Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. К. Малиновский, Предельные теоремы для остановленных случайных последовательностей, II: вероятности больших отклонений, *Теория вероятн. и ее примен.*, 1996, том 41, выпуск 1, 107–132

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp2778>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.209.158.208

26 апреля 2023 г., 15:43:44

© 1996 г.

МАЛИНОВСКИЙ В. К.*

**ПРЕДЕЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ
ДЛЯ ОСТАНОВЛЕННЫХ СЛУЧАЙНЫХ
ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ,
II: ВЕРОЯТНОСТИ БОЛЬШИХ УКЛОНЕНИЙ¹⁾**

В схеме суммирования остановленных случайных последовательностей, допускающих рекордную регенерацию, при невысоких моментных условиях получены аппроксимации и оценки вероятностей больших уклонений, обобщающие результаты, полученные ранее А. В. Нагаевым, С. В. Нагаевым и Д. Х. Фуком для независимых случайных величин. Специальными случаями рассматриваемой схемы являются остановленные случайные блуждания, возвратные процессы марковского восстановления и некоторые последовательные статистические процедуры.

Ключевые слова и фразы: остановленные последовательности, большие уклонения, рекордная регенерация.

1. Введение. Первая часть [6] настоящей работы была посвящена уточнениям асимптотической (при $t \rightarrow \infty$) нормальности случайной величины (с.в.)

$$U_{\nu(t)} = \sum_{k=1}^{\nu(t)} Z_k \quad (1)$$

и случайного вектора

$$(U_{\nu(t)}, \nu(t)), \quad (2)$$

где $\nu(t) = \min\{n > 0: \sum_{k=1}^n W_k > t\}$ и образующая последовательность

$$(W_k, Z_k), \quad k = 1, 2, \dots, \quad (3)$$

допускает *рекордную регенерацию* (см. определение 1 п. 2 [6] или ниже, п. 2).

*Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, ул. Вавилова, 42, 117966 Москва, Россия.

¹⁾Исследования, опубликованные в этой работе, частично поддерживались грантом № JB7100 Международного научного фонда и Правительства Российской Федерации.

Внимание к этой задаче связано с интересом, который представляют распределения $U_{\nu(t)}$ и $(U_{\nu(t)}, \nu(t))$ в многочисленных специальных случаях схемы остановленных случайных последовательностей (ОСП), из которых в [6] упоминались остановленные случайные блуждания (ОСБ), возвратные процессы марковского восстановления (ПМВ) и некоторые последовательные статистические процедуры. Близкая проблематика возникает в теории риска (см. [22]), в теории массового обслуживания и во многих других задачах прикладной теории вероятностей.

Асимптотические разложения для распределений $U_{\nu(t)}$ и $(U_{\nu(t)}, \nu(t))$ были найдены в [6] в терминах моментов *приращений на циклах* рекордной регенерации. Выражение этих моментов в терминах характеристик конкретных процессов, позволило автору получать асимптотические разложения для остановленных случайных блужданий, для возвратных процессов марковского восстановления, некоторых последовательных статистических процедур и в задаче аппроксимации вероятности разорения в андерсоновской модели теории риска (см. п. 3 в [6], [20], [21]¹⁾, [22]).

Предметом настоящего исследования будут большие отклонения суммы $U_{\nu(t)}$ от ее асимптотического среднего $m_1(t) = \mu_F \mu_T^{-1} t$, т.е. события вида

$$U_{\nu(t)} - m_1(t) > x, \quad U_{\nu(t)} - m_1(t) < -x, \quad |U_{\nu(t)} - m_1(t)| > x, \quad (4)$$

где $x^{-1}(U_{\nu(t)} - m_1(t)) \rightarrow 0$ по вероятности при $x \rightarrow \infty$ и $t \rightarrow \infty$. Здесь и далее в этом пункте мы пользуемся обозначениями п. 2 и работы [6]. Как и в [6], относительно последовательности (3) предполагается, что она допускает рекордную регенерацию и что приращения на циклах имеют степенные моменты невысоких порядков.

Для удобства читателя приведем ниже два известных результата о больших отклонениях суммы $U_n = \sum_{i=1}^n Z_i$ независимых одинаково распределенных (н.о.р.) с.в. Z_i , $i = 1, 2, \dots$, имеющих степенные моменты невысоких порядков. Обобщение этих результатов на схему ОСП будет составлять основную цель настоящей работы. Заметим попутно, что эти результаты обобщались ранее на случаи слабо зависимых последовательностей и мартингалов в [26] и [11], а на случаи возвратных по Харрису цепей Маркова и возвратных ПМВ — в [4] и [5].

Предложение 1. Пусть $Z_1, \dots, Z_n$ являются н.о.р. с.в. Предположим, что $P(Z_1 > x) = L(x)x^{-s}(1 + o(1))$ при $x \rightarrow \infty$, где $L(x)$ является медленно меняющейся функцией и $s > 2$. Если $EZ_1 = 0$, $DZ_1 = 1$ и $E|Z_1|^{2+\delta} < \infty$ для некоторого $\delta > 0$, то для $x \geq n^{1/2}$, при $n \rightarrow \infty$,

$$P(U_n > x) = (1 - N_{(0,1)}(xn^{-1/2}))(1 + o(1)) + nP(Z_1 > x)(1 + o(1)). \quad (5)$$

¹⁾См. ниже п. 6, замечание 6.

Здесь и далее через $\mathcal{N}_{(m,b^2)}$ и $\mathcal{N}_{(m,b^2)}$ обозначаются нормальная функция распределения и нормальная плотность со средним m и дисперсией b^2 .

Предложение 2. Пусть $Z_1, \dots, Z_n$ являются н.о.р. с.в. Предположим, что $E|Z_1|^q < \infty$ для некоторого $q > 0$ и если $q > 1$, то $EZ_1 = 0$. Тогда

$$P(U_n > x) \leq nP(Z_1 > x) + P_{Z_1}(q, x, n). \quad (6)$$

Выражение $P_{Z_1}(q, x, n)$ определяется в п. 2. Заметим, в частности, что оно является величиной порядка $O(nx^{-q})$ при $q > 2$, $x > cn^{1/2} \ln n$, и при $q \leq 2$, $x > cn^{1/q}$.

Результаты, подобные оценке (6), были получены впервые в работах Нагаева [8] и Фука, Нагаева [12]. Собственно предложение 2 было доказано в лемме 5.1 работы [13].

Предложение 1 было впервые получено в работе [7]. В [24] было отмечено, что при $x > c_1(q)(n \ln n)^{1/2}$ главным членом в правой части (5) является второе слагаемое, и наиболее вероятной причиной превышения суммой U_n уровня x является наличие одного большого слагаемого, превосходящего x . При $n^{1/2} \leq x < c_2(q)(n \ln n)^{1/2}$, наоборот, главным членом в правой части (5) будет первое слагаемое, и вклад отдельного слагаемого в сумму U_n , превосшедшую x , оказывается малым по сравнению с величиной самой этой суммы.

Для сокращения объема мы не приводим формулировок аналогичных результатов для левосторонних и двусторонних уклонений, которые могут быть найдены в работах [7], [8], [12].

Переходя снова к схеме ОСП, обозначим $\mathcal{R}_W(t) = \sum_{i=1}^{\nu(t)} W_i - t$ величину перескока через уровень t последовательности $V_k = \sum_{i=1}^k W_i$, $k = 1, 2, \dots$. Поскольку

$$U_{\nu(t)} - m_1(t) = \mu_T^{-1} \sum_{k=1}^{\nu(t)} (\mu_T Z_k - \mu_F W_k) + \mu_F \mu_T^{-1} \mathcal{R}_W(t), \quad (7)$$

ключевым моментом (см. п. 2, замечание 3) работы будет анализ с.в.

$$\Delta_t = \sum_{k=1}^{\nu(t)} (\mu_T Z_k - \mu_F W_k) - \sum_{k=1}^{N_t} B_k, \quad (8)$$

где $N_t = [t\mu_T^{-1}]$ и с.в. с нулевыми средними, $B_k = \mu_T F_k - \mu_F T_k$, $k = 1, 2, \dots$, являются н.о.р. приращениями на циклах рекордной регенерации.

В п. 2 содержатся утверждения о том, что с.в. Δ_t в известном смысле мала по сравнению с $\sum_{k=1}^{N_t} B_k$. Так, при естественных условиях регулярности, «правильной» нормировкой для Δ_t является величина $t^{-1/4}$, распределение $t^{-1/4} \Delta_t$ невырождено и аппроксимируется масштабной

смесью нормальных распределений (см. теорему 3 п. 2). Вероятности больших уклонений Δ_t оцениваются сверху величинами, которые при $x, t \rightarrow \infty$ убывают по порядку быстрее соответствующих оценок вероятностей больших уклонений $\sum_{k=1}^{N_t} B_k$ (см. теорему 4 п. 2).

Указанные результаты для Δ_t представляют известный самостоятельный интерес. Он состоит в возможности исследовать величину погрешности традиционного метода анализа сумм $U_{\nu(t)}$, восходящего к работам Колмогорова и Деблина о ЦПТ для дискретных цепей Маркова. Существо этого метода заключается в следующем:

(а) первое слагаемое в правой части (7) аппроксимируется «блоковой суммой» $\mu_T^{-1} \sum_{k=1}^{\nu_T(t)} B_k$, где $\nu_T(t) = \min\{n > 0: \sum_{k=1}^n T_k > t\} - 1$. При этом случайные векторы (B_k, T_k) , $k = 1, 2, \dots$, приращений на циклах рекордной регенерации, независимы, одинаково распределены и $T_k \geq 0$.

(б) «блоковая сумма» $\sum_{k=1}^{\nu_T(t)} B_k$ аппроксимируется суммой $\sum_{k=1}^{N_t} B_k$ н.о.р. с.в. с неслучайным пределом суммирования, к которой применяются классические результаты теории вероятностей.

Материал статьи расположен следующим образом. Теоремы 1 и 2, содержащие результаты об уклонениях с.в. $U_{\nu(t)}$ от ее асимптотического среднего $m_1(t)$, а также теоремы 3 и 4, в которых исследуется асимптотическое поведение с.в. Δ_t , сформулированы в п. 2 и доказаны в п. 4. В п. 3 приведены некоторые следствия теорем 1 и 2. В п. 5 собраны необходимые вспомогательные результаты. В п. 6 кратко изложены соображения, позволяющие обобщить результаты настоящей работы и работы [6] на схему ОСП с m -зависимыми циклами.

2. Формулировки основных результатов. Пусть последовательность случайных векторов с вещественными компонентами, (W_k, Z_k) , $k = 1, 2, \dots$, допускает *рекордную регенерацию* (является *RR-последовательностью*). Согласно определению 1 п. 2 [6], это означает, что существует такая последовательность п.н. конечных случайных индексов $0 < \xi_0 < \xi_1 < \dots$ (рекордных моментов регенерации), что для любого $i = 0, 1, 2, \dots$

(i) ξ_i является моментом регенерации последовательности (W_k, Z_k) , $k = 1, 2, \dots$, так что случайные векторы (τ_k, T_k, F_k) , определенные соотношениями

$$\tau_0 = \xi_0, \quad T_0 = \sum_{i=1}^{\xi_0} W_i, \quad F_0 = \sum_{i=1}^{\xi_0} Z_i,$$

$$\tau_k = \xi_k - \xi_{k-1}, \quad T_k = \sum_{i=\xi_{k-1}+1}^{\xi_k} W_i, \quad F_k = \sum_{i=\xi_{k-1}+1}^{\xi_k} Z_i, \quad k = 1, 2, \dots,$$

при $k = 0, 1, 2, \dots$ независимы, а при $k = 1, 2, \dots$, кроме того, одинаково распределены;

(ii) ξ_i является (верхним) рекордным моментом последовательности $V_k = \sum_{i=1}^k W_i$, $k = 1, 2, \dots$, $V_0 = 0$, так что $V_{\xi_i} > \max_{0 \leq k \leq \xi_i - 1} V_k$.

Напомним (см. п. 2 работы [6]), что $\mu_F, \mu_T, \mu_\tau, \sigma_F^2, \sigma_T^2, \sigma_\tau^2$ и $\kappa_{T,\tau}$ обозначают соответственно средние, дисперсии с.в. F_1, T_1, τ_1 и ковариацию с.в. T_1, τ_1 . Как и в [6], положим

$$m_1(t) = \mu_F \mu_T^{-1} t \quad \text{и} \quad S_1^2(t) = \sigma_B^2 \mu_T^{-3} t,$$

где σ_B^2 обозначает дисперсию с.в. $B_k = \mu_T F_k - \mu_F T_k$, $k = 1, 2, \dots$. Очевидно, что с.в. $\{B_k\}$ независимы, одинаково распределены и имеют нулевые математические ожидания. Будем обозначать также $\nu_q = \mathbf{E}|B_1|^q$ их абсолютный момент порядка q . В частности, $\nu_2 = \sigma_B^2$.

Как и в [6], будем называть функцию $\mathbf{p}_{T,\tau}(x, k) = \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{P}\{T_1 \leq x, \tau_1 = k\}$ условной плотностью и звездочкой обозначать операцию свертки.

Выделим три области значений параметров q и x :

$$\begin{aligned} \text{(I): } & 1 \leq q \leq 2, \quad x > 0, \\ \text{(II): } & q > 2, \quad x \geq x(q, u) = \frac{1}{2}(q-2)(u\sigma_B^2)^{1/2} \ln u, \\ \text{(III): } & q > 2, \quad 0 < x < x(q, u), \end{aligned}$$

и для $u \geq 1$ положим

$$\mathbf{p}_{B_1}(q, x, u) = \begin{cases} C_1(\nu_q) u x^{-q} & \text{в случае (I),} \\ C_2(\nu_q) u x^{-q} & \text{в случае (II),} \\ C_3(\nu_q \sigma_B^{-q}) \exp(-x(u\sigma_B^2)^{-1/2}) & \text{в случае (III),} \end{cases} \quad (9)$$

где

$$\begin{aligned} C_1(z) &= e K_q z, \quad C_2(z) = C_1(z) \exp \left[1 + \frac{e}{2} \left(\frac{q}{e} + 1 \right)^2 \right], \\ C_3(z) &= \exp \left(\frac{e}{2} + K_q z \right), \\ K_q &= \begin{cases} 1, & \text{если } 1 \leq q \leq 2, \\ 1 + e^{-q}(q+1)^{q+2}, & \text{если } q > 2. \end{cases} \end{aligned}$$

Следующие условия, первые три из которых введены в [6], используются в формулировках основных результатов.

У с л о в и е (P1). Для некоторого целого $n \geq 1$ существует условная плотность $\mathbf{p}_{T,\tau}^{*n}(t, k) = \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{P}\{\sum_1^n T_i \leq t, \sum_1^n \tau_i = k\}$.

У с л о в и е (L). Случайная величина τ_1 принимает значения из натуральной решетки $\mathbf{N}$ с максимальным шагом 1.

У с л о в и е MM(r, s). Для $r, s > 0$

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \xi_0^r &< \infty, \quad \mathbf{E} \tau_1^s < \infty, \\ \mathbf{E} \left(\sum_{k=1}^{\xi_0} |Z_k| \right)^r &< \infty, \quad \mathbf{E} \left(\sum_{k=\xi_0+1}^{\xi_1} |Z_k| \right)^s < \infty, \end{aligned}$$

$$\mathbf{E} \left(\sum_{k=1}^{\xi_0} |W_k| \right)^r < \infty, \quad \mathbf{E} \left(\sum_{k=\xi_0+1}^{\xi_1} |W_k| \right)^s < \infty.$$

У с л о в и е (S_r) . Для $s_1 > 2$ и некоторой функции $M_1(x)$, медленно меняющейся на бесконечности, $P(B_1 > x) = M_1(x)x^{-s_1}(1 + \bar{o}(1))$ при $x \rightarrow \infty$.

У с л о в и е (S_l) . Для $s_2 > 2$ и некоторой функции $M_2(x)$, медленно меняющейся на бесконечности, $P(B_1 < -x) = M_2(x)x^{-s_2}(1 + \bar{o}(1))$ при $x \rightarrow \infty$.

Напомним (см., например, [10]), что медленно меняющейся на бесконечности называется такая функция $L(x)$, что $L(tx)/L(x) \rightarrow 1$ при $x \rightarrow \infty$ для любого положительного t .

Теорема 1. Пусть (W_k, Z_k) , $k = 1, 2, \dots$, является RR -последовательностью. Пусть выполнены условия $(P1)$, (L) , $MM(2+\delta, 2+\delta)$ для некоторого $\delta > 0$. Если выполнено условие (S_r) , то для $x > \sigma_B \mu_T^{-3/2} t^{1/2}$ при $t \rightarrow \infty$

$$P(U_{\nu(t)} - m_1(t) > x) = \left[(1 - N_{(0, S_1^2(t))}(x)) + t\mu_T^{-1} P(B_1 > \mu_T x) \right] (1 + \bar{o}(1)).$$

Если выполнено условие (S_l) , то для $x > \sigma_B \mu_T^{-3/2} t^{1/2}$ при $t \rightarrow \infty$

$$P(U_{\nu(t)} - m_1(t) < -x) = \left[N_{(0, S_1^2(t))}(x) + t\mu_T^{-1} P(B_1 < -\mu_T x) \right] (1 + \bar{o}(1)).$$

Следующая теорема содержит оценки сверху для вероятностей больших отклонений $U_{\nu(t)}$ при невысоких моментных условиях.

Теорема 2. Пусть (W_k, Z_k) , $k = 1, 2, \dots$, является RR -последовательностью. Пусть выполнены условия $(P1)$, (L) и условие $MM(q, q)$ для некоторого $q \geq 1$. Тогда для любого $0 < \varepsilon < 1$ и $x > 0$ при $t \rightarrow \infty$,

$$\begin{aligned} P(U_{\nu(t)} - m_1(t) > x) &\leq \left[t\mu_T^{-1} P(B_1 > \varepsilon \mu_T x) + P_{B_1}(q, \varepsilon \mu_T x, t\mu_T^{-1}) \right] (1 + \bar{o}(1)), \\ P(U_{\nu(t)} - m_1(t) < -x) &\leq \left[t\mu_T^{-1} P(B_1 < -\varepsilon \mu_T x) + P_{B_1}(q, \varepsilon \mu_T x, t\mu_T^{-1}) \right] (1 + \bar{o}(1)). \end{aligned}$$

Из-за ограниченности объема мы не будем приводить двусторонние аналоги теорем 1 и 2.

З а м е ч а н и е 1. Асимптотика теоремы 1 включает в себя как «умеренные», так и «большие» отклонения суммы $U_{\nu(t)}$ от ее асимптотического среднего $m_1(t)$. Опираясь на условие (S_r) , легко проверить, что при $\sigma_B \mu_T^{-3/2} t^{1/2} < x < a \mu_T^{-1} (t \ln t)^{1/2}$, где $a < \sigma_B \mu_T^{-1/2} (s_1 - 2)^{1/2}$ и $s_1 > 2$,

$$t\mu_T^{-1} P(B_1 > \mu_T x) = \bar{o} \left(1 - N_{(0, S_1^2(t))}(x) \right) \quad \text{при } t \rightarrow \infty.$$

При $x > b\mu_T^{-1}(t \ln t)^{1/2}$, где $b > \sigma_B \mu_T^{-1/2}(s_1 - 2)^{1/2}$ и $s_1 > 2$,

$$1 - \mathcal{N}_{(0, S_1^2(t))}(x) = \bar{o}\left(t\mu_T^{-1}P(B_1 > \mu_T x)\right) \quad \text{при } t \rightarrow \infty.$$

Аналогичное замечание справедливо и для вероятностей левосторонних уклонений.

Проверка условий теоремы 2, в отличие от условий (S_r) и (S_l) теоремы 1, не представляет сколько-нибудь значительных сложностей. Однако ценность теоремы 1 заключается скорее всего в том, что она позволяет судить об асимптотической правильности оценок теоремы 2.

З а м е ч а н и е 2. Оценки теоремы 2 в известном смысле следует расценивать как упрощение записи неасимптотических неравенств, примерами которых являются оценки работ [4], [5] и предложения 2. Анализируя приведенное в п. 4 доказательство, легко убедиться, что для получения неасимптотических неравенств следует воспользоваться вспомогательной предельной теоремой в форме следствия 6 п. 3 части II работы [1] и оценками в леммах п. 5 с явно выписанной правой частью. Эти усовершенствования теоремы 2 сопряжены с громоздкими выкладками, но не содержат принципиальных трудностей.

Форма, в которой представлены неравенства теоремы 2, вызвана желанием сохранить баланс между объемом статьи и степенью детализации результатов. При этом автор понимает, что асимптотические оценки имеют ограниченную применимость (например, они неприменимы в схеме «серий», т.е. если последовательность (W_k, Z_k) , $k = 1, 2, \dots$, зависит от t), и что, вообще говоря, само использование символа $\bar{o}$ в неравенствах требует естественных пояснений.

Перейдем к вспомогательным предельным теоремам для случайной величины Δ_t , определенной в (8).

Теорема 3. Пусть (W_k, Z_k) , $k = 1, 2, \dots$, является RR -последовательностью. Если выполнены условия $(P1)$, (L) и условие $MM(\frac{3}{2}, 3)$, то при $t \rightarrow \infty$

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} \left| P(\Delta_t \leq x) - \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{N}_{(0,1)}\left(\frac{x\mu_T^{3/4}}{\sigma_B \sigma_T^{1/2} t^{1/4} |y|^{1/2}}\right) \mathfrak{N}_{(0,1)}(y) dy \right| = O(t^{-1/4}).$$

Ценой известного усложнения доказательств (см. [19]) можно получить асимптотические разложения в теореме 3, локальные варианты предельных теорем для Δ_t , а также аналогичные результаты для совместного распределения пары $(\sum_{k=1}^{N_t} B_k, \Delta_t)$.

Обозначим здесь и далее $c, c_1, \dots$ и $c(\cdot)$ положительные константы, не обязательно совпадающие в различных формулах, причем $c(\cdot)$ будет зависеть только от выражений, указанных в скобках. Сформулируем теорему, которая дает асимптотические верхние границы для вероятностей уклонений с.в. $|\Delta_t|$, каковыми, согласно теореме 3, являются события вида $|\Delta_t| \notin [0, ct^{1/4}]$.

Теорема 4. Пусть (W_k, Z_k) , $k = 1, 2, \dots$, является RR -последовательностью. Пусть выполнены условия $(P1)$, (L) и условие $MM(q, q)$ для некоторого $q \geq 1$. Если $x \geq ct^{1/q}$ и $q \leq 2$ или если $x \geq ct^{1/2}$ и $q > 2$, то

$$P(|\Delta_t| > x) = O(t^{1/2}x^{-q}) \quad \text{при } t \rightarrow \infty.$$

З а м е ч а н и е 3. Величина перескока $\mathcal{R}_W(t) = \sum_{k=1}^{\nu(t)} W_k - t$ последовательности $\{V_k\}_{k=1,2,\dots}$ через уровень t не превосходит величины перескока «по блокам», $\mathcal{R}_T(t) = \sum_{k=0}^{\nu_T(t)+1} T_k - t$, относительно которой известно (см. [14, гл. III, теорему 10.2 (iii)]), что если $q \geq 1$ и $ET_0^q < \infty$, $ET_1^q < \infty$, то $E(\mathcal{R}_T(t))^q = \bar{o}(t)$ при $t \rightarrow \infty$. Применяя неравенство Чебышева, легко получить оценку

$$P\{\mathcal{R}_W(t) > x\} = \bar{o}(tx^{-q}) \quad \text{при } t \rightarrow \infty \text{ и } x \rightarrow \infty. \quad (10)$$

3. Некоторые следствия основных результатов. Рассмотрим сперва в известном смысле простейший специальный случай ОСП, каковым является остановленное случайное блуждание (см. [14, гл. IV] и [6, п. 3]): предположим, что последовательность (W_k, Z_k) , $k = 1, 2, \dots$, образована н.о.р. случайными векторами (координаты которых, вообще говоря, зависимы) и что случайная величина W_1 имеет положительное математическое ожидание $\mu_W = EW_1$.

Напомним (см. [6, п. 3]), что $\sigma_W^2 = DW_1$, $\mu_Z = EZ_1$, $\sigma_Z^2 = DZ_1$, $\kappa_{ZW} = \text{cov}(Z_1, W_1)$ и $\mu_\xi = E\xi_0$, где $\xi_0 = \min\{n > 0: V_n > 0\}$ — строго верхний лестничный момент случайного блуждания $\{V_k\}_{k=1,2,\dots}$. Обозначим для упрощения записи $H_1 = \mu_W Z_1 - \mu_Z W_1$ и положим $S_1^2 = DH_1/\mu_W^3$.

Поскольку $\mu_W > 0$, случайное блуждание $\{V_k\}_{k=1,2,\dots}$ п.н. «уходит в бесконечность» и (см. формулу (7.11) в [10, гл. XII, § 7])

$$\ln \mu_\xi = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-1} P\{V_n \leq 0\}.$$

Теорема 5. Пусть последовательность (W_k, Z_k) , $k = 1, 2, \dots$, состоит из независимых одинаково распределенных векторов. Пусть существует плотность с.в. W_1 относительно меры Лебега, $E|Z_1|^{2+\delta} < \infty$ и $E|W_1|^{2+\delta} < \infty$ для некоторого $\delta > 0$, и $P(B_1 > x) = L(x)x^{-s}(1+\bar{o}(1))$ при $x \rightarrow \infty$, где $L(x)$ — медленно меняющаяся функция и $s > 2$. Тогда для $x \geq S_1\mu_W^{-1/2}t^{1/2}$

$$\begin{aligned} P(U_{\nu(t)} - \mu_Z\mu_W^{-1}t > x) \\ = \left[(1 - N_{(0, S_1^2 t)}(x)) + t\mu_W^{-1}\mu_\xi^{-1}P(B_1 > \mu_W\mu_\xi x) \right] (1 + \bar{o}(1)) \end{aligned}$$

при $t \rightarrow \infty$.

Теорема 6. Пусть последовательность (W_k, Z_k) , $k = 1, 2, \dots$, состоит из независимых одинаково распределенных векторов. Пусть существует плотность с.в. W_1 относительно меры Лебега, $E|Z_1|^q < \infty$ и $E|W_1|^q < \infty$ для некоторого $q \geq 1$. Тогда для любых $0 < \varepsilon < 1$ и $x > 0$

$$P(U_{\nu(t)} - \mu_Z \mu_W^{-1} t > x) \leq \left[t \mu_W^{-1} \mu_\xi^{-1} P(B_1 > \varepsilon \mu_W \mu_\xi x) + P_{B_1}(q, \varepsilon \mu_W \mu_\xi x, t \mu_W^{-1} \mu_\xi^{-1}) \right] (1 + o(1))$$

при $t \rightarrow \infty$.

Результаты для левосторонних и двусторонних уклонений формулируются аналогично.

Теоремы 5 и 6 являются непосредственными следствиями теорем 1 и 2 и тождеств Вальда, согласно которым, например, $E\left(\sum_{i=1}^{\xi_0} Z_i\right) = \mu_Z \mu_\xi$.

З а м е ч а н и е 4. Теорема 6 может интерпретироваться как оценка скорости сходимости в законе больших чисел (ЗБЧ) в схеме ОСБ. В частности, она может использоваться для доказательства усиленного ЗБЧ в схеме ОСБ, который формулируется следующим образом (см. [14, теорема 2.1 гл. IV]):

Предложение 3. Пусть последовательность (W_k, Z_k) , $k = 1, 2, \dots$, состоит из независимых одинаково распределенных векторов, $0 < EW_1 < \infty$ и $E|Z_1| < \infty$. Тогда при $t \rightarrow \infty$

$$U_{\nu(t)} t^{-1} \xrightarrow{n.n.} \mu_Z \mu_W^{-1}.$$

Очевидно, что если $W_1 > 0$ п.н., то лестничный момент ξ_0 вырожден. Для такого специального случая ОСБ, известного под различными названиями (renewal reward process, compound process with dependence), теоремы 5 и 6 приобретают следующий вид.

Следствие 1. Пусть (W_k, Z_k) , $k = 1, 2, \dots$, является последовательностью независимых одинаково распределенных векторов и $W_1 > 0$. Пусть существует плотность с.в. W_1 относительно меры Лебега, $E|Z_1|^{2+\delta} < \infty$ и $E|W_1|^{2+\delta} < \infty$ для некоторого $\delta > 0$, $P(H_1 > x) = L(x)x^{-s}(1 + o(1))$ при $x \rightarrow \infty$, где $L(x)$ — некоторая медленно меняющаяся функция и $s > 2$. Тогда для $x \geq S_1 \mu_W^{-1/2} t^{1/2}$

$$P(U_{\nu(t)} - \mu_Z \mu_W^{-1} t > x) = \left[(1 - N_{(0, S_1^2 t)}(x)) + t \mu_W^{-1} P(H_1 > \mu_W x) \right] (1 + o(1))$$

при $t \rightarrow \infty$.

Следствие 2. Пусть для последовательности (W_k, Z_k) , $k = 1, 2, \dots$, независимых, одинаково распределенных векторов выполнены условия теоремы 6. Пусть, кроме того, $W_1 > 0$. Тогда для любого $0 < \varepsilon < 1$ и $x > 0$

$$P(U_{\nu(t)} - \mu_Z \mu_W^{-1} t > x)$$

$$\leq \left[t\mu_W^{-1} \mathbf{P}(H_1 > \varepsilon\mu_W x) + \mathcal{P}_{H_1}(q, \varepsilon\mu_W x, t\mu_W^{-1}) \right] (1 + \bar{o}(1))$$

при $t \rightarrow \infty$.

В работе [23] были исследованы вероятности больших уклонений в задаче о разорении за конечное время в андерсоновской модели теории риска, причем предполагалось, что интервалы между страховыми случаями могут иметь лишь степенные моменты невысоких порядков. Одним из основных технических инструментов этой работы являлись сформулированные выше теоремы 5 и 6.

Из-за ограниченности объема работы мы не будем подробно останавливаться на другом специальном случае схемы ОСП, упоминавшемся в [6]. Верхние оценки и асимптотические выражения для вероятностей больших уклонений в ЦПТ для возвратного по Харрису ПМВ (X_k, θ_k) , $k = 1, 2, \dots$, удовлетворяющего условию минорирования (M_1) (см. [25, с. 125]), читатель найдет в работе [5]. Не приводя ни формулировок, ни строгого доказательства этих результатов, заметим лишь (см. splitting-конструкцию работы [25]), что если ПМВ (X_k, θ_k) , $k = 1, 2, \dots$, удовлетворяет указанным выше требованиям, то посредством известного расширения вероятностного пространства он может быть расширен до ПМВ, имеющего возвратный атом Δ на своем (расширенном) фазовом пространстве, так что мы оказываемся в рамках примера 2 [6]. Применение теорем 1 и 2 п. 2 и обобщений тождества Вальда на цепи Маркова приводит к результатам работы [5]. В более простом случае возвратной по Харрису цепи Маркова подробные рассуждения в рамках описанной выше схемы были изложены в [4].

4. Доказательства. В этом пункте мы будем пользоваться обозначениями и вспомогательными результатами, содержащимися в п. 4 работы [6]. По возможности мы будем сокращать подробно излагавшиеся в [6] стандартные рассуждения.

Напомним, что в [6] через $\mathfrak{N}_C$ и $\mathfrak{N}_D$ обозначены функции плотности трехмерного и двумерного нормальных распределений с нулевыми векторами математических ожиданий и ковариационными матрицами $C = \text{cov}(F_1, T_1, \tau_1)$ и $D = \text{cov}(T_1, \tau_1)$,

$$\mathfrak{N}_C(x, y, z) = \int_{-\infty}^x \mathfrak{N}_C(u, y, z) du,$$

$$\begin{aligned} B_1 &= \mu_\tau n_2 + \mu_T n_1, & n_1 &= \mu_T \sigma_\tau^2 - \mu_\tau \kappa_{T\tau}, \\ n_2 &= \mu_\tau \sigma_T^2 - \mu_T \kappa_{T\tau}, & n_3 &= \sigma_T^2 \sigma_\tau^2 - \kappa_{T\tau}, \end{aligned}$$

и для целых положительных m, k , вещественного x и $t \geq 0$

$$\lambda_F(x, m) = \frac{x - \mu_F m}{\sqrt{m}}, \quad \lambda_T(t, m) = \frac{t - \mu_T m}{\sqrt{m}}, \quad \lambda_\tau(k, m) = \frac{k - \mu_\tau m}{\sqrt{m}},$$

$$Y_m(t, k) = (B_1 m - (n_1 t + n_2 k))(B_1 n_3 m)^{-1/2},$$

$$Z_m(t, k) = (\mu_T k - \mu_T t)(B_1 m)^{-1/2}.$$

Выражения, которые получаются из $Y_m(t, k)$ и $Z_m(t, k)$ при замене $\kappa_{T\tau}$ нулем, обозначаются $\hat{Y}_m(t, k)$ и $\hat{Z}_m(t, k)$.

Леммы 1–3, являющиеся важным техническим инструментом работы, были доказаны в п. 4 [6].

Лемма 1. Для целых положительных m, k и $t \geq 0$ справедливо тождество

$$2\pi n_3^{1/2} \mathfrak{N}_D(\lambda_T(t, m), \lambda_\tau(k, m)) = \exp \left\{ -\frac{1}{2} [Y_m^2(t, k) + Z_m^2(t, k)] \right\}.$$

Более того, $\lambda_T^2(t, m) + \lambda_\tau^2(k, m) = \hat{Z}_m^2(t, k) + \hat{Y}_m^2(t, k)$.

Здесь и далее, если это не будет вызывать недоразумений, для простоты обозначений мы будем опускать аргументы x, t и k в выражениях $\lambda_F, \lambda_T, Y_m$ и Z_m .

Лемма 2. Для целых положительных m, k и $t \geq 0$ справедливо тождество

$$Y_{m+1} - Y_m = B_1^{1/2} (n_3 m)^{-1/2} + Y_{m+1} \left(1 - \left(1 + \frac{1}{m} \right)^{1/2} \right).$$

Лемма 3. Для целых положительных m, k и $t \geq 0$ справедливо тождество

$$m - t\mu_T^{-1} = (n_3^{1/2} Y_m + n_2 \mu_T^{-1} Z_m) B_1^{-1/2} m^{1/2}.$$

Доказательство теоремы 3. Как и в [6], воспользуемся формулой полной вероятности. Легко убедиться, что $\Omega = \cup_{k=1}^{\infty} \{\nu(t) = k\}$ и что, разбивая каждое из событий $\{\nu(t) = k\}$ при помощи семейства непересекающихся измеримых множеств

$$A_{r, k-r, 0} = \{\xi_0 = r, \tau_1 \geq k - r\},$$

$$A_{r, s, m} = \left\{ \xi_0 = r, \sum_{i=1}^m \tau_i = k - r - s, \tau_{m+1} \geq s \right\},$$

где $r, s, m = 1, 2, \dots, k$, получим $\Omega = \cup_{k, r, s, m} \{\nu(t) = k\} \cap A_{r, s, m}$.

Вероятность события $\nu_T(t) = 0$, совпадающего с событием $\xi_1 > t$, легко оценивается при помощи неравенства Чебышева. Поэтому без ограничения общности будем считать в дальнейшем, что t настолько велико, что $N_t \geq 1$, и рассматривать случай $\nu_T(t) \geq 1$.

Опираясь на очевидное представление

$$\Delta_t = \sum_{k=1}^{\xi_0} (\mu_T Z_k - \mu_F W_k) + \sum_{k=1}^{\nu_T(t)} B_k$$

$$+ \sum_{k=\xi_{\nu_T(t)+1}}^{\nu(t)} (\mu_T Z_k - \mu_F W_k) - \sum_{k=1}^{N_t} B_k, \quad (11)$$

а также пользуясь определением регенерирующей рекордной последовательности, легко проверить следующую формулу полной вероятности

$$\begin{aligned} P(\Delta_t \leq x) = & \sum_{k \in N} \sum_{r,s} \int \cdots \int P(\xi_0 = r, T^r \in dt_1, B^r \in dx_1) \\ & \times \left\{ \sum_{\substack{1 \leq m \leq k \\ m \leq N_t - 1}} P \left(- \sum_{i=m+2}^{N_t} B_i \leq x - x_1 + x_2, \right. \right. \\ & \left. \left. \sum_{i=1}^m \tau_i = k - r - s \middle| \sum_{i=1}^m T_i = t - t_1 - t_2 \right) \right. \\ & \times p_T^{*m}(t - t_1 - t_2) P(\tau_{m+1} \geq s, \nu_m(t_2) = s, B_{m,s}^{[2]} \in dx_2) \\ & + \sum_{\substack{1 \leq m \leq k \\ m \geq N_t}} P \left(\sum_{i=N_t+1}^m B_i \leq x - x_1 - x_2, \right. \\ & \left. \sum_{i=1}^m \tau_i = k - r - s \middle| \sum_{i=1}^m T_i = t - t_1 - t_2 \right) \\ & \left. \times p_T^{*m}(t - t_1 - t_2) P(\tau_{m+1} \geq s, \nu_m(t_2) = s, B_{m,s}^{[1]} \in dx_2) \right\}, \quad (12) \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \nu_m(t) = \min \left\{ n > 0: \sum_{k=\xi_m+1}^{\xi_m+n} W_k > t \right\}, \\ B^r = \sum_{i=1}^r (\mu_T Z_i - \mu_F W_i), \quad T^r = \sum_{i=1}^r W_i, \\ B_{m,s}^{[1]} = \sum_{i=\xi_m+1}^{\xi_m+s} (\mu_T Z_i - \mu_F W_i), \quad B_{m,s}^{[2]} = \sum_{i=\xi_m+s+1}^{\xi_m+1} (\mu_T Z_i - \mu_F W_i) \end{aligned}$$

и $0 < r + s \leq k$, $t_1 > 0$, $t_2 > 0$, $t_1 + t_2 < t$.

В случаях $m = N_t - 1$ и $m = N_t$ в (12) следует сделать очевидные изменения: первые сомножители в соответствующих слагаемых следует заменить на

$$1_{\{x_1 - x_2 \leq s\}} P \left(\sum_{i=1}^{N_t-1} \tau_i = k - r - s \middle| \sum_{i=1}^{N_t-1} T_i = t - t_1 - t_2 \right),$$

$$1_{\{x_1+x_2 \leq x\}} P \left(\sum_{i=1}^{N_t} \tau_i = k - r - s \middle| \sum_{i=1}^{N_t} T_i = t - t_1 - t_2 \right)$$

соответственно.

Очевидно также, что для $1 \leq m \leq k \wedge (N_t - 2)$, вещественных x, t и целого k

$$\begin{aligned} & P \left(- \sum_{i=m+2}^{N_t} B_i \leq x, \sum_{i=1}^m \tau_i = k \middle| \sum_{i=1}^m T_i = t \right) \\ &= P \left(- \sum_{i=m+2}^{N_t} B_i \leq x \right) P \left(\sum_{i=1}^m \tau_i = k \middle| \sum_{i=1}^m T_i = t \right). \end{aligned}$$

Предположив сперва, что ковариационная матрица C положительно определена, легко убедиться, что к выражениям в правой части (12) применима теорема 1 § 3 части II работы [1], в которой содержится неравномерная оценка остаточного члена в интегролокальной многомерной центральной предельной теореме. Условия этой теоремы, как легко проверить, выполнены.

Обозначим для упрощения записи $t_{12} = t - t_1 - t_2$ и $k_{rs} = k - r - s$. Дальнейшее доказательство состоит в упрощении с точностью до величин порядка $O(t^{-1/4})$ аппроксимирующих выражений

$$\begin{aligned} A_1(x, t) &= \sum_{k \in \mathbb{N}} \sum_{m=1}^{k \wedge (N_t - 2)} \sum_{r,s} \int \cdots \int m^{-1} \mathcal{N}_{(0,1)} \left(\frac{x - x_1 + x_2 + \mu_F(N_t - m)}{\sigma_F(N_t - m)^{1/2}} \right) \\ &\quad \times \mathfrak{N}_D(\lambda_T(t_{12}, m), \lambda_\tau(k_{rs}, m)) P(\xi_0 = r, T^r \in dt_1, B^r \in dx_1) \\ &\quad \times P(\tau_1 \geq s, \nu_0(t_2) = s, B_{0,s}^{[1]} \in dx_2) dt_2, \\ A_2(x, t) &= \sum_{k \in \mathbb{N}} \sum_{m=N_t+1}^k \sum_{r,s} \int \cdots \int [N_t(m - N_t)]^{-1} \\ &\quad \times \sum_j \int \mathfrak{N}_C(\lambda_F(x - x_1 - x_2, m - N_t), \\ &\quad \lambda_T(t_{12} - u, m - N_t), \lambda_\tau(k_{rs} - j, m - N_t)) \\ &\quad \times \mathfrak{N}_D(\lambda_T(u, N_t), \lambda_\tau(j, N_t)) du P(\xi_0 = r, T^r \in dt_1, B^r \in dx_1) \\ &\quad \times P(\tau_1 \geq s, \nu_0(t_2) = s, B_{0,s}^{[2]} \in dx_2) dt_2, \end{aligned}$$

и в доказательстве того, что остаточные члены

$$J_1(t) = \sum_{k \in \mathbb{N}} \sum_{m=1}^{k \wedge (N_t - 2)} \left(c_1 m^{-1} (N_t - m)^{-1/2} + c_2 m^{-3/2} \right)$$

$$\begin{aligned}
& \times \sum_{r,s} \iint \left(1 + (\lambda_T^2(t_{12}, m) + \lambda_\tau^2(k_{rs}, m))^{1/2}\right)^{-3} P(\tau_0 = r, T^r \in dt_1) \\
& \quad \times P(\tau_1 \geq s, \nu_0(t_2) = s) dt_2, \\
J_2(t) = & \sum_{k \in \mathbb{N}} \sum_{m=N_t+1}^k \left(c_1(m - N_t)^{-1} N_t^{-3/2} + c_2(m - N_t)^{-3/2} N_t^{-1}\right) \\
& \times \sum_{r,s} \iint \sum_j \int \left(1 + (\lambda_T^2(t_{12} - u, m - N_t) + \lambda_\tau^2(k_{rs} - j, m - N_t))^{1/2}\right)^{-3} \\
& \quad \times \left(1 + (\lambda_T^2(u, N_t) + \lambda_\tau^2(j, N_t))^{1/2}\right)^{-3} du \\
& \quad \times P(\tau_0 = r, T^r \in dt_1) P(\tau_1 \geq s, \nu_0(t_2) = s) dt_2,
\end{aligned}$$

а также слагаемые в (12), соответствующие $m = N_t - 1$ и $m = N_t$, являются величинами порядка $O(t^{-1/4})$.

Анализ выписанных выражений совпадает в значительной степени с тем, что изложено в [6]. Поэтому мы не будем останавливаться на деталях. Так, как и при доказательстве соотношения (17) работы [6], оценивание $J_1(t)$ и $J_2(t)$ сводится к проверке того, что выражения

$$\begin{aligned}
& \sum_{k \in \mathbb{N}} \sum_{m=1}^{k \wedge (N_t - 2)} \left(c_1 m^{-1} (N_t - m)^{-1/2} + c_2 m^{-3/2}\right) \\
& \quad \times \left(1 + (\lambda_T^2(t, m) + \lambda_\tau^2(k, m))^{1/2}\right)^{-3}, \\
& \sum_{k \in \mathbb{N}} \sum_{m=N_t+1}^k \left(c_1(m - N_t)^{-1} N_t^{-3/2} + c_2(m - N_t)^{-3/2} N_t^{-1}\right) \\
& \quad \times \sum_{j=N_t}^{k-m+N_t} \int_0^t \left(1 + (\lambda_T^2(t - u, m - N_t) + \lambda_\tau^2(k - j, m - N_t))^{1/2}\right)^{-3} \\
& \quad \times \left(1 + (\lambda_T^2(u, N_t) + \lambda_\tau^2(j, N_t))^{1/2}\right)^{-3} du
\end{aligned}$$

являются величинами порядка $O(t^{-1/4})$. Эта проверка опирается на тождества леммы 1 и леммы 3 и осуществляется стандартными выкладками.

Как и в доказательстве теоремы 1 (II) в [6], воспользовавшись тождеством леммы 1 и стандартной техникой оценивания остаточных членов, легко проверить, что выражения $A_1(x, t)$ и $A_2(x, t)$ соответственно аппроксимируются с необходимой точностью выражениями

$$A_3(x, t) = \sum_{k \in \mathbb{N}} \sum_{m=1}^{k \wedge (N_t - 2)} \mu_T m^{-1} \mathcal{N}_{(0,1)} \left(\frac{x + \mu_F(N_t - m)}{\sigma_F(N_t - m)^{1/2}} \right)$$

$$\begin{aligned} & \times \mathfrak{N}_{\mathbf{D}}(\lambda_T(t, m), \lambda_\tau(k, m)), \\ A_4(x, t) = & \sum_{k \in \mathbf{N}} \sum_{m=N_t+1}^k \mu_T N_t^{-1} (m - N_t)^{-1} \\ & \times \sum_{j=N_t}^{k-m+N_t} \int_0^t \mathfrak{N}_{\mathbf{D}}(\lambda_T(u, N_t), \lambda_\tau(j, N_t)) \\ & \times \mathfrak{N}_{\mathbf{C}}(\lambda_F(x, m - N_t), \lambda_T(t - u, m - N_t), \lambda_\tau(k - j, m - N_t)) du. \end{aligned}$$

Следующий шаг использует свойства нормального распределения и состоит в аппроксимации $A_4(x, t)$ выражением, в котором свертка

$$\begin{aligned} N_t^{-1} \sum_{j=N_t}^{k-m+N_t} \int_0^t \mathfrak{N}_{\mathbf{D}}(\lambda_T(u, N_t), \lambda_\tau(j, N_t)) \\ \times \mathfrak{N}_{\mathbf{C}}(\lambda_F(x, m - N_t), \lambda_T(t - u, m - N_t), \lambda_\tau(k - j, m - N_t)) du \end{aligned}$$

заменяется выражением

$$(m - N_t) m^{-1} \mathfrak{N}_{\mathbf{W}(m, N_t)}(\lambda_F(x, m - N_t), \lambda_T(t, m), \lambda_\tau(k, m)),$$

где

$$\mathbf{W}(m, N_t) = \begin{pmatrix} \sigma_F^2 & \left(\frac{m-N_t}{m}\right)^{1/2} \kappa_{FT} & \left(\frac{m-N_t}{m}\right)^{1/2} \kappa_{F\tau} \\ \left(\frac{m-N_t}{m}\right)^{1/2} \kappa_{FT} & \sigma_T^2 & \kappa_{T\tau} \\ \left(\frac{m-N_t}{m}\right)^{1/2} \kappa_{F\tau} & \kappa_{T\tau} & \sigma_\tau^2 \end{pmatrix}.$$

Далее, воспользовавшись тождеством леммы 3 и стандартной техникой оценивания, легко проверить, что сумма $A_3(x, t) + A_4(x, t)$ аппроксимируется выражением

$$\begin{aligned} A_5(x, t) = & \sum_{k \in \mathbf{N}} \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq N_t}}^k \mu_T m^{-1} \mathcal{N}_{(0,1)} \left(\frac{x - \mu_F(m - N_t)}{\sigma_F |m - N_t|^{1/2}} \right) \\ & \times \mathfrak{N}_{\mathbf{D}}(\lambda_T(t, m), \lambda_\tau(k, m)) \end{aligned}$$

с точностью до членов порядка $O(t^{-1/4})$, причем матрица $\mathbf{W}(m, N_t)$ заменяется на этом шаге аппроксимации вырожденной матрицей.

Наконец, рассуждая так же, как и при доказательстве теоремы 1 (II) работы [6] и применяя первое тождество леммы 1, лемму 2 и лемму 3 и двукратную аппроксимацию интегральных сумм (по m и по k) соответствующими интегралами, приходим к требуемому результату.

В том случае, когда матрица $\mathbf{C}$ вырождена, в доказательстве используются более простые вспомогательные предельные теоремы, и мы не будем приводить подробностей, которые могут быть легко восстановлены.

Доказательство теоремы 4. Для доказательства теоремы 4 рассмотрим сперва правосторонние уклонения с.в. Δ_t . Приведенные ниже рассуждения без существенных изменений будут применимы и к с.в. $-\Delta_t$, что завершит доказательство.

Как и в предыдущих доказательствах, воспользуемся формулой полной вероятности. Для $x > 0$

$$\begin{aligned}
 P(\Delta_t > x) &= \sum_{k \in \mathbb{N}} \sum_{r,s} \int \cdots \int P(\xi_0 = r, T^r \in dt_1, B^r \in dx_1) \\
 &\times \left\{ \sum_{\substack{1 \leq m \leq k \\ m \leq N_t - 1}} P \left(- \sum_{i=m+2}^{N_t} B_i > x - x_1 + x_2 \right) \right. \\
 &\times P \left(\sum_{i=1}^m \tau_i = k - r - s \mid \sum_{i=1}^m T_i = t - t_1 - t_2 \right) \\
 &\times p_T^{*m}(t - t_1 - t_2) P(\tau_{m+1} \geq s, \nu_m(t_2) = s, B_{m,s}^{[2]} \in dx_2) \\
 &+ \sum_{\substack{1 \leq m \leq k \\ m \geq N_t}} P \left(\sum_{i=N_t+1}^m B_i > x - x_1 - x_2, \right. \\
 &\quad \left. \sum_{i=1}^m \tau_i = k - r - s \mid \sum_{i=1}^m T_i = t - t_1 - t_2 \right) \\
 &\times p_T^{*m}(t - t_1 - t_2) P(\tau_{m+1} \geq s, \nu_m(t_2) = s, B_{m,s}^{[1]} \in dx_2) \left. \right\}. \quad (13)
 \end{aligned}$$

Воспользовавшись стандартной техникой оценивания и выделяя множества $\{|x_1| > c_1 x\}$ и $\{|x_2| > c_2 x\}$, $c_1, c_2 > 0$, $c_1 + c_2 = 1$, в области интегрирования в (13), а также применяя неравенство Чебышева и нормальную аппроксимацию

$$\begin{aligned}
 &\left| p_{T,\tau}^{*m}(t, k) - m^{-1} \mathfrak{N}_D(\lambda_T(t, m), \lambda_\tau(k, m)) \right| \\
 &= \bar{o}(m^{-3/2}) \left(1 + (\lambda_T^2(t, m) + \lambda_\tau^2(k, m))^{1/2} \right)^{-3} \quad (14)
 \end{aligned}$$

(см. [1]), легко проверить, что с точностью до выражений порядка $O(t^{1/2} x^{-q})$ дальнейшее исследование правой части (13) сводится к анализу выражений

$$\begin{aligned}
 S_1(x, t) &= \sum_{k \in \mathbb{N}} \sum_{r,s} \int \int \sum_{\substack{1 \leq m \leq k \\ m \leq N_t - 1}} P \left(- \sum_{i=m+2}^{N_t} B_i > cx \right) \\
 &\times P \left(\sum_{i=1}^m \tau_i = k - r - s \mid \sum_{i=1}^m T_i = t - t_1 - t_2 \right) p_T^{*m}(t - t_1 - t_2)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \times P(\xi_0 = r, T^r \in dt_1) P(\tau_1 \geq s, \nu_0(t_2) = s), \\ S_2(x, t) = & \sum_{k \in N} \sum_{r, s} \int \int \sum_{\substack{1 \leq m \leq k \\ m \geq N_t}} P \left(\sum_{i=N_t+1}^m B_i > cx, \right. \\ & \left. \sum_{i=1}^m \tau_i = k - r - s \middle| \sum_{i=1}^m T_i = t - t_1 - t_2 \right) p_T^{*m}(t - t_1 - t_2) \\ & \times P(\xi_0 = r, T^r \in dt_1) P(\tau_1 \geq s, \nu_0(t_2) = s). \end{aligned}$$

Приступая к оцениванию $S_2(x, t)$, заметим, что с точностью до выражений порядка $O(t^{1/2}x^{-q})$ пределы суммирования по m могут быть сужены: достаточно рассматривать $m \in \mathcal{S}(t, x, s) = \{i: N_t + [t^{1/5}] \leq i \leq N_t + [x^s]\}$, $s \in (\frac{3}{2}, 2)$. В этом легко убедиться, воспользовавшись неравенствами Чебышева и теоремами 8.3 и 8.4 гл. III [14] применительно к $\nu_T(t)$.

Воспользовавшись формулой свертки для вещественного x , $t \geq 0$ и целого k , заметим, что

$$\begin{aligned} & P \left(\sum_{i=N_t+1}^m B_i > x, \sum_{i=1}^m \tau_i = k \middle| \sum_{i=1}^m T_i = t \right) p_T^{*m}(t) \\ & = \sum_j \int_0^t P \left(\sum_{i=N_t+1}^m B_i > x, \sum_{i=N_t+1}^m \tau_i = j \middle| \sum_{i=N_t+1}^m T_i = u \right) \\ & \quad \times p_T^{*(m-N_t)}(u) p_{T, \tau}^{*N_t}(t - u, k - j) du \end{aligned} \quad (15)$$

и, согласно лемме 6 п. 5, для любых $h > 0$ и $y > 0$

$$\begin{aligned} & P \left(\sum_{i=N_t+1}^m B_i > x, \sum_{i=N_t+1}^m \tau_i = j \middle| \sum_{i=N_t+1}^m T_i = u \right) p_T^{*(m-N_t)}(u) \\ & \leq (m - N_t) g_{m-N_t}^{(1)}(u, j; y) + e^{-hx} g_{m-N_t}^{(2)}(u, j; y, h). \end{aligned} \quad (16)$$

Функции $g^{(1)}$ и $g^{(2)}$ в правой части (16) определяются как в лемме 6, где в качестве с.в. ξ_1 , η_1 и ζ_1 следует выбрать B_1 , T_1 и τ_1 .

Поскольку $EB_i = 0$, из леммы 9 и леммы 7 п. 5 следует, что

$$e^{-hx} g_{m-N_t}^{(2)}(u, j; x, h) \leq C(\nu_q) \frac{m - N_t}{x^q} g^{*(m-N_t)}(u, j; x, h_{m-N_t}) \quad (17)$$

для любого $m \in \mathcal{S}(t, x, s)$.

Если $1 \leq q \leq 2$, то константа $C(\nu_q)$ в этой оценке определяется как в случае (I) формулы (9), и если $q > 2$ — как в случае (II) формулы (9). Следует отметить, что при $q > 2$ мы не оказываемся в случае (III) формулы (9), поскольку, согласно выбору s , любое $m \in \mathcal{S}(t, x, s)$

принадлежит множеству целых чисел

$$\left\{ m: m \geq N_t + [t^{1/5}], x \geq \frac{1}{2}(q-2)((m-N_t)\nu_2)^{1/2} \ln(m-N_t) \right\}.$$

Функция g в правой части (17) определена как в лемме 7, где в качестве с.в. ξ_1 , η_1 и ζ_1 следует выбрать B_1 , T_1 и τ_1 , а y и h выбираются как в (23):

$$y = x, \quad h = h_{m-N_t}(x, q) = \max \left\{ 0, \frac{1}{x} \ln \left(\frac{x^q}{(m-N_t)\nu_q} \right) \right\}. \quad (18)$$

Возвращаясь к оцениванию $S_2(x, t)$ и используя (15)–(17), имеем

$$\begin{aligned} S_2(x, t) &\leq (\nu_q) x^{-q} \sum_{k \in \mathbf{N}} \sum_{r,s} \int \int \sum_j \int P_{T,\tau}^{*N_t}(t_{12} - u, k_{rs} - j) \\ &\times \left\{ \sum_{m \in \mathcal{S}(t,x,s)} (m - N_t) g^{*(m-N_t)}(u, j; x, h_{m-N_t}(x, q)) \right\} du \\ &\times P(\xi_0 = r, T^r \in dt_1) P(\tau_1 \geq s, \nu_0(t_2) = s). \end{aligned}$$

Обозначим

$$\begin{aligned} H(z_1, z_2; x, q) &= \sum_{[t^{1/5}] \leq m \leq [x^s]} m G^{*m}(z_1, z_2; x, h_m(x, q)), \\ U(z_1, z_2; x, q) &= \sum_{m=0}^{\infty} G^{*m}(z_1, z_2; x, h_m(x, q)), \end{aligned}$$

где

$$G(z_1, z_2; x, h_m(x, q)) = \int_0^{z_1} \sum_{j \leq z_2} g(v, j; x, h_m(x, q)) dv,$$

и заметим, что эти выражения конечны для любых $z_1, z_2 \geq 0$. Следующий шаг доказательства сформулируем в виде леммы.

Лемма 4. В контексте изложенного выше положим

$$\mathcal{M}_1(t, x) = \min_{[t^{1/5}] \leq m \leq [x^s]} M_1(m, x), \quad \mathcal{M}_2(t, x) = \min_{[t^{1/5}] \leq m \leq [x^s]} M_2(m, x),$$

где через $M_i(m, x)$, $i = 1, 2$, обозначены медианы маргинальных распределений $G(\cdot, \cdot; x, h_m(x, q))$. Тогда для достаточно больших t справедливы неравенства $\mathcal{M}_1(t, x) > \mathcal{M}_1 > 0$, $\mathcal{M}_2(t, x) > \mathcal{M}_2 > 0$ и для $z_1, z_2 \geq 0$

$$H(z_1, z_2; x, q) \leq 4 \left(1 + \min \left\{ \frac{z_1}{\mathcal{M}_1}, \frac{z_2}{\mathcal{M}_2} \right\} \right)^2. \quad (19)$$

Для доказательства этой леммы воспользуемся оценками (22). Заметим сперва, что

$$\sup_{z_1, z_2 \geq 0} \left| G(z_1, z_2; x, h_m(x, q)) - P(T_1 \leq z_1, \tau_1 \leq z_2) \right| = O(m^{-1}),$$

откуда вытекает отделенность медиан маргинальных распределений от нуля при $m \geq [t^{1/5}]$ и при достаточно больших t .

Для доказательства (19), следуя основной идее доказательства леммы 10 п. 5, введем случайные величины $\tilde{T}$ и $\tilde{\tau}$, принимающие по два значения: 0 и M_1 , 0 и M_2 , с вероятностями $\frac{1}{2}$. Тогда для $[t^{1/5}] \leq m \leq [x^s]$ и для достаточно больших t

$$G(z_1, \infty; x, h_m(x, q)) \leq \tilde{F}_T(z_1), \quad G(\infty, z_2; x, h_m(x, q)) \leq \tilde{F}_\tau(z_2),$$

где $\tilde{F}_T(x)$ и $\tilde{F}_\tau(x)$ обозначают функции распределения $\tilde{T}$ и $\tilde{\tau}$. Положим также $\tilde{U}_T(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \tilde{F}_T^{*k}(x)$, $\tilde{H}_T(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k \tilde{F}_T^{*k}(x)$. Аналогично определяются выражения $\tilde{U}_\tau(x)$ и $\tilde{H}_\tau(x)$.

Поскольку (см. лемму 11 п. 5)

$$G(z_1, z_2; x, h_m(x, q)) \leq \min \left\{ G(z_1, \infty; x, h_m(x, q)), G(\infty, z_2; x, h_m(x, q)) \right\},$$

легко проверить, что $H(z_1, z_2; x, q) \leq \min \{ \tilde{H}_T(z_1), \tilde{H}_\tau(z_2) \}$. Воспользовавшись (24) и выписывая в явном виде функции восстановления $\tilde{U}_T(x)$ и $\tilde{U}_\tau(x)$, как это делается при доказательстве леммы 10 п. 5, получим требуемый результат.

Продолжая оценивание $S_2(x, t)$, как и в доказательстве теоремы 3, воспользуемся аппроксимацией (14) с $m = N_t$. Легко проверить, что $S_2(x, t)$ не превосходит суммы выражений

$$\begin{aligned} & \frac{c(\mu_T, \nu_q)}{tx^q} \sum_{k \in \mathbb{N}} \sum_{r, s} \iint \sum_j \int H^{(1,1)}(u, j; x, q) \\ & \quad \times \mathfrak{N}_D(\lambda_T(t_{12} - u, N_t), \lambda_\tau(k_{rs} - j, N_t)) du \\ & \quad \times P(\xi_0 = r, T^r \in dt_1) P(\tau_1 \geq s, \nu_0(t_2) = s), \\ & \frac{c(\mu_T, \nu_q)}{t^{3/2}x^q} \sum_{k \in \mathbb{N}} \sum_{r, s} \iint \sum_j \int H^{(1,1)}(u, j; x, q) \\ & \quad \left(1 + (\lambda_T^2(t_{12} - u, N_t) + \lambda_\tau^2(k_{rs} - j, N_t))^{1/2} \right)^{-3} du \\ & \quad \times P(\xi_0 = r, T^r \in dt_1) P(\tau_1 \geq s, \nu_0(t_2) = s), \end{aligned}$$

где $H^{(1,1)}(u, j; x, q) = (\partial/\partial u)H(u, j; x, q) - (\partial/\partial u)H(u, j-1; x, q)$.

Раскладывая подынтегральные выражения по формуле Тейлора с центром в точках t и k , воспользовавшись моментными условиями, а также стандартной техникой оценивания, легко проверить, что анализ этих выражений сводится к проверке того, что

$$\begin{aligned} & \sum_{k \in \mathbf{N}} \sum_{j=1}^k \int_0^t \mathbf{H}^{(1,1)}(u, j; x, q) \mathfrak{N}_{\mathbf{D}}(\lambda_T(t-u, N_t), \lambda_T(k-j, N_t)) du = \underline{O}(t^{3/2}), \\ & \sum_{k \in \mathbf{N}} \sum_{j=1}^k \int_0^t \mathbf{H}^{(1,1)}(u, j; x, q) \\ & \quad \times \left(1 + (\lambda_T^2(t-u, N_t) + \lambda_T^2(k-j, N_t))^{1/2}\right)^{-3} du = \underline{O}(t^2). \end{aligned}$$

Для этого, интегрируя по частям, достаточно воспользоваться леммой 1, леммой 4 и стандартными вычислениями сумм, входящих в соответствующие оценки.

Оценка прочих выражений, в частности, $S_1(x, t)$, проводится вполне аналогично и поэтому приводиться не будет. Заметим лишь, что эта часть доказательства проще: необходимые вспомогательные результаты ограничиваются оценками (20), (21), леммой 9 и нормальной аппроксимацией вида (14).

Доказательство теоремы 1 непосредственно следует из предложения 1, теоремы 4, оценки (10) и из неравенства (см. лемму 3 и формулу (4.2) гл. I, § 2, [9])

$$\begin{aligned} & \left| \mathbf{P}(U_{\nu(t)} - m_1(t) > x) - \mathbf{P}\left(\sum_{k=1}^{N_t} B_k > \mu_T x\right) \right| \leq \mathbf{P}\left(|\Delta_t| > \frac{\mu_T \varepsilon x}{2}\right) \\ & \quad + \mathbf{P}\left(\mathcal{R}_W(t) > \frac{\varepsilon x \mu_F^{-1} \mu_T}{2}\right) \\ & \quad + \max \left\{ \left| \mathbf{P}\left(\sum_{k=1}^{N_t} B_k > (1 \pm \varepsilon) \mu_T x\right) - \mathbf{P}\left(\sum_{k=1}^{N_t} B_k > \mu_T x\right) \right| \right\}, \end{aligned}$$

справедливого для любого $0 < \varepsilon < 1$. Последнее слагаемое здесь следует понимать как максимум из двух выражений, получающихся при подстановке плюса или минуса.

Доказательство теоремы 2 заключается в использовании теоремы 4, соотношения (10), предложения 2 и неравенства

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(U_{\nu(t)} - m_1(t) > x) & \leq \mathbf{P}\left(\sum_{k=1}^{N_t} B_k > \varepsilon \mu_T x\right) + \mathbf{P}\left(|\Delta_t| > \frac{\mu_T (1 - \varepsilon) x}{2}\right) \\ & \quad + \mathbf{P}\left(\mathcal{R}_W(t) > \frac{(1 - \varepsilon) x \mu_F^{-1} \mu_T}{2}\right), \end{aligned}$$

справедливого для любого $0 < \varepsilon < 1$.

Результаты п. 3 являются очевидными следствиями теорем 1 и 2.

5. Вспомогательные результаты. Обозначим (ξ_k, η_k, ζ_k) , $k = 1, 2, \dots$, последовательность независимых одинаково распределенных случайных векторов, третья компонента которых дискретна, $\zeta_k \in \mathbf{N}$, а вторая — абсолютно непрерывна. Обозначим $p_\eta(v)$ плотность с.в. η_k .

Лемма 5. Пусть для независимых с.в. (ξ_1, η_1, ζ_1) , (ξ_2, η_2, ζ_2) , $v \in \mathbf{R}$, $j \in \mathbf{N}$,

$$\begin{aligned} f(v, j) &= \mathbf{E}(\xi_1 \xi_2 1_{\{\zeta_1 + \zeta_2 = j\}} | \eta_1 + \eta_2 = v) p_\eta^{*2}(v), \\ f_i(v, j) &= \mathbf{E}(\xi_i 1_{\{\zeta_i = j\}} | \eta_i = v) p_\eta(v), \quad i = 1, 2. \end{aligned}$$

Тогда

$$f(v, j) = f_1 * f_2(v, j).$$

Лемма 5 очевидным образом может быть распространена на произвольное конечное число не обязательно одинаково распределенных случайных векторов.

Лемма 6. Для последовательности с.в. (ξ_k, η_k, ζ_k) , $k = 1, 2, \dots$, и для любых $h > 0$, $x > 0$, $y > 0$, $n, j \in \mathbf{N}$, $v \in \mathbf{R}$,

$$\begin{aligned} &P\left(\sum_{i=1}^n \xi_i > x, \sum_{i=1}^n \zeta_i = j \middle| \sum_{i=1}^n \eta_i = v\right) p_\eta^{*n}(v) \\ &\leq n g_n^{(1)}(v, j; y) + e^{-hx} g_n^{(2)}(v, j; y, h), \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} g_n^{(1)}(v, j; y) &= P\left(\xi_1 > y, \sum_{i=1}^n \zeta_i = j \middle| \sum_{i=1}^n \eta_i = v\right) p_\eta^{*n}(v), \\ g_n^{(2)}(v, j; y, h) &= \mathbf{E}\left[\exp\left(h \sum_{i=1}^n \xi_i\right) 1_{\{A_{n,y} \cap (\sum_{i=1}^n \zeta_i = j)\}} \middle| \sum_{i=1}^n \eta_i = v\right] p_\eta^{*n}(v), \\ A_{n,y} &= \left\{ \max_{1 \leq i \leq n} \xi_i \leq y \right\}. \end{aligned}$$

Доказательство леммы 6 и неравенства

$$P\left(\sum_{i=1}^n \xi_i > x\right) \leq n P(\xi_1 > y) + e^{-hx} \mathbf{E}\left[\exp\left(h \sum_{i=1}^n \xi_i\right) 1_{A_{n,y}}\right] \quad (20)$$

содержится, например, в [13].

Лемма 7. В обозначениях леммы 6

$$g_n^{(2)}(v, j; y, h) = \left(\mathbf{E}[\exp(h\xi_1) 1_{\{\xi_1 \leq y\}}]\right)^n g^{*n}(v, j; y, h),$$

где $g(v, j; y, h) = (E[\exp(h\xi_1)1_{\{\xi_1 \leq y\}}])^{-1} E[\exp(h\xi_1)1_{\{\xi_1 \leq y, \zeta_1 = j\}} | \eta_1 = v] \times p_{\eta}(v)$.

Доказательство леммы 7 заключается в применении леммы 5 к случайным векторам $(\exp(h\xi_k)1_{\{\xi_k \leq y\}}, \eta_k, \zeta_k), k = 1, 2, \dots$

З а м е ч а н и е 5. Для любых $y, h > 0$ функция $g(v, j; y, h)$ аргументов $v \in \mathbf{R}$ и $j \in \mathbf{N}$ задает совместное распределение некоторого двумерного случайного вектора.

Лемма 8. В обозначениях леммы 6 предположим, что $\nu_r = E|\xi_1|^r < \infty$ для $r \geq 1$. Тогда для любых $y > 0, h > 0$

$$E[\exp(h\xi_1)1_{\{\xi_1 \leq y\}}] \leq R(y, h) = 1 + h\mu + \frac{e}{2}\bar{\nu}_2 h^2 + K_r \nu_r e^{hy} y^{-r}, \quad (21)$$

где

$$\mu = E\xi_1, \quad K_r = \begin{cases} 1, & 1 \leq r \leq 2, \\ 1 + e^{-r}(r+1)^{r+2}, & r > 2, \end{cases}$$

$$\bar{\nu}_2 = \begin{cases} 0, & r \leq 2, \\ \nu_2, & r > 2. \end{cases}$$

Более того, для любых $y > 0, h > 0$, и $x, z \in \mathbf{R}$ величина

$$\delta(h, x, z, y) = \left| E[\exp(h\xi_1)1_{\{\xi_1 \leq y, \eta_1 \leq x, \zeta_1 \leq z\}}] - E1_{\{\eta_1 \leq x, \zeta_1 \leq z\}} - h E\xi_1 1_{\{\eta_1 \leq x, \zeta_1 \leq z\}} \right|$$

ограничена сверху и снизу:

$$\delta(h, x, z, y) \leq \frac{e}{2}\bar{\nu}_2(x, z)h^2 + K_r e^{hy} y^{-r} E|\xi_1|^r 1_{\{\eta_1 \leq x, \zeta_1 \leq z\}}, \quad (22)$$

$$\delta(h, x, z, y) \geq -[k_1(r)h^r + (1 + hy)y^{-r}] E|\xi_1|^r 1_{\{\eta_1 \leq x, \zeta_1 \leq z\}},$$

где

$$\bar{\nu}_2(x, z) = \begin{cases} 0, & 1 \leq r \leq 2, \\ E\xi_1^2 1_{\{\eta_1 \leq x, \zeta_1 \leq z\}}, & r > 2, \end{cases}$$

$$k_1(r) = \begin{cases} 0, & r > 2, \\ -\inf(e^z - 1 - z)|z|^{-r}, & 1 \leq r \leq 2. \end{cases}$$

Оценка (21) была получена при доказательстве леммы 5.1 работы [13] (см. (5.11)–(5.12), где следует положить $\alpha = 1$). Она является видоизменением неравенств, впервые доказанных в [8] и в [12]. Оценки, аналогичные (19), были получены в этих работах и в случае $0 < r < 1$.

Оценки (22) являются непосредственным развитием (21). Близкие оценки были получены в работе [4] (см. оценки (7), (8) в [4]).

Лемма 9. В обозначениях леммы 6 предположим, что $\nu_r = E|\xi_1|^r < \infty$ для $r \geq 1$ и $E\xi_1 = 0$. Тогда

$$\exp(-hx) \left(E[\exp(h\xi_1)1_{\{\xi_1 < x\}}] \right)^n \leq P_{\xi_1}(r, x, n).$$

Выражение $\mathcal{P}_{\xi_1}(r, x, n)$ определено в (9).

Для доказательства леммы 9 в оценке леммы 8 следует выбрать

$$y = x, \quad h = \max \{0, h_n(x, r)\}, \quad (23)$$

где

$$h_n(x, r) = \begin{cases} \frac{1}{x} \ln \left(x^r / n \nu_r \right) & \text{в случаях (I), (II),} \\ (n \nu_2)^{-1/2} & \text{в случае (III),} \end{cases}$$

и (I): $\{1 \leq r \leq 2, n \geq 1, x > 0\}$, (II): $\{r > 2, n \geq 3, x \geq (r-2)/2(n \nu_2)^{1/2} \ln n\}$, (III): $\{r > 2, n \geq 3, x < (r-2)/2(n \nu_2)^{1/2} \ln n\}$.

Наконец, для функции распределения $F(x)$ некоторой неотрицательной с.в. рассмотрим функцию восстановления $U(x) = \sum_{k=0}^{\infty} F^{*k}(x)$ и функцию $H(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k F^{*k}(x)$. Заметим сперва, что для $x \geq 0$

$$H(x) = U^{*2}(x) \quad \text{и} \quad U^{*2}(x) \leq U^2(x). \quad (24)$$

Следующая лемма была доказана в [2] (см. Приложение 1, теорему 1).

Лемма 10. Для любого $x \geq 0$

$$U(x) \leq \frac{2}{1-2p} \left(1 + \frac{x}{k(p)} \right),$$

где $-\frac{1}{2} < p < \frac{1}{2}$ и $k(p)$ является $(\frac{1}{2} + p)$ -квантилью распределения $F(x)$. В частности, для любого $x \geq 0$

$$U(x) \leq 2 \left(1 + \frac{x}{k(0)} \right), \quad (25)$$

где $k(0)$ является медианой распределения $F(x)$.

Рассмотрим теперь произвольную пару неотрицательных случайных величин η, ζ с совместной функцией распределения (ф.р.) $F_{\eta, \zeta}(x, z)$ и с маргинальными ф.р. $F_{\eta}(x)$ и $F_{\zeta}(z)$. Для $x, z \geq 0$ положим

$$U_{\eta, \zeta}(x, z) = \sum_{k=0}^{\infty} F_{\eta, \zeta}^{*k}(x, z), \quad H_{\eta, \zeta}(x, z) = \sum_{k=1}^{\infty} k F_{\eta, \zeta}^{*k}(x, z),$$

$U_{\eta}(x) = U_{\eta, \zeta}(x, \infty)$, $H_{\eta}(x) = H_{\eta, \zeta}(x, \infty)$ и аналогично для $U_{\zeta}(z)$ и $H_{\zeta}(z)$.

Лемма 11. Для любых $x, z \geq 0$ и $k = 1, 2, \dots$

$$\begin{aligned} F_{\eta, \zeta}^{*k}(x, z) &\leq \min \{ F_{\eta}^{*k}(x), F_{\zeta}^{*k}(z) \}, \\ U_{\eta, \zeta}(x, z) &\leq \min \{ U_{\eta}(x), U_{\zeta}(z) \}, \\ H_{\eta, \zeta}(x, z) &\leq \min \{ H_{\eta}(x), H_{\zeta}(z) \}. \end{aligned} \quad (26)$$

Доказательство этой леммы содержится в [18] (см. лемму 1, теорему 2.3 и теорему 3.1).

6. Обобщения: m -зависимые циклы рекордной регенерации. Введенное в п. 2 [6] определение RR-последовательности достаточно для многочисленных приложений. Однако в ряде случаев возникает необходимость в известном усложнении этой схемы.

Пример 1. Пусть для некоторой RR-последовательности (W_k, Z_k) , $k = 1, 2, \dots$, рассматривается модификация функционала (1):

$$U_{\nu(t)} = \sum_{k=1}^{\nu(t)} f(Z_k, Z_{k+1}, \dots, Z_{k+m}),$$

где $\nu(t) = \min\{n > 0: \sum_{k=1}^n W_k > t\}$ и f — некоторый измеримый функционал на $\mathbf{R}^{m+1}$. Тогда приращения

$$\tau_k = \xi_k - \xi_{k-1}, \quad T_k = \sum_{i=\xi_{k-1}+1}^{\xi_k} W_i, \quad F_k = \sum_{i=\xi_{k-1}+1}^{\xi_k} f(Z_i, Z_{i+1}, \dots, Z_{i+m}),$$

$k = 1, 2, \dots$, являются m -зависимыми случайными векторами.

Пример 2. Пусть ПМВ (X_k, θ_k) , $k = 1, 2, \dots$, задан на некотором фазовом пространстве $(X \times \mathbf{R}_+, \mathfrak{B} \times \mathfrak{R}_+)$. Пусть, в отличие от примера 2 п. 2 [6], не предполагается, что на этом пространстве имеется возвратный атом Δ .

Известно однако (см. splitting-конструкцию работы [25]), что если ПМВ (X_k, θ_k) , $k = 1, 2, \dots$, является возвратным по Харрису и удовлетворяет условию минорирования (M_α) (см. [25, с. 125]) при $\alpha = 1$, то он может быть расширен посредством известного расширения вероятностного пространства до ПМВ, имеющего возвратный атом Δ на расширенном фазовом пространстве.

В том случае, когда в условии минорирования (M_α) число α не может быть выбрано равным 1, splitting-конструкция может быть применена к вложенному ПМВ (см. [25, с. 129]), что очевидным образом приводит к RR-последовательности с 1-зависимыми циклами.

О п р е д е л е н и е. Последовательность (W_k, Z_k) , $k = 1, 2, \dots$, называется обобщенной последовательностью, допускающей рекордную регенерацию (GRR-последовательностью), если существует такая последовательность п.н. конечных случайных индексов $0 = \xi_{-1} < \xi_0 < \xi_1 < \xi_2 \dots$, что:

(i) σ -алгебры $\mathfrak{F}_i = \sigma\{(W_k, Z_k), \xi_{i-1} < k \leq \xi_i\}$, $\mathfrak{F}_j = \sigma\{(W_k, Z_k), \xi_{j-1} < k \leq \xi_j\}$, $i, j = 0, 1, 2, \dots$, независимы при $|i - j| > m$;

(ii) выполнено условие (ii) определения 1 [6].

Очевидным следствием условия (i) является m -зависимость определенных в п. 2 векторов (τ_k, T_k, F_k) , $k = 0, 1, 2, \dots$.

Анализируя доказательства настоящей работы и ее первой части [6], легко убедиться, что m -зависимость приращений (τ_k, T_k, F_k) , $k =$

0, 1, 2, ..., приводит лишь к необходимости применять вместо многомерной ЦПТ и ее вариантов (в том числе — неравномерных оценок скорости сходимости, асимптотических разложений в ЦПТ с неравномерными оценками остаточных членов и т.д.), их аналоги для m -зависимых случайных векторов. В остальном доказательства практически не изменяются.

Общий метод получения разнообразных предельных теорем для m -зависимых слагаемых, опирающийся на факторизацию характеристического функционала, детально разработан (см. например, [15], [16], [17]). Доказательство требуемых вспомогательных теорем может быть проведено, если воспользоваться факторизацией ([16, теорема 1]) и оценками производных ([16, теорема 2]) характеристического функционала суммы m -зависимых случайных векторов, и применять стандартную технику, опирающуюся на усечение, сглаживание и формулу обращения характеристических функционалов (см. [1], [3]). Конечно, эти доказательства сопряжены со значительными техническими трудностями и заслуживают отдельного рассмотрения.

З а м е ч а н и е 6. Доказательства в работах [20], [21] содержат неточность. Она состоит в некорректном утверждении о независимости приращений (τ_k, T_k, F_k) , $k = 0, 1, \dots$, для последовательностей (4.4) и (15) в работах [20] и [21] соответственно, и в последующем применении результатов работы [6]. На самом деле, указанные приращения являются 1-зависимыми: ситуация в [20], [21] совпадает с описанной выше в примере 1. Использование обобщения результата работы [6], учитывающего 1-зависимость циклов рекордной регенерации, исправляет неточность доказательства. Формулировки результатов работ [20], [21] являются верными.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Дубинский И. О предельных теоремах в $\mathbf{R}^k$. I–III. — Лит. матем. сб., 1982, т. XXII, в. 2, с. 51–68; 1984, т. XXIV, в. 3, с. 120–132; 1984, т. XXIV, в. 4, с. 68–80.
2. Боровков А. А. Вероятностные процессы в теории массового обслуживания. М.: Наука, 1972, 367 с.
3. Бхаттачария Р. Н., Ранга Рао Р. Аппроксимация нормальным распределением и асимптотические разложения. М.: Наука, 1982, 286 с.
4. Малиновский В. К. О предельных теоремах для харрисовских цепей Маркова. II. — Теория вероятн. и ее примен., 1989, т. XXXIV, в. 2, с. 289–303.
5. Малиновский В. К. Большие отклонения для возвратных процессов марковского восстановления. — Теория вероятн. и ее примен., 1991, т. 36, в. 1, с. 165–167.
6. Малиновский В. К. Предельные теоремы для остановленных последовательностей. I: оценки скорости сходимости и асимптотические разложения. — Теория вероятн. и ее примен., 1993, т. 38, в. 4, с. 800–826.
7. Нагаев А. В. Предельные теоремы, учитывающие большие отклонения, при нарушении условия Крамера. — Изв. АН УзССР, сер. физ.-мат. наук, 1969, т. 6, с. 17–22.

8. *Нагаев С. В.* Некоторые предельные теоремы для больших уклонений. — Теория вероятн. и ее примен., 1965, т. X, в. 2, с. 231–254.
9. *Петров В. В.* Суммы независимых случайных величин. М.: Наука, 1972, 414 с.
10. *Феллер В.* Введение в теорию вероятностей и ее приложения. Т. 2. М.: Мир, 1984, 475 с.
11. *Фук Д. Х.* Некоторые вероятностные неравенства для мартингалов. — Сиб. матем. журн., 1973, т. XIV, в. 1, с. 185–193.
12. *Фук Д. Х., Нагаев С. В.* Вероятностные неравенства для сумм независимых случайных величин. — Теория вероятн. и ее примен., 1971, т. XVI, в. 4, с. 660–675.
13. *Чибисов Д. М.* Вычисление дефекта асимптотически эффективных критериев. — Теория вероятн. и ее примен., 1985, т. XXX, в. 2, с. 269–288.
14. *Gut A.* Stopped Random Walks. Limit Theorems and Applications. New York: Springer-Verlag, 1988.
15. *Heinrich L.* Nonuniform estimates and asymptotic expansions of the remainder in the central limit theorem for m -dependent random variables. — Math. Nachr., 1984, B. 115, S. 7–20.
16. *Heinrich L.* Some estimates of the cumulant-generating function of a sum of m -dependent random vectors and their application to large deviations. — Math. Nachr., 1985, B. 120, S. 91–101.
17. *Heinrich L.* A method for the derivation of limit theorems for sums of weakly dependent random variables: A survey. — Optimization, 1987, v. 18, p. 715–735.
18. *Hunter J.* Renewal theory in two dimensions: bounds on the renewal functions. — Adv. Appl. Probab., 1977, v. 9, p. 527–541.
19. *Malinovskii V. K.* On a limit theorem for dependent random variables. — Ann. Acad. Sci. Fennicæ. Ser. A. I. Mathematica, 1988, v. 13, p. 225–229.
20. *Malinovskii V. K.* Asymptotic expansions in sequential estimation of an autoregressive parameter. — Math. Methods Statist., 1993, v. 2, p. 206–227.
21. *Malinovskii V. K.* Asymptotic expansions in sequential estimation for the first-order random coefficient autoregressive model: regenerative approach. — Acta Applicandæ Math., 1993, v. 34, p. 261–281.
22. *Malinovskii V. K.* Corrected normal approximation for the probability of ruin within finite time. — Scand. Actuar. J., 1994, v. 2, p. 161–174.
23. *Malinovskii V. K.* Approximations and upper bounds on probabilities of large deviations in the problem of ruin within finite time. — Scand. Actuar. J., 1996 (в печати).
24. *Nagaev S. V.* Large deviations of sums of independent random variables. — Ann. Probab., 1979, v. 7, p. 754–789.
25. *Nummelin E.* Uniform and ratio limit theorems for Markov renewal and semi-regenerative processes on a general state space. — Ann. Inst. H. Poincaré, Sect. B, 1978, v. XIV, p. 119–143.
26. *Yoshihara Ken-ichi.* Probability inequalities for sums of absolutely regular processes and their applications. — Z. Wahrscheinlichkeitstheor. verw. Geb., 1987, B. 43, H. 4, S. 319–329.

Поступила в редакцию
13.VI.1992

Исправленный вариант
28.VII.1995