Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Г. Алексеев, Ядра типа Джексона и Джексона–Валле-Пуссена и их вероятностные применения, *Теория вероятн. и ее примен.*, 1996, том 41, выпуск 1, 170–177

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp2785>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.234.197.8

26 апреля 2023 г., 06:47:28

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

© 1996 г.

АЛЕКСЕЕВ В. Г.*

ЯДРА ТИПА ДЖЕКСОНА И
ДЖЕКСОНА-ВАЛЛЕ-ПУССЕНА И
ИХ ВЕРОЯТНОСТНЫЕ ПРИМЕНЕНИЯ

Приводятся разложения в ряд Фурье полиномиальных ядер типа Джексона и Джексона-Валле-Пуссена до четвертого порядка включительно. Обсуждаются возможности применения указанных разложений к построению оценок спектральной плотности стационарного случайного процесса с дискретным временем, а также к построению цифровых фильтров низких частот.

Ключевые слова и фразы: ядра типа Джексона, ядра типа Джексона-Валле-Пуссена, коэффициенты Фурье, спектральная плотность стационарного случайного процесса, мультипликативное окно данных, модифицированная периодограмма, линейные цифровые фильтры, импульсная характеристика, амплитудно-частотная характеристика.

Среди оценок спектральной плотности стационарного случайного процесса (ССП) $\{X(k), k \in \mathbb{Z}\}$ важное место занимает оценка, впервые предложенная в 1967 году П. Д. Уэлчем [1]. Речь идет о вычислительном алгоритме, включающем в себя разбиение всего интервала наблюдения длины M на конечное число неперекрывающихся или частично перекрывающихся интервалов длины $m < M$, вычисление по каждому из них модифицированной (т.е. использующей неравномерное взвешивание обрабатываемого массива) периодограммы и ее последующее осреднение по числу подынтервалов длины m . Начиная с конца 70-х годов предложенная Уэлчем оценка подверглась интенсивному изучению в ряде работ И. Г. Журбенко, где она фигурирует под названием оценки, получаемой осреднением по сдвигу во времени. В дальнейшем предложенную в работе [1] оценку мы предпочитаем называть оценкой Уэлча. Это последнее название представляется нам, с одной стороны, более коротким и благозвучным и, с другой стороны, в полной мере отражающим заслугу автора, давшего этой оценке «путевку в жизнь».

По мнению И. Г. Журбенко и И. А. Кожевниковой [2]–[4], оценка Уэлча обладает большой помехозащищенностью от влияния сильных возмущений на удаленных частотах, она особенно удобна при наличии таких нестационарностей, как «уход», «плавание» частот, она может быть использована для проверки исследуемого ряда на стационарность, она, наконец, экономна в смысле общего числа операций и объема памяти при вычислении на ЭВМ. В настоящей статье в качестве мультипликативных окон данных для построения модифицированной периодограммы — важнейшего элемента оценки Уэлча — будут предложены разложения в ряд Фурье ядер типа Джексона и Джексона-Валле-Пуссена. Использование предлагаемых нами окон данных позволяет исследователю в полной мере реализовать описанные выше достоинства оценки Уэлча.

*Институт физики атмосферы РАН, пер. Пыжевский, 3, 109017 Москва, Россия.

Полиномиальные ядра типа Джексона $J_{l,n}(\mu)$, $l = 1, 2, 3, 4$, определяются для $\mu \in \Pi = [-\pi, \pi]$ и $n \in \mathbb{N}$ формулами

$$J_{1,n}(\mu) = \frac{1}{n} \left[\frac{\sin(n\mu/2)}{\sin(\mu/2)} \right]^2, \quad (1)$$

$$J_{2,n}(\mu) = \frac{3}{2n^3 + n} \left[\frac{\sin(n\mu/2)}{\sin(\mu/2)} \right]^4, \quad (2)$$

$$J_{3,n}(\mu) = \frac{20}{11n^5 + 5n^3 + 4n} \left[\frac{\sin(n\mu/2)}{\sin(\mu/2)} \right]^6, \quad (3)$$

и, соответственно,

$$J_{4,n}(\mu) = \frac{315}{151n^7 + 70n^5 + 49n^3 + 45n} \left[\frac{\sin(n\mu/2)}{\sin(\mu/2)} \right]^8. \quad (4)$$

Нормирующие множители при ядрах (1)–(4) выбраны нами с таким расчетом, чтобы для каждого из них выполнялось соотношение

$$(2\pi)^{-1} \int_{\Pi} J_{l,n}(\mu) d\mu = 1. \quad (5)$$

Ядра (1) и (2) широко известны под названием ядер Фейера и, соответственно, Джексона. Начиная с $l = 3$, принято говорить о ядрах типа Джексона. Объединяя все рассматриваемые нами ядра под общим названием «ядра типа Джексона», мы лишь констатируем их однотипность: каждое из ядер $J_{l,n}(\mu)$ пропорционально l -й степени ядра Фейера (1).

Свойства ядер типа Джексона подробно обсуждаются в монографии [5, гл. II, § 3]. Однако точные формулы для ядер типа Джексона $J_{l,n}(\mu)$, $l \geq 3$, в монографии отсутствуют. Утверждается лишь, что нормирующий множитель при ядре $J_{l,n}(\mu)$ пропорционален $n^{-(2l-1)}$ при больших n . Точные формулы для ядер $J_{l,n}(\mu)$, $l \geq 3$, не были найдены автором этих строк и в других руководствах по рядам Фурье. По-видимому, формулы (3) и (4) для ядер $J_{l,n}(\mu)$, $l = 3, 4$, ранее не были известны. Ниже будут приведены также точные формулы для ядер $J_{l,n}(\mu)$, $l = 5, 6, 7$.

Каждое из ядер $J_{l,n}(\mu)$ является конечным тригонометрическим полиномом, так как в разложении $J_{l,n}(\mu) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a(k) \exp(ik\mu)$ все $a(k) = 0$, как только $|k| > l(n-1)$, для всех $l = 1, 2, \dots$. Хорошо известно (см., например, [6, упр. 1.7.12]), что для $l = 1$

$$a(k) = 1 - \frac{|k|}{n}, \quad |k| \leq n. \quad (6)$$

Коэффициенты Фурье ядра (2) были, по-видимому, впервые найдены Г. П. Сафроновой [7]. Они описываются формулой

$$a(k) = \begin{cases} 1 - \frac{3|k| + 6nk^2 - 3|k|^3}{2n(2n^2 + 1)}, & \left| \frac{k}{n} \right| \leq 1, \\ \frac{(2n - |k|)[(2n - |k|)^2 - 1]}{2n(2n^2 + 1)}, & 1 \leq \left| \frac{k}{n} \right| \leq 2 \end{cases} \quad (7)$$

Последовательно свертывая ряды из коэффициентов Фурье (6) и (7), находим коэффициенты Фурье для ядер (3) и (4). Для $|k| \leq n$, $n \leq |k| \leq 2n$ и $2n \leq |k| \leq 3n$ коэффициенты Фурье $a(k)$ ядра (3) описываются соотношениями

$$a(k) = 1 - (33n^5 + 15n^3 + 12n)^{-1}$$

$$\begin{aligned} & \times [20|k| + (30n^3 + 45n)k^2 - 25|k|^3 - 15nk^4 + 5|k|^5], \\ a(k) = & (66n^5 + 30n^3 + 24n)^{-1} \\ & \times [(51n^5 + 105n^3 - 36n) + (75n^4 - 225n^2 + 20)|k| \\ & - (210n^3 - 135n)k^2 + (150n^2 - 25)|k|^3 - 45nk^4 + 5|k|^5] \end{aligned}$$

и, соответственно,

$$a(k) = \frac{(3n - |k|)[(3n - |k|)^2 - 1][(3n - |k|)^2 - 4]}{66n^5 + 30n^3 + 24n}.$$

Аналогичным образом, для $|k| \leq n$, $n \leq |k| \leq 2n$, $2n \leq |k| \leq 3n$ и $3n \leq |k| \leq 4n$ коэффициенты Фурье ядра (4) определяются формулами

$$\begin{aligned} a(k) = & 1 - (2416n^7 + 1120n^5 + 784n^3 + 720n)^{-1} \\ & \times [1260|k| + (1680n^5 + 2240n^3 + 2940n)k^2 - 1715|k|^3 \\ & - (560n^3 + 1400n)k^4 + 490|k|^5 + 140nk^6 - 35|k|^7], \\ a(k) = & (2416n^7 + 1120n^5 + 784n^3 + 720n)^{-1} \\ & \times [(2472n^7 + 336n^5 + 3528n^3 - 1296n) - (392n^6 - 3920n^4 + 8232n^2 - 756)|k| \\ & - (504n^5 + 10080n^3 - 5292n)k^2 - (1960n^4 - 7840n^2 + 1029)|k|^3 \\ & + (2520n^3 - 2520n)k^4 - (1176n^2 - 294)|k|^5 + 252nk^6 - 21|k|^7], \\ a(k) = & (2416n^7 + 1120n^5 + 784n^3 + 720n)^{-1} \\ & \times [- (1112n^7 - 12880n^5 + 7448n^3 - 720n) \\ & + (12152n^6 - 27440n^4 + 8232n^2 - 252)|k| \\ & - (19320n^5 - 21280n^3 + 2940n)k^2 + (13720n^4 - 7840n^2 + 343)|k|^3 \\ & - (5320n^3 - 1400n)k^4 + (1176n^2 - 98)|k|^5 - 140nk^6 + 7|k|^7] \end{aligned}$$

и, соответственно,

$$a(k) = \frac{(4n - |k|) \prod_{j=1}^3 [(4n - |k|)^2 - j^2]}{2416n^7 + 1120n^5 + 784n^3 + 720n}.$$

Располагая коэффициентами Фурье ядер (1)–(4), мы можем последовательно находить разложения в ряд Фурье ядер типа Джексона более высоких порядков. Мы ограничимся тем, что вычислим нулевые коэффициенты Фурье произведений

$$\left[\frac{\sin(n\mu/2)}{\sin(\mu/2)} \right]^6 \left[\frac{\sin(n\mu/2)}{\sin(\mu/2)} \right]^{2l}, \quad l = 2, 3, 4,$$

что и приводит нас в конечном счете к следующим формулам:

$$J_{5,n}(\mu) = 36288(15619n^9 + 7350n^7 + 5187n^5 + 4100n^3 + 4032n)^{-1} \left[\frac{\sin(n\mu/2)}{\sin(\mu/2)} \right]^{10}, \quad (8)$$

$$\begin{aligned} J_{6,n}(\mu) = & 1663200(655177n^{11} + 311465n^9 + 221991n^7 + 175835n^5 \\ & + 147532n^3 + 151200n)^{-1} \left[\frac{\sin(n\mu/2)}{\sin(\mu/2)} \right]^{12}, \end{aligned} \quad (9)$$

$$J_{7,n}(\mu) = 74131200 \left(27085381n^{13} + 12969957n^{11} + 9312303n^9 + 7426991n^7 + 6222216n^5 + 5411952n^3 + 5702400n \right)^{-1} \left[\frac{\sin(n\mu/2)}{\sin(\mu/2)} \right]^{14}. \quad (10)$$

Каждое из ядер (8)–(10) удовлетворяет соотношению (5).

Пусть $x(k)$, $k = -m, -m+1, \dots, m$, — обрабатываемый массив (подынтервал реализации ССП $X(k)$ со средним $EX(k) \equiv 0$ и спектральной плотностью $f(\lambda)$, $\lambda \in \Pi$). Предполагая, что $m = l(n-1)$, где $n > 1$ и $l = 1, 2, 3$ или 4, построим модифицированную периодограмму $I_m(\lambda)$ в виде

$$I_m(\lambda) = \left| \sum_{k=-m}^m a(k) x(k) e^{ik\lambda} \right|^2 \left[2\pi \sum_{j=-m}^m a^2(j) \right]^{-1}, \quad (11)$$

где $a(k)$ — коэффициенты Фурье ядра $J_{l,n}(\mu)$.

Легко видеть, что в этом случае

$$EI_m(\lambda) = \frac{\int_{\Pi} J_{l,n}^2(\mu) f(\lambda + \mu) d\mu}{\int_{\Pi} J_{l,n}^2(\mu) d\mu},$$

где, как обычно, предполагается, что $f(\lambda \pm 2\pi) = f(\lambda)$. Если, например, $l = 4$, то

$$EI_m(\lambda) = \frac{\int_{\Pi} [\sin(n\mu/2)/\sin(\mu/2)]^{16} f(\lambda + \mu) d\mu}{\int_{\Pi} [\sin(n\mu/2)/\sin(\mu/2)]^{16} d\mu}. \quad (12)$$

Формула (12) со всей очевидностью свидетельствует о высокой помехозащищенности периодограммы (11).

Несколько иной подход к построению модифицированной периодограммы предложен в цитируемых выше работах [2]–[4], но и он в конечном счете сводится к использованию ядер типа Джексона, хотя само название «ядра типа Джексона» нигде в работах [2]–[4] не фигурирует. В качестве небольшого замечания к подходу И. Г. Журбенко хотелось бы указать на то обстоятельство, что ни в перечисленных выше работах [2]–[4], ни в монографиях [8], [9] мы не находим подробного описания алгоритма (рекуррентного соотношения), лежащего в основе подпрограммы SUBROUTINE WKOLM, рекомендуемой И. Г. Журбенко для вычисления окна данных Колмогорова. Вопросы, касающиеся точности предложенного И. Г. Журбенко алгоритма и других его особенностей, остаются без ответа.

Предложенные выше разложения ядер типа Джексона в ряд Фурье могут быть использованы отнюдь не только для построения мультипликативных окон данных. Другое важное применение ядер типа Джексона — это построение цифровых фильтров низких частот. В частности, разложение в ряд Фурье ядра (4) позволяет построить последовательность фильтров низких частот, способных выдержать самую жесткую конкуренцию как в смысле удобства их применения, так и в смысле уровня боковых лепестков передаточной функции (амплитудно-частотной характеристики) при заданной длине импульсной характеристики. Важность построения симметричных цифровых фильтров с возможно более низким уровнем боковых лепестков амплитудно-частотной характеристики отмечается, в частности, в работе [10]. Цифровые фильтры, надежно подавляющие высокочастотную часть пропускаемого через них сигнала, в свою очередь, могут быть использованы для высококачественной аппроксимации линейных фильтров с любой (не обязательно вещественной) передаточной функцией (по этому поводу см., например, [11, гл. 3]). При наличии достаточно длинной реализации исследуемого ССП применение фильтров низких частот с одновременным прореживанием (децимацией) выборки позволяет нам существенно

укрупнить масштаб интересующей нас спектральной плотности в ее наиболее низкочастотной части (см., например, [12, § 5.5]). Дальнейшие приложения предлагаемых нами разложений ядер типа Джексона следует искать в теории суммирования расходящихся рядов и в теории приближения периодических функций тригонометрическими полиномами.

Перейдем к рассмотрению второго из названных в заголовке статьи наборов ядер. Полиномиальные ядра типа Джексона-Валле-Пуссена $P_{l,n}(\mu)$, $l = 2, 4, 6$, определяются для $\mu \in \Pi$ и $n \in \mathbb{N}$ соотношениями

$$P_{2,n}(\mu) = \frac{2 + \cos \mu}{2n^3} \left[\frac{\sin(n\mu/2)}{\sin(\mu/2)} \right]^4, \quad (13)$$

$$P_{4,n}(\mu) = \frac{210(2 + \cos \mu)^2}{906n^7 + 14n^3 + 25n} \left[\frac{\sin(n\mu/2)}{\sin(\mu/2)} \right]^8 \quad (14)$$

и, соответственно,

$$P_{6,n}(\mu) = 61600(2 + \cos \mu)^3 (655177n^{11} + 7161n^7 + 7590n^5 + 4312n^3 + 3360n)^{-1} \times \left[\frac{\sin(n\mu/2)}{\sin(\mu/2)} \right]^{12}. \quad (15)$$

Каждое из ядер (13)–(15) удовлетворяет условию $(2\pi)^{-1} \int_{\Pi} P_{l,n}(\mu) d\mu = 1$. Для $l = 2, 4, 6$ коэффициенты Фурье $a(k)$ ядер $P_{l,n}(\mu)$ обращаются в нуль, как только $|k| > l(2n - 1)/2$.

Коэффициенты Фурье ядра (13) описываются следующей формулой:

$$a(k) = \begin{cases} 1 - \frac{6nk^2 - 3|k|^3}{4n^3}, & \left| \frac{k}{n} \right| \leq 1, \\ \frac{(2n - |k|)^3}{4n^3}, & 1 \leq \left| \frac{k}{n} \right| \leq 2 \end{cases} \quad (16)$$

(см., например, [13, с. 241]). Пользуясь формулой (16) в качестве отправной точки, находим коэффициенты Фурье $a(k)$ ядра (14). Для $|k| \leq n$, $n \leq |k| \leq 2n$, $2n \leq |k| \leq 3n$ и $3n \leq |k| \leq 4n$ они определяются соотношениями

$$\begin{aligned} a(k) &= 1 - (7248n^7 + 112n^3 + 200n)^{-1} \\ &\quad \times [350|k| + (5040n^5 + 420n)k^2 - 245|k|^3 - 1680n^3k^4 + 420nk^6 - 105|k|^7], \\ a(k) &= (7248n^7 + 112n^3 + 200n)^{-1} \\ &\quad \times [(7416n^7 + 504n^3 - 360n) - (1176n^6 + 1176n^2 - 210)|k| \\ &\quad - (1512n^5 - 756n)k^2 - (5880n^4 + 147)|k|^3 \\ &\quad + 7560n^3k^4 - 3528n^2|k|^5 + 756nk^6 - 63|k|^7], \\ a(k) &= (7248n^7 + 112n^3 + 200n)^{-1} \\ &\quad \times [-(3336n^7 + 1064n^3 - 200n) + (36456n^6 + 1176n^2 - 70)|k| \\ &\quad - (57960n^5 + 420n)k^2 + (41160n^4 + 49)|k|^3 \\ &\quad - 15960n^3k^4 + 3528n^2|k|^5 - 420nk^6 + 21|k|^7] \end{aligned}$$

и, соответственно,

$$a(k) = \frac{L(L^2 - 1)(3L^4 + 3L^2 + 10)}{7248n^7 + 112n^3 + 200n},$$

где $L = 4n - |k|$.

Читателю предоставляется возможность остановить свой выбор на любом из двух приведенных нами наборов ядер.

Приведенные выше дискретные окна данных имеют, разумеется, и непрерывный аналог. Для $\mu \in \mathbb{R}$ положим

$$H_1(\mu) = \left[\frac{\sin(\mu/2)}{(\mu/2)} \right]^2, \quad (17)$$

$$H_2(\mu) = \frac{3}{2} \left[\frac{\sin(\mu/2)}{(\mu/2)} \right]^4, \quad (18)$$

$$H_3(\mu) = \frac{20}{11} \left[\frac{\sin(\mu/2)}{(\mu/2)} \right]^6, \quad (19)$$

$$H_4(\mu) = \frac{315}{151} \left[\frac{\sin(\mu/2)}{(\mu/2)} \right]^8. \quad (20)$$

Окно данных $a_l(\tau)$, $l = 1, 2, 3, 4$, определим соотношением

$$a_l(\tau) = (2\pi)^{-1} \int_{\mathbb{R}} \exp(i\mu\tau) H_l(\mu) d\mu.$$

Взаимно дополняющие друг друга наборы из окон данных $a_l(\tau)$ могут быть найдены в работах [14], [15] (см. также [16, табл. 5.1]). Кроме того, формула 130 из таблицы I книги [17] предоставляет читателю возможность самостоятельно вычислить окна данных $a_l(\tau)$, отвечающие ядрам (17)–(20). Каждое из окон данных $a_l(\tau)$, $l = 1, 2, 3, 4$, обращается в нуль, как только $|\tau| \geq l$. Нормирующие множители при ядрах (17)–(20) избраны нами таким образом, что для всех $l = 1, 2, 3, 4$ выполняется соотношение $a_l(0) = 1$.

Читатель без труда заметит большое визуальное сходство между формулами для ядер $J_{l,n}(\mu)$, $P_{l,n}(\mu)$ и $H_l(\mu)$, отвечающих одному и тому же значению индекса l . Сходство между соответствующими формулами еще более усилится, если величину $2 + \cos \mu$ в формулах (13)–(15) заменить на 3.

Обсуждение вопросов, связанных с применением ядер типа Джексона и Джексона-Валле-Пуссена к спектральному анализу ССП, мы на этом заканчиваем. В настоящем и в двух последующих абзацах будут приведены некоторые дополнительные соображения, касающиеся спектрального оценивания. Во всех перечисленных выше работах И. Г. Журбенко наряду с оценкой Уэлча рассматриваются и так называемые периодограммные оценки спектральной плотности, т.е. оценки, получаемые осреднением периодограммы по частотному аргументу. При этом значительное внимание уделяется оценкам, построенным с использованием весовой функции

$$\Phi(x) = \begin{cases} \frac{(a+1)(1-|x|^a)}{2a}, & |x| \leq 1, \\ 0, & |x| > 1, \end{cases} \quad (21)$$

где $0 < a < 1$. Отмечается, что весовая функция (21) дает нам решение задачи поиска оптимального спектрального окна для ССП со спектральной плотностью $f(\lambda)$, удовлетворяющей условию Гёльдера с показателем a . Свойства оценок, построенных с использованием весовой функции (21), обсуждаются также в монографии [18, с. 62, 63], причем сама функция (21) названа здесь оптимальным окном Колмогорова-Журбенко. К сожалению, авторы книги [18] обошли молчанием то обстоятельство, что весовая функция (21) была известна задолго до появления работ [2], [3]. В этой связи нам достаточно указать на статью [19], вышедшую из печати в 1971 г. Если в

формуле (21) этой последней работы положить $A = 1$ (здесь A — полуширина спектрального окна), мы и придем к весовой функции $\Phi(x)$, определяемой формулой (21) настоящей работы. К числу достоинств функции (21) следует отнести и то обстоятельство, что ее преобразование Фурье неотрицательно. Благодаря этому функция (21) является одной из немногих весовых функций с ограниченным носителем, удовлетворяющих условию допустимости в смысле [20].

Другие весовые функции, которые могут быть рекомендованы, если а) оцениваемая спектральная плотность $f(\lambda)$ многократно дифференцируема и б) объем выборки M не слишком мал, читатель найдет в работах [21]–[23]. Если же читатель пожелает построить оценку, обладающую тем свойством, что локальные экстремумы ее математического ожидания выражены сильнее, чем у самой спектральной плотности $f(\lambda)$, то здесь ему будут полезны весовые функции, приведенные в работе [24].

В целом без малейшего преувеличения можно утверждать, что арсенал средств непараметрического оценивания спектральной плотности $f(\lambda)$ позволяет учесть самые разнообразные априорные предположения и пожелания исследователя и в большинстве случаев (за исключением лишь случаев слишком малого объема выборки) получить оценку функции $f(\lambda)$ достаточно высокого качества. В последние годы, однако, все большее число авторов работ прикладного характера проявляет интерес к оценкам не только обычной спектральной плотности, но и старших спектральных плотностей, дающих важную дополнительную информацию относительно статистической структуры исследуемого ССП. Список литературы, охватывающий важнейшие направления статистического оценивания старших спектральных плотностей, может быть найден в работе [25]. Здесь мы отметим лишь, что, в рамках подхода автора этих строк, использование одного из приведенных выше окон данных строго обязательно при построении непараметрических оценок старших спектральных плотностей.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Welch P. D. The use of fast Fourier transform for the estimation of power spectra: a method based on time averaging over short, modified periodograms. — IEEE Trans., 1967, v. AU-15, № 2, p. 70–73.
2. Журбенко И. Г. Об эффективности оценок спектральной плотности стационарного процесса, I, II. — Теория вероятн. и ее примен., 1980, т. XXV, в. 3, с. 476–489; 1983, т. XXVIII, в. 2, с. 388–397.
3. Журбенко И. Г., Кожевникова И. А. О сравнительных характеристиках спектральных плотностей стационарных случайных процессов. — Проблемы передачи информации, 1982, т. 18, в. 1, с. 64–77.
4. Журбенко И. Г. О работах по анализу временных рядов на кафедрах теории вероятностей и математической статистики МГУ. — Теория вероятн. и ее примен., 1989, т. XXXIV, в. 1, с. 202–208.
5. Дзядык В. К. Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами. М.: Наука, 1977, 511 с.
6. Бриллинджер Д. Временные ряды. Обработка данных и теория. М.: Мир, 1980, 536 с.
7. Сафронова Г. П. О методе суммирования расходящихся рядов, связанном с сингулярным интегралом Джексона. — Докл. АН СССР, 1950, т. 73, № 2, с. 277–278.
8. Журбенко И. Г. Спектральный анализ временных рядов. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1982, 168 с.
9. Журбенко И. Г. Анализ стационарных и однородных случайных систем. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1987, 240 с.

10. *Adams J. W.* A new optimal window. — *IEEE Trans. Signal Processing*, 1991, v. 39, № 8, p. 1753–1769.
11. *Рабинер П., Гоулд Б.* Теория и применение цифровой обработки сигналов. М.: Мир, 1978, 548 с.
12. *Отмес Р., Энноксон Л.* Прикладной анализ временных рядов. М.: Мир, 1982, 428 с.
13. *Parzen E.* Time Series Analysis Papers. San Francisco: Holden-Day, 1967, 580 p.
14. *Лелумезс Э.* Об одной оценке спектральной плотности. — *Изв. АН ЭстССР, сер. физика, матем.*, 1971, т. 20, № 2, с. 218–220.
15. *Palmer D. F.* Bias criteria for the selection of spectral windows. — *IEEE Trans. Inform. Theory*, 1969, v. 15, № 5, p. 613–615.
16. *Мирский Г. Я.* Аппаратурное определение характеристик случайных процессов. М.: Энергия, 1972, 455 с.
17. *Обергеттингер Ф.* Преобразования Фурье распределений и их обращения. М.: Наука, 1979, 248 с.
18. *Журбенко И. Г., Кожевникова И. А.* Стохастическое моделирование процессов. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1990, 147 с.
19. *Алексеев В. Г.* О выборе спектрального окна при оценке спектра гауссовского стационарного случайного процесса. — *Проблемы передачи информации*, 1971, т. 7, в. 4, с. 45–54.
20. *Cline D. B. H.* Admissible kernel estimators of a multivariate density. — *Ann. Statist.*, 1988, v. 16, № 4, p. 1421–1427.
21. *Алексеев В. Г.* Некоторые практические рекомендации по спектральному анализу гауссовских стационарных случайных процессов. — *Проблемы передачи информации*, 1973, т. 9, в. 4, с. 42–48.
22. *Алексеев В. Г.* О вычислении спектров стационарных случайных процессов по выборкам большого объема. — *Проблемы передачи информации*, 1980, т. 16, в. 1, с. 42–49.
23. *Алексеев В. Г.* О вычислении спектральных плотностей случайных процессов по выборкам большого объема. — В сб.: *Вычислительная и прикладная математика*. Киев: Вища школа, 1981, в. 44, с. 32–40.
24. *Алексеев В. Г.* К вопросу о построении сверхразрешающих спектральных оценок. — *Автоматрия*, 1986, № 1, с. 3–7.
25. *Алексеев В. Г.* О некоторых важнейших свойствах периодограмм старших порядков. — *Теория вероятн. и ее примен.*, 1995, т. 40, в. 3, с. 481–494.

Поступила в редакцию
30.X.1992

© 1996 г.

БОРИСОВ И. С., ШАДРИН А. В.*

НЕКОТОРЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ К НЕРАВЕНСТВУ Ш. С. ЭБРАЛИДЗЕ¹⁾

Получены в известном смысле неувлучшаемые интегральные неравенства для разности квантильных преобразований двух произвольных функций распределения на прямой. Обобщается и усиливается соответствующий результат Ш. С. Эбралидзе.

*Институт математики им. С. Л. Соболева, Университетский пр., 4, 630090 Новосибирск, Россия.

¹⁾Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант № 93-01-01416, и МНФ, грант № J39100.