_{m \in \Gamma} p_{i,j,k} q_{k,m,r} = \sum_m \left(\sum_k \sum_{i,j} p_{i,j,k} \right) q_{k,m,r} = 1.$$

Предложение доказано.

З а м е ч а н и е. Любопытно отметить, что совокупность стохастических матриц типа (1,3) не образует полугруппу относительно умножения. Более того, легко построить примеры, когда произведение стохастических матриц типа (1,3) равно нулю. С этой целью представим Γ

как сумму непересекающихся множеств Γ_1 и Γ_2 . Определим $\mathcal{P}_{\Gamma_1, \Gamma_2}$ как совокупность матриц $P = \|p_{i,j,k}\|$ таких, что $p_{i,j,k} = 0$, если либо $i \notin \Gamma_1$, либо $k \notin \Gamma_2$. Тогда, если матрицы $P = \|p_{i,j,k}\|$ и $Q = \|q_{r,s,t}\|$ принадлежат $\mathcal{P}_{\Gamma_1, \Gamma_2}$, то $\sum_m \sum_k p_{i,j,k} q_{k,m,r} = 0$ при любых i, j, r , т.е. $PQ = 0$. С другой стороны, если $i \in \Gamma_1$ и $k \in \Gamma_2$, то при любом фиксированном j найдутся положительные элементы $p_{i,j,k}$, дающие в сумме 1.

Приведенная конструкция неприменима в случае стохастических матриц типов (1,2) или (2,3), поскольку, например, при $k \notin \Gamma_2$ все $p_{i,j,k} = 0$, и поэтому $\sum_{i,j} p_{i,j,k} = 0$.

Пусть φ — отображение, ставящее кубической матрице $\|p_{i,j,k}\|$ в соответствие квадратную матрицу $\|\tilde{p}_{i,k}\|$, где $\tilde{p}_{i,k} = \sum_j p_{i,j,k}$. Матрицу $\|\tilde{p}_{i,k}\|$ мы будем называть сопровождающей матрицей матрицы $\|p_{i,j,k}\|$. Если P — стохастическая матрица типа (2,3), то ее сопровождающая матрица, очевидно, есть обычная стохастическая матрица.

Предложение 7. *Отображение φ гомоморфно отображает алгебру кубических матриц с операцией умножения (5) в алгебру квадратных матриц с обычным умножением.*

Доказательство. Пусть $P = \|p_{i,j,k}\|$ и $Q = \|q_{r,s,t}\|$ — произвольные кубические матрицы. Элемент произведения PQ , стоящий на (i, d, r) -м месте, есть $t_{i,d,r} = \sum_{j,m} \sum_k p_{i,j,k} q_{k,m,r}$, $j \circ m = d$. Поэтому при отображении φ получим $\tilde{t}_{i,r} = \sum_d \sum_{j,m} \sum_k p_{i,j,k} q_{k,m,r}$, $j \circ m = d$, и, воспользовавшись леммой 1, найдем, что

$$\tilde{t}_{i,r} = \sum_j \sum_m \sum_k p_{i,j,k} q_{k,m,r} = \sum_k \left(\sum_j p_{i,j,k} \right) \left(\sum_m q_{k,m,r} \right) = \sum_k \tilde{p}_{i,k} \tilde{q}_{k,r}.$$

Линейность же отображения φ очевидна. Предложение доказано.

В заключение этого пункта введем стохастические кубические матрицы относительно операции умножения (2). Приходится это делать отдельно, поскольку, в силу предложений 1 и 2, это умножение не является частным случаем операции (5).

В силу предложения 1, в рассматриваемой ситуации стохастическая кубическая матрица должна являться прямой суммой квадратных стохастических матриц. Поэтому кубическая матрица $\|p_{i,j,k}\|$ является стохастической, если $\sum_k p_{i,j,k} = 1$ для всех $i, j \in \Gamma$. Легко проверяется полугрупповое свойство совокупности таких стохастических матриц. В самом деле, если $\|p_{i,j,k}\|$ и $\|q_{r,s,t}\|$ стохастичны в определенном сейчас смысле, то (i, j, r) -й элемент $c_{i,j,r}$ их произведения в смысле (2) равен $c_{i,j,r} = \sum_k p_{i,j,k} q_{k,j,r}$, и поэтому

$$\sum_r c_{i,j,r} = \sum_k p_{i,j,k} \sum_r q_{k,j,r} = 1.$$

3. Вероятностные интерпретации. Здесь мы рассмотрим лишь некоторые из возможных вероятностных интерпретаций стохастических

ческих кубических матриц с умножением (2)–(5).

а) Умножение (2) интерпретируется тривиально. Элемент $p_{i,j,k}$ стохастической матрицы $P = \|p_{i,j,k}\|$ задает вероятность перехода частицы типа j из состояния i в состояние k . Если P_j обозначает j -й слой матрицы P , то, согласно определению умножения (2), j -й слой матрицы P^n равен P_j^n . Поэтому матрице P можно сопоставить прямую сумму независимых марковских блужданий на Γ с матрицами перехода $P_1, P_2, \dots, P_s$. Понятно, что это блуждание можно рассматривать и как блуждание одной частицы на состояниях Γ^s с матрицей перехода, являющейся крокеровским произведением матриц $P_j, j \in \Gamma$.

б) Обратимся к вероятностной интерпретации умножения (3). Для стохастической матрицы $P = \|p_{i,j,k}\|$ типа (2,3), $\sum_{j,k} p_{i,j,k} = 1$, величину $p_{i,j,k}$ можно интерпретировать как вероятность появления за единицу времени частицы типа k в результате взаимодействия частиц типов i и j . Тогда элемент $p_{i,j,r}^{(n)}$, стоящий на (i, j, r) -м месте матрицы P^n , можно трактовать как вероятность появления частицы типа r через n единиц времени из частицы типа i при условии, что на первом шаге она взаимодействует с частицей типа j .

в) Так как для стохастической матрицы $P = \|p_{i,j,k}\|$ типа (1,2) $\sum_{i,j} p_{i,j,k} = 1$, то $p_{i,j,k}$ можно интерпретировать как вероятность для частицы типа k иметь упорядоченную родительскую пару типов i и j . Тогда элемент $p_{i,j,r}^{(n)}$, стоящий на (i, j, r) -м месте матрицы P^n (с умножением (3)), можно трактовать как вероятность для частицы типа r , полученной через n единиц времени, иметь исходную родительскую упорядоченную пару частиц типов i и j .

г) Рассмотрим матрицу $P = \|p_{i,j,k}\|$, дважды стохастическую, скажем, относительно последнего индекса, с операцией умножения (3). Поскольку для такой матрицы $\sum_k p_{i,j,k} = 1/s$, то можно считать, что за единицу времени с вероятностью $1/s$ появится частица типа j и за то же время с вероятностью $s p_{i,j,k}$ появится частица типа i , которая, взаимодействуя с появившейся частицей типа j , производит частицу типа k . Элемент $p_{i,j,r}^{(n)}$, стоящий на (i, j, r) -м месте матрицы P^n , можно рассматривать как вероятность появления частицы типа r из частицы типа i за n единиц времени при условии, что на первом шаге появляется частица типа j .

Заметим, что величину $\sum_m (1/s) s p_{k,m,r} = p_{k,r}$ можно трактовать как вероятность перехода за один шаг частицы типа k в частицу типа r при взаимодействии с любой частицей типа m , ибо $\sum_r p_{k,r} = 1$. Следовательно, описанный процесс можно представить следующим образом. На начальном этапе с вероятностью $1/s$ выбирается частица любого из s типов, скажем, типа j , дающая при взаимодействии с частицей типа i частицу типа k . Дальнейшее появление частиц происходит по схеме марковской цепи с матрицей перехода $\|p_{k,r}\|$.

д) Можно обобщить процесс, описанный в п. г), считая, что части-

цы типа j появляются с заданной вероятностью p_j , $\sum_j p_j = 1$. Матрицу $\|p_{i,j,k}\|$ с неотрицательными элементами, удовлетворяющими условиям $\sum_k p_{i,j,k} = p_j$, $\sum_j p_j = 1$, можно рассматривать как обобщенную дважды стохастическую (по третьему индексу) матрицу. Нетрудно видеть, что такие матрицы образуют полугруппу с общей операцией умножения (5). Аналогично вводится обобщенная дважды стохастичность относительно первого и второго индексов.

Интерпретация умножения (4) вполне аналогична описанным, с той лишь разницей, что появление частицы типа j происходит не на первом, а на последнем этапе.

ж) Пусть $P = \|p_{i,j,k}\|$ и $Q = \|q_{k,m,r}\|$ — две стохастические матрицы типа (2,3) и умножение определяется (5). Тогда (i,d,r) -й элемент $c_{i,d,r}$ произведения PQ равен $c_{i,d,r} = \sum_{j \circ m = d} \sum_k p_{i,j,k} q_{k,m,r}$.

Если рассматривать $p_{i,j,k}$ как вероятность превращения за единицу времени частицы типа i в частицу типа k под воздействием фактора j и считать, что суперпозиция действующих факторов есть снова фактор, определяемый операцией $\circ$, то $c_{i,d,r}$ задает вероятность превращения частицы типа i в частицу типа r за два временных такта под действием суперпозиции любых двух факторов j и m , для которых $j \circ m = d$. Аналогичную трактовку получают и элементы любой степени P^n .

Заметим, что ассоциативность умножения $\circ$ обеспечивает однозначную определенность фактора за n единиц времени по факторам, действующим на каждом шаге. Кроме того, ассоциативность гарантирует сохранение рекуррентных соотношений для вероятностей перехода, как и в обычных цепях Маркова.

4. Процесс марковского взаимодействия. Процесс, название которого вынесено в заголовок, был в общих словах определен во введении. Определяемый процесс фактически не связан с умножением кубических матриц, а использует лишь стохастические матрицы типа (1,2) или (2,3). Умножение же (5) потребуется лишь для описания связанных с процессом событий, описывающих его предельное поведение.

Дадим теперь строгое формальное описание процесса.

Процесс марковского взаимодействия (п.м.в.) задается на Γ тремя элементами:

- а) начальным распределением $\mu = \{p_i\}$ на Γ ;
- б) стохастической квадратной матрицей $\|p_{i,j}\|$ на Γ ;
- в) кубической матрицей $\|\tilde{p}_{i,j,k}\|$, для которой $\tilde{p}_{i,j,k} \geq 0$ и $\sum_k \tilde{p}_{i,j,k} = 1$ при всех $i, j \in \Gamma$.

Кубические матрицы из п. в) будем в дальнейшем называть для краткости вероятностными, а числа $\tilde{p}_{i,j,k}$ — переходными вероятностями.

Процесс марковского взаимодействия протекает следующим образом. В начальный момент времени с вероятностью p_i имеется частица

типа i . За единицу времени с вероятностью $p_{i,j}$ возникает частица типа j и, как результат ее взаимодействия с частицей типа i , с вероятностью $\tilde{p}_{i,j,i_1}$ появляется частица типа i_1 . Можно говорить также, что в результате взаимодействия частица типа i превращается в частицу типа i_1 . В следующий момент времени с вероятностью p_{i_1,j_1} появляется частица типа j_1 , при взаимодействии которой с частицей типа i_1 появляется частица типа i_2 , и т.д.

Траекторию п.м.в. можно описать двустрочной матрицей

$$\begin{pmatrix} i, & i_1, & i_2, & \dots \\ j, & j_1, & j_2, & \dots \end{pmatrix},$$

где в первой строке указаны типы эволюционирующих частиц в последовательные моменты времени, а во второй — типы частиц, появившиеся для взаимодействия. Эти последние можно трактовать либо как маркировку самой частицы типа i_k , либо как маркировку перехода частицы типа i_k в частицу типа j_k . Ясно, что вероятность перехода i в i_1 при взаимодействии i с j равна

$$p_{i,j,i_1} = p_{i,j} \tilde{p}_{i,j,i_1} \quad (7)$$

и матрица $\|p_{i,j,i_1}\|$ является стохастической матрицей типа $(2,3)$. Ясно также, что произведение $p_{i,j,i_1} p_{i_1,j_1,i_2} \dots p_{i_{n-1},j_{n-1},i_n}$ задает вероятность траектории $\begin{pmatrix} i, & i_1 & \dots, & i_{n-1}, & i_n \\ j, & j_1 & \dots, & j_{n-1}, & \cdot \end{pmatrix}$.

Предложение 8. Существует взаимоднозначное соответствие между матрицами переходных вероятностей п.м.в. и кубическими стохастическими матрицами типа $(2,3)$.

Доказательство. Как уже отмечалось, матрица с элементами (7) является стохастической типа $(2,3)$. Наоборот, если задана стохастическая матрица $\|p_{i,j,i_1}\|$ типа $(2,3)$, то, положив $p_{i,j} = \sum_{i_1} p_{i,j,i_1}$, получим, очевидно, стохастическую квадратную матрицу $\|p_{i,j}\|$. Далее, положив $\tilde{p}_{i,j,i_1} = p_{i,j,i_1}/p_{i,j}$, получаем вероятностную матрицу $\|\tilde{p}_{i,j,i_1}\|$, что также очевидно. Предложение доказано.

Обычная марковская цепь, конечно, является частным случаем п.м.в., когда $\tilde{p}_{i,j,i_1} = \tilde{p}_{i,i_1}$ при всех $j \in \Gamma$. Однако, в отличие от марковской цепи, предельное поведение вероятностей иметь частицу типа i на n -м шаге существенно зависит от множества частиц $j, j_1, \dots, j_{n-1}$, обеспечивающих взаимодействие. В частности, не совсем ясно, что понимать под эргодичностью п.м.в. Оказывается, что умножение (5) кубических матриц представляет возможность ответить на эти вопросы. Но сначала докажем

Предложение 9. Пусть $P = \|p_{i,j,k}\|$ — стохастическая матрица типа $(2,3)$, определяющая, согласно предложению 8, п.м.в. Элемент $p_{i,d,k}^{(n)}$ матрицы $P^n = \|p_{i,d,k}^{(n)}\|$ с умножением (5) задает вероятность перехода в рассматриваемом п.м.в. частицы типа i за n единиц времени

в частицу типа k при произвольном наборе $j, j_1, \dots, j_{n-1}$, удовлетворяющем условию $j \circ j_1 \circ \dots \circ j_{n-1} = d$.

Доказательство. По определению умножения (5),

$$p_{i,d,k}^{(n)} = \sum_{j \circ j_1 \circ \dots \circ j_{n-1} = d} \sum_{i_1, \dots, i_{n-1} \in \Gamma} p_{i,j,i_1} p_{i_1,j_1,i_2} \dots p_{i_{n-1},j_{n-1},k}.$$

Заменяя трехиндексные вероятности по формуле (7), получим

$$\begin{aligned} p_{i,d,k}^{(n)} = & \sum_{j \circ j_1 \circ \dots \circ j_{n-1} = d} \sum_{i_1, \dots, i_{n-1} \in \Gamma} p_{i,j} \tilde{p}_{i,j,i_1} p_{i_1,j_1} \tilde{p}_{i_1,j_1,i_2} \times \dots \\ & \times p_{i_{n-1},j_{n-1}} \tilde{p}_{i_{n-1},j_{n-1},k}. \end{aligned}$$

Произведение, представляющее общий член этой суммы, равно вероятности перехода частицы типа i в частицу типа k за n единиц времени в п.м.в., если частица типа i последовательно производит потомков $i_1, i_2, \dots, i_{n-1}, i_n = k$ с помощью частиц типов $j, j_1, \dots, j_{n-1}$.

Таким образом, стационарность п.м.в., определяемого матрицей P , зависит от выбора умножения, в смысле которого степени P^n сходятся.

5. Стационарные кубические матрицы и эргодичность п.м.в. Предельное поведение вероятностей для п.м.в. возможно лишь по отношению к тому или иному множеству последовательностей типов частиц, участвующих во взаимодействиях, и тесно связано с понятием стационарности для кубических матриц.

О п р е д е л е н и е 4. Процесс марковского взаимодействия называется эргодическим по отношению к умножению (5), если при этом умножении степени P^n отвечающей п.м.в. кубической матрицы P стремятся к матрице Π с положительными элементами.

Ясно, что предельная матрица Π стационарна, т.е. $P\Pi = \Pi$ и $\Pi^2 = \Pi$.

Таким образом, сходимость вероятностей перехода частицы типа i в частицу типа k с ростом n естественно определяется по отношению к множеству $(j, j_1, j_2, \dots, j_{n-1})$ типов частиц, появившихся для взаимодействия, для которых $j \circ j_1 \circ \dots \circ j_{n-1} = d$.

Произвольная стохастическая матрица P типа (2,3) однозначно представляется в виде

$$P = \sum_{i,k} \tilde{p}_{i,k} \varepsilon_{i,k}, \quad (8)$$

где $\varepsilon_{i,k} = \sum_{t \in \Gamma} c_{i,t,k}(i, t, k)$, $c_{i,t,k} \geq 0$, $\sum_{t \in \Gamma} c_{i,t,k} = 1$, а $\|\tilde{p}_{i,k}\|$ — сопро-
вождающая стохастическая матрица для P . Ясно, что $p_{i,j,k} = \tilde{p}_{i,k} c_{i,j,k}$. Будем называть представление (8) марковским разложением кубической стохастической матрицы P .

Полугрупповая операция $\circ$ определяет на Γ полугруппу G . Ниже, если нужно подчеркнуть полугрупповую структуру Γ , мы будем писать G вместо Γ .

Обозначим $M^+(G)$ совокупность всевозможных линейных комбинаций элементов G с неотрицательными коэффициентами. Операция $\circ$ естественно индуцирует на $M^+(G)$ полугрупповую операцию. Полугруппа $M^+(G)$ включает в себя полугруппу $M^1(G)$ всех вероятностных мер на G .

Определим взаимнооднозначное отображение $\sim$ элементов $\varepsilon_{i,k} = \sum_{t \in \Gamma} c_{i,t,k}(i, t, k)$ в элементы $\tilde{\varepsilon}_{i,k} = \sum_{t \in G} c_{i,t,k}t \in M^1(G)$.

Предложение 10. *Справедливо равенство*

$$(\varepsilon_{i,k} \circ \varepsilon_{k,m})^\sim = \tilde{\varepsilon}_{i,k} \circ \tilde{\varepsilon}_{k,m}.$$

Доказательство. По определению умножения (5),

$$\begin{aligned} \varepsilon_{i,k} \circ \varepsilon_{k,m} &= \left(\sum_{u \in \Gamma} c_{i,u,k}(i, u, k) \right) \circ \left(\sum_{v \in \Gamma} c_{k,v,m}(k, v, m) \right) \\ &= \sum_{u,v \in \Gamma} c_{i,u,k} c_{k,v,m}(i, u \circ v, m) \\ &= \sum_{t \in \Gamma} \left(\sum_{u \circ v = t} c_{i,u,k} c_{k,v,m} \right) (i, t, m). \end{aligned}$$

Поэтому

$$\begin{aligned} (\varepsilon_{i,k} \circ \varepsilon_{k,m})^\sim &= \sum_{t \in G} \left(\sum_{u \circ v = t} c_{i,u,k} c_{k,v,m} \right) t \\ &= \left(\sum_{u \in G} c_{i,u,k} u \right) \circ \left(\sum_{v \in G} c_{k,v,m} v \right) = \tilde{\varepsilon}_{i,k} \circ \tilde{\varepsilon}_{k,m}. \end{aligned}$$

Предложение доказано.

В силу (8) отображение $\sim$ естественным образом линейно и гомоморфно продолжается на полугруппу стохастических кубических матриц типа (2,3). Это приводит к необходимости рассмотрения квадратных матриц с элементами из $M^+(G)$ с обычным умножением.

О п р е д е л е н и е 5. Квадратная матрица $\|\delta_{i,j}\|$, $\delta_{i,j} \in M^+(G)$ называется стохастической матрицей над $M^+(G)$, если $\sum_{k \in \Gamma} \delta_{i,k} \in M^1(G)$ при всех $i \in \Gamma$.

Легко убедиться, что такие матрицы образуют выпуклую полугруппу. Для дальнейшего принципиальным является

Предложение 11. *Полугруппа кубических стохастических матриц типа (2,3) с умножением (5) изоморфна полугруппе стохастических матриц над $M^+(G)$.*

Доказательство. Пусть $P = \sum_{i,k \in \Gamma} p_{i,k} \varepsilon_{i,k}$ — марковское разложение стохастической кубической матрицы P типа (2,3). Понятно, что соответствие $\psi: P \longrightarrow \|\tilde{p}_{i,k} \tilde{\varepsilon}_{i,k}\|$ является взаимнооднозначным и выпуклым, а в силу предложения 10 и гомоморфным. Кроме того, ясно,

что матрица $\|\tilde{p}_{i,k}\varepsilon_{i,k}\|$ стохастична в смысле определения 5. Предложение доказано.

Доказанное предложение дает возможность, по крайней мере, для умножений (3) и (4), сразу описать стационарные матрицы.

Действительно, для распределений μ_1 и μ_2 с умножением (3) справедливо равенство $\mu_1 \circ \mu_2 = \mu_1$, а для умножения (4) — равенство $\mu_1 \circ \mu_2 = \mu_2$. Поэтому как для умножения (3), так и для умножения (4) имеем: $\mu \circ \mu = \mu^{\circ 2} = \mu$.

Предложение 12. Для общей кубической стационарной эргодической матрицы P с умножением (3) соответствие ψ имеет вид $\Pi = \|\pi_{i,k}\|$, где $\pi_{i,k} = p_k \varepsilon_i$, $p_k \geq 0$, $\sum_k p_k = 1$, $\varepsilon_i \in M^1(G)$.

Доказательство. Пусть $\|\tilde{p}_{i,k}\tilde{\varepsilon}_{i,k}\|$ — образ кубической стохастической матрицы P при соответствии ψ . Согласно предложению 7, отображение P в $\|\tilde{p}_{i,k}\|$ гомоморфно по умножению. Поэтому стационарность P влечет стационарность и эргодичность $\|\tilde{p}_{i,k}\|$. Поэтому, [2], $\tilde{p}_{i,k} = p_k$, $\sum_{k \in \Gamma} p_k = 1$. Следовательно, $\|\tilde{p}_{i,k}\tilde{\varepsilon}_{i,k}\| = \|p_k \tilde{\varepsilon}_{i,k}\|$. Поскольку в силу стационарности эта матрица идемпотентна, то после возведения ее в квадрат с учетом равенства $\mu_1 \circ \mu_2 = \mu_1$ в i -й строке получим:

$$p_1(p_1\tilde{\varepsilon}_{i,1} + \dots + p_s\tilde{\varepsilon}_{i,s}), \dots, p_s(p_1\tilde{\varepsilon}_{i,1} + \dots + p_s\tilde{\varepsilon}_{i,s}).$$

Сравнивая эту строку с i -й строкой матрицы $\|p_k \tilde{\varepsilon}_{i,k}\|$, обнаруживаем, что $\tilde{\varepsilon}_{i,1} = \tilde{\varepsilon}_{i,2} = \dots = \tilde{\varepsilon}_{i,s} = \varepsilon_i$ для любого $i \in \Gamma$. Наоборот, очевидно, $\|p_k \varepsilon_i\|^2 = \|p_k \varepsilon_i\|$. Предложение доказано.

Аналогично доказывается

Предложение 13. Для общей кубической стохастической эргодической матрицы P с умножением (4) соответствие ψ имеет вид $\|\pi_{i,k}\|$, где $\pi_{i,k} = p_i \varepsilon_i$, $p_i \geq 0$, $\sum_{i \in \Gamma} p_i = 1$, $\varepsilon_i \in M^1(G)$.

Отметим, что тензорное произведение стационарной квадратной матрицы $\|p_k\|$ и стационарного распределения ε на G , очевидно, является стационарным. В соответствии ψ оно имеет вид $\|p_k \varepsilon\|$, что является частным проявлением предложений 12 и 13.

Рассмотрим теперь частный, но весьма распространенный случай, когда в полугруппе G существует двусторонне инвариантная мера ε , т.е. такая мера, для которой $\mu \circ \varepsilon = \varepsilon \circ \mu = \varepsilon$ при любом $\mu \in M^1(G)$. В нашем случае мера ε всегда должна иметь носитель, совпадающий с G , так как в противном случае ее носитель должен был бы быть собственным идеалом G , наличие которого противоречит свойству однозначной разрешимости операции $\circ$.

Для полугруппы с операцией (3) или (4) двусторонне инвариантного распределения не имеется. Так что этот случай принципиально противоположен рассматриваемому. В то же время для произвольной конечной группы G инвариантное распределение на G является единственной двусторонне инвариантной мерой на G .

В дальнейшем стохастические матрицы над $M^1(G)$ нам будет удобно представлять в виде $\|p_{ij}\Delta_{ij}\|$, где Δ_{ij} — вероятностные распределения на G , а $\|p_{ij}\|$ — стохастическая матрица. Для удобства положим $\|p_{ij}\Delta_{ij}\| = (P, \Delta)$, где $P = \|p_{ij}\|$, $\Delta = \|\Delta_{ij}\|$. В частности, пусть $\epsilon = \|\epsilon\|$ — матрица, в которой каждый элемент есть двусторонне инвариантная мера ϵ , $T = \|p_k\|$ — стационарная стохастическая квадратная матрица. Тогда имеет место

Лемма 2. Для любых квадратных стохастических матриц $P = \|p_{ij}\|$, $Q = \|q_{jm}\|$ и $\Delta = \|\Delta_{ij}\|$, $\Delta_{ij} \in M^1(G)$, справедливы равенства

$$(P, \Delta)(Q, \epsilon) = (PQ, \epsilon), \quad (Q, \epsilon)(P, \epsilon) = (QP, \epsilon).$$

Доказательство. Действительно, так как мера ϵ двусторонне инвариантна, то $\Delta_{ij}\epsilon = \epsilon$ и $\epsilon\Delta_{ij} = \epsilon$. Поэтому непосредственное вычисление дает

$$\|p_{ij}\Delta_{ij}\| \|q_{jm}\epsilon\| = \left\| \sum_j p_{ij}q_{jm}\Delta_{ij}\epsilon \right\| = \left\| \left(\sum_j p_{ij}q_{jm} \right) \epsilon \right\| = (PQ, \epsilon).$$

Второе равенство проверяется аналогично. Лемма доказана.

Предложение 14. Пусть задана кубическая стохастическая матрица P типа $(2, 3)$. Для сходимости степеней P^n к стационарной с положительными элементами матрице необходимо и достаточно, чтобы при некотором n_0 все элементы P^{n_0} были положительными.

Доказательство. Необходимость очевидна, будем доказывать достаточность. Предположим вначале, что все элементы кубической матрицы P положительны. Тогда ее ψ -образ равен $\|\tilde{p}_{ij}\Delta_{ij}\|$, где $\|\tilde{p}_{ij}\|$ — стохастическая сопровождающая матрица матрицы P . В силу (8) и определения отображения ψ все $\tilde{p}_{ij}$ больше нуля, а носитель каждого распределения Δ_{ij} совпадает с G . Поэтому при некотором δ , $0 < \delta < 1$, справедливо разложение $\|\Delta_{ij}\| = \delta\|\epsilon\| + (1 - \delta)\|\epsilon_{ij}\|$, $\epsilon_{ij} \in M^1(G)$. Следовательно,

$$\|\tilde{p}_{ij}\Delta_{ij}\| = \delta\|\tilde{p}_{ij}\epsilon\| + (1 - \delta)\|\tilde{p}_{ij}\epsilon_{ij}\|. \quad (9)$$

Возводя обе части (9) в n -ю степень и учитывая лемму 2, получим

$$\psi(P^n) = \|\tilde{p}_{ij}\Delta_{ij}\|^n = \{1 - (1 - \delta)^n\} \|\tilde{p}_{ij}^{(n)}\epsilon\| + (1 - \delta)^n \|\tilde{p}_{ij}\epsilon_{ij}\|^n,$$

где $\|\tilde{p}_{ij}^{(n)}\|$ есть n -я степень сопровождающей матрицы $\tilde{P}$, а $\|\tilde{p}_{ij}\epsilon_{ij}\|^n$ есть некоторая стохастическая матрица над $M^+(G)$. Так как все $\tilde{p}_{ij} > 0$, то $\|\tilde{p}_{ij}^{(n)}\|$ сходится к некоторой стохастической стационарной матрице T с положительными элементами. Поэтому $\psi(P^n)$ сходится к матрице (T, ϵ) . Итак, P^n сходится к стохастической матрице, представляющей тензорным произведением стационарной матрицы T и двусторонне инвариантного распределения ϵ .

Если известно, что P^{n_0} имеет положительные элементы, то, по доказанному, $\psi(P^{n_0 t})$ сходится к (T, ε) при $t \rightarrow \infty$. Поэтому

$$\psi(P^n) = \psi(P^r P^{n_0 t}) = \psi(P^r) \psi(P^{n_0 t}), \quad 0 \leq r < n_0,$$

при любых n . Тогда $\psi(P^r) \psi(P^{n_0 t}) = \psi(P^r)[(T, \varepsilon) + \delta_n]$, где матрица δ_n стремится к нулю. Так как T стационарная матрица, то в силу леммы 2, очевидно, имеем: $\psi(P^r)(T, \varepsilon) = (T, \varepsilon)$. Предложение доказано.

Выше отмечалось, что процесс марковского взаимодействия, определяясь однозначно кубической стохастической матрицей типа (2, 3), вообще говоря, не связан с умножением кубических матриц. Операция $\circ$ помогает только определить множество частиц $\{j, j_1, j_2, \dots\}$, относительно которого существуют финальные вероятности появления потомков. В зависимости от вида кубической матрицы P может оказаться, что при одной операции $\circ$ процесс марковского взаимодействия эргодичен, а при другой нет. Поэтому возникает интересный для приложений вопрос, при каких условиях на P можно всегда определить на Γ такую операцию, чтобы процесс марковского взаимодействия, определяемый P , был эргодичен. Это давало бы стратегию выбора частиц $\{j_m\}$. Предложение 14 дает один такой случай: когда все элементы матрицы P больше нуля, то при любом выборе групповой операции $\circ$ процесс марковского взаимодействия будет эргодичен. Но тогда возникает естественный вопрос о выборе наипростейшего множества $J_d^{(n)} = \{j, j_1, j_2, \dots, j_{n-1}\}$, для которого $j \circ j_1 \circ \dots \circ j_{n-1} = d$. Ответ здесь простой. Если Γ имеет s элементов, то надо выбирать наипростейшие коммутативные группы из s элементов. Например, рассматривать на Γ структуру коммутативной группы сложения по $\text{mod } s$. Если $s = 2^m$, то еще лучше рассмотреть прямое произведение m групп второго порядка.

6. Марковские цепи, индуцированные кубическими матрицами. Операции (3), (4) и (5) определяют, подобно квадратным матрицам, преобразование множества Γ в себя по правилу $i \circ (l, j, k) = k$, если $i = l$, и нуль в противном случае, трактуемый как уничтожение. Проверка согласованности операции $\circ$ с ассоциативностью любого из этих умножений очевидна. На множестве Γ^2 также определяется преобразование его в себя, согласованное с умножением кубических матриц. Для общей операции (5) положим

$$(h, l) \circ (k, m, r) = \begin{cases} 0, & \text{если } l \neq k, \\ (h \circ m, r), & \text{если } l = k. \end{cases} \quad (10)$$

Тогда

$$[(h, k) \circ (k, m, r)] \circ (r, s, t) = (h \circ m, r) \circ (r, s, t) = ((h \circ m) \circ s, t).$$

С другой стороны,

$$(h, k) \circ [(k, m, r) \circ (r, s, t)] = (h, k) \circ (k, m \circ s, t) = ((h \circ (m \circ s)), t).$$

В силу ассоциативности умножения $\circ$ получаем:

$$((h \circ m) \circ s, t) = ((h \circ (m \circ s), t).$$

В частных случаях операций (3) и (4), соответственно, имеем:

$$(i, j) \circledast (f, j, k) = (i, k), \quad (i, f) \circledast (f, j, k) = (j, k), \quad (11)$$

в остальных случаях получаем ноль. Наконец, наряду с этими последними действиями, определяются симметричные к ним:

$$(i, f) \circledast (i, j, k) = (k, f), \quad (i, f) \circledast (i, j, k) = (k, j). \quad (12)$$

Проверка ассоциативности для операции (4) дает:

$$[(i, f) \circledast (i, j, k)] \circledast (k, m, r) = (k, j) \circledast (k, m, r) = (r, m).$$

С другой стороны,

$$(i, f) \circledast [(i, j, k) (k, m, r)] = (i, f) \circledast (i, m, r) = (r, m).$$

Аналогично проверяется согласованность умножения с ассоциативностью операции (3).

Тогда, в соответствии с (10), стохастическая матрица P типа (2,3) естественным образом определяет стохастическую матрицу на множестве Γ^2 . Для $(h, l) \in \Gamma^2$ положим

$$(h, l) \circledast P = (h, l) \circledast \left[\sum_{k, m, r} p_{k, m, r} (k, m, r) \right] = \sum_{m, r} p_{l, m, r} (h \circ m, r). \quad (13)$$

В данном случае мы предполагаем операцию $\circ$ однозначно разрешимой справа. Поэтому при $m \in \Gamma$ и фиксированном h элемент $h \circ m$ однозначно пробегает все элементы Γ . С другой стороны, $\sum_{m, r} p_{l, m, r} = 1$ при любом $l \in \Gamma$. Итак, на Γ^2 определена дважды стохастическая матрица $\sigma(P)$, элементы которой составлены из элементов $P = \|p_{i, j, k}\|$. Согласно (13), элемент $P_{(h, l), (d, r)}$ матрицы $\sigma(P)$ равен $p_{l, m_d, r}$, где $h \circ m_d = d$. Поэтому при любой фиксированной нумерации пар (h, l) для столбцов c , составленных из них, будем иметь: $c \circledast P = \sigma(P)c$.

Предложение 15. *Отображение σ взаимно однозначно, гомоморфно и линейно выпукло.*

Доказательство. Гомоморфизм отображения σ следует из согласованности операции $\circledast$ с ассоциативностью умножения кубических матриц. Действительно, имеем по определению: $c \circledast PQ = \sigma(PQ)c$. С другой стороны, в силу согласованности $\circledast$ с ассоциативностью умножения имеем: $c \circledast PQ = \sigma(P)c \circledast Q = \sigma(P)\sigma(Q)c$. Откуда $\sigma(PQ) = \sigma(P)\sigma(Q)$. Взаимная однозначность и линейность отображения σ очевидны.

Таким образом, отображение σ можно рассматривать как представление алгебры кубических матриц квадратными. Среди частных слу-

чаев операций $\circ$ и $\otimes$ содержится много интересных, но мы их не рассматриваем, так как все они являются интерпретациями предложений 9 и 15.

В заключение укажем еще один марковский процесс на Γ^2 , естественно порождаемый процессом марковского взаимодействия. Если

$$\begin{pmatrix} i, & i_1, & i_2, & \dots \\ j, & j_1, & j_2, & \dots \end{pmatrix}$$

— траектория п.м.в., то вероятность перехода пары (i_m, j_m) в пару (i_{m+1}, j_{m+1}) , очевидно, равна

$$P_{i_m j_m, i_{m+1} j_{m+1}} = \tilde{p}_{i_m j_m, i_{m+1}} p_{i_{m+1} j_{m+1}}. \quad (14)$$

В силу свойств б) и в) определения п.м.в. и соотношения (14), имеем $\sum_{i_{m+1}, j_{m+1}} P_{i_m j_m, i_{m+1} j_{m+1}} = 1$, и, следовательно, вероятности (14) определяют на Γ^2 марковский процесс. В силу предложения 8, п.м.в. однозначно определяется кубической матрицей $\|p_{i,j,k}\| = \|p_{ij}\tilde{p}_{i,j,k}\|$, и сопровождающая матрица $\|\tilde{p}_{ik}\|$, $\tilde{p}_{ik} = \sum_{j \in \Gamma} p_{i,j,k}$, является стохастической. Ясно, что $\tilde{p}_{ik}$ есть вероятности перехода частицы i в частицу k независимо от промежуточных взаимодействующих частиц j .

Таким образом, возникает обычный марковский процесс, который будем называть сопровождающим для п.м.в. Сопровождающий процесс замечателен тем, что его вероятности перехода за n шагов полностью определяют соответствующие вероятности перехода процесса на Γ^2 . Точнее, пусть $\|\tilde{p}_{kf}^{(n)}\| = \|\tilde{p}_{kf}\|^n$ и $P_{ij, fh}$ есть вероятность перехода за n шагов пары (i, j) в пару (f, h) . Тогда нетрудно видеть, что имеет место равенство

$$P_{ij, fh}^{(n)} = \left(\sum_{t \in \Gamma} \tilde{p}_{i,j,t} \tilde{p}_{tf}^{(n-1)} \right) p_{fh}.$$

Наконец, необходимо отметить, что поддержка этого направления О. В. Висковым, Э. Л. Пресманом и Ю. В. Прохоровым сильно стимулировала появление этой работы. Кроме того, без большой редакционной помощи О. В. Вискова и его замечаний окончательный текст вряд ли был бы написан. Всем им приношу искреннюю дружескую благодарность.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Соколов Н. П. Пространственные матрицы и их приложения. М.: Физматгиз, 1960, 300 с.
2. Ширяев А. Н. Вероятность. М.: Наука, 1980, 575 с.

Поступила в редакцию
13.VI.1995