Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Е. Е. Дьяконова, Близкие к критическим ветвящиеся процессы с миграцией, *Теория вероятн. и ее примен.*, 1996, том 41, выпуск 1, 186–192

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp2792>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.234.156.22

26 апреля 2023 г., 15:12:49

5. Чибисов Д. М. О критериях согласия, основанных на выборочных промежуточных. — Теория вероятн. и ее примен., 1961, т. 6, в. 3, с. 354–358.
6. Pyke R. Spacings revisited. — In: Proceedings of the Sixth Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability. Vol. 1. Berkeley-Los Angeles: Univ. California Press, 1971, p. 417–427.
7. Кудлаев Э. М. Асимптотическая нормальность статистик некоторых классов критериев согласия и однородности. — Докл. АН СССР, 1978, т. 240, № 3, с. 534–537.
8. Cheng R. C. H., Stephens M. A. A goodness-of-fit test using Moran's statistics with estimated parameters. — Biometrika, 1989, v. 76, № 2, p. 385–392.
9. Хмаладзе Э. В. Некоторые применения теории мартингалов в статистике. — Успехи матем. наук, 1982, т. 37, в. 6, с. 193–212.
10. Боровиков В. П. Некоторые предельные теоремы для статистик, являющихся частичными суммами функций от спейсингов. — Теория вероятн. и ее примен., 1987, т. 32, в. 1, с. 92–104.
11. Borovikov V. P. On the theory of general spacings, Part 1. — Mitteilungen aus dem Mathem. Seminar Giessen, Sonderdruck aus Heft 215, Giessen 1994, p. 43–77.
12. Ширяев А. Н. Вероятность. М.: Наука, 1980, 575 с.

Поступила в редакцию
18.XI.1993

© 1996 г.

ДЪЯКОНОВА Е. Е.*

БЛИЗКИЕ К КРИТИЧЕСКИМ ВЕТВЯЩИЕСЯ ПРОЦЕССЫ С МИГРАЦИЕЙ¹⁾

В предлагаемой работе изучается ветвящийся процесс Гальтона–Ватсона с однородными по времени и не зависящими от состояния процесса иммиграцией и эмиграцией. Показано, что при некоторых условиях, наложенных на распределение числа мигрирующих частиц и распределение числа потомков, специальным образом нормированное стационарное распределение этого процесса сходится при $t \nearrow 1$ к равномерному распределению на отрезке $[0, 1]$. Здесь t — среднее значение числа потомков одной частицы в следующем поколении.

Ключевые слова и фразы: ветвящийся процесс Гальтона–Ватсона, докритический процесс, переходные явления, предельное распределение.

1. Введение. Описание модели. Рассмотрим следующий процесс Гальтона–Ватсона с миграцией. Предположим, что заданы два независимых семейства целочисленных случайных величин $\xi_k^{(n)}$, η_n , $k = 0, 1, 2, \dots$, $n = 0, 1, \dots$. Пусть случайные величины η_n , $n = 0, 1, \dots$, одинаково распределены и

$$P\{\eta_n = i\} = p_i, \quad i = 0, 1, \dots, \quad P\{\eta_n = -j\} = q_j, \quad j = 1, \dots, T, \\ \sum_{i=0}^{\infty} p_i + \sum_{j=1}^T q_j = 1, \quad (1)$$

*Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, ул. Вавилова, 42, Москва ГСП-1 117966, Россия.

¹⁾Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 93-0111443.

и пусть величины $\xi_k^{(n)}$ ($k = 0, 1, \dots, n = 0, 1, \dots$) тоже одинаково распределены, неотрицательны и имеют производящую функцию $f(z) = \mathbb{E}z\xi_k^{(n)}$.

Определим случайный процесс $\{Z_n\}$, $n = 0, 1, \dots$, следующими равенствами:

$$Z_0 = 0, \quad Z_{n+1} = \begin{cases} \xi_1^{(n)} + \dots + \xi_{Z_n + \eta_n}^{(n)}, & Z_n + \eta_n > 0, \\ 0, & Z_n + \eta_n \leq 0. \end{cases}$$

Введенный таким образом процесс $\{Z_n\}$, $n = 0, 1, \dots$, описывает поведение популяции частиц, которая эволюционирует следующим образом. Размножение живущих в момент времени $n = 0, 1, \dots$ частиц происходит независимо друг от друга, от момента времени и от состояния процесса, причем число потомков каждой частицы задается производящей функцией $f(z)$, т.е. размножение частиц описывается обычным процессом Гальтона–Ватсона. Кроме того, в каждый момент времени n в процессе происходит иммиграция или эмиграция. А именно, в популяцию частиц, живущую в момент времени n , либо с вероятностью p_i , $i = 0, 1, \dots$, иммигрируют i частиц, либо с вероятностью q_j , $j = 1, \dots, T$, из популяции эмигрируют $\min\{j, Z_n\}$ частиц из числа Z_n присутствующих в процессе в момент времени n . Здесь T — некоторая фиксированная константа. Отметим, что в данной модели миграция в каждом поколении происходит «раньше», чем размножение, и число эмигрирующих частиц ограничено.

Таким образом, процесс $\{Z_n\}$ является ветвящимся процессом Гальтона–Ватсона с однородной миграцией, и $\xi_k^{(n)}$ можно интерпретировать как число потомков в $(n+1)$ -м поколении k -й частицы, живущей в n -м поколении, η_n — как число мигрирующих частиц в n -й момент времени, Z_n — как число частиц в n -м поколении.

Предельное поведение критического процесса Гальтона–Ватсона с однородной миграцией было изучено в статье [1]. Исследование моделей ветвящихся процессов, близких к описанной, проведено в [2]–[5]. Однако все эти работы рассматривали ветвящиеся процессы с миграцией в предположении, что среднее значение m числа потомков одной частицы в следующем поколении фиксировано. Цель предлагаемой статьи — изучить поведение ветвящихся миграционных процессов, близких к критическому, т.е. при $m \rightarrow 1$.

2. Формулировка основного результата. Определим класс $K = \{f(z)\}$ производящих функций следующим образом. Существует некоторая функция $\gamma(z) = o(z^2)$ при $z \rightarrow 0$ такая, что все функции $f(z)$ из класса K удовлетворяют следующим условиям:

$$f(1-z) = 1 - mz + Cz^2 + \alpha(z), \quad (2)$$

$$f(0) > l^* > 0, \quad (3)$$

где $l^* = \text{const}$, $|\alpha(z)| \leq \gamma(z)$, $0 < c_1 < m < 1$, $C \leq C_2$, $c_1 = \text{const}$, $C_2 = \text{const}$. Всюду в дальнейшем мы будем предполагать, что производящая функция $f(z)$ числа потомков принадлежит этому классу K . Таким образом, мы будем рассматривать докритические ветвящиеся процессы с миграцией, близкие к критическому. Будем также предполагать, что распределение мигрирующих частиц имеет нулевое среднее значение и конечную дисперсию:

$$\sum_{k=1}^{\infty} kp_k - \sum_{j=1}^T q_j j = 0, \quad (4)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^2 p_k < \infty. \quad (5)$$

Из условий (1), (4), (5) следует, что функция $g(z) = P(z) + Q(z)$, где $P(z) = \sum_{i=0}^{\infty} p_i z^i$, $Q(z) = \sum_{j=1}^T q_j z^{-j}$, может быть записана в виде

$$g(z) = 1 + L(1-z)^2 + o((1-z)^2), \quad L > 0. \quad (6)$$

Несложно проверить, что $E(Z_{n+1} | Z_n = i) = im$ при $i \geq T$. Тогда, согласно критерию Фостера [3], процесс $\{Z_n\}$ имеет стационарное распределение. Введем случайную величину $\nu = \nu(m)$, распределение которой совпадает со стационарным распределением процесса $\{Z_n\}$. В дальнейшем там, где это не вызывает недоразумений, будем писать ν, Z_n, π_i вместо $\nu(m), Z_n(m), \pi_i(m)$ и т.д.

Основным результатом настоящей работы является следующая предельная теорема.

Теорема. Если выполнены условия (2)–(5), то при $m \nearrow 1$

$$P\left\{\frac{\log \nu}{\log(1/(1-m))} \leq x\right\} \rightarrow x, \quad x \in [0, 1].$$

З а м е ч а н и е. Как показано в [6], аналогичный результат имеет место и для процесса Гальтона-Ватсона с иммиграцией в состоянии 0 при некоторых ограничениях на распределения иммигрирующих частиц и числа потомков.

Д о к а з а т е л ь с т в о т е о р е м ы. Получим сначала уравнение для производящей функции случайной величины ν . Стационарные вероятности $\{\pi_i\}_{i=0}^{\infty}$ процесса $\{Z_n\}$ удовлетворяют уравнению

$$\pi_j = \sum_{i=0}^{\infty} \pi_i p_{ij}, \quad (7)$$

где p_{ij} — вероятность перехода марковской цепи $\{Z_n\}$ из состояния i в состояние j . Положим

$$\Pi(z) = Ez^{\nu} = \sum_{i=0}^{\infty} \pi_i z^i.$$

Используя соотношение

$$\sum_{j=0}^{\infty} p_{ij} z^j = \sum_{k=0}^{\infty} p_k f^{(i+k)}(z) + \sum_{l=1}^T q_l f^{(i-l)} \vee 0(z),$$

где $a \vee b$ обозначает $\max\{a, b\}$, из уравнения (7) несложно получить, что

$$\Pi(z) = \Pi(f(z))g(f(z)) + \sum_{i=0}^T \pi_i \sum_{l=i+1}^T q_l \left(1 - \frac{1}{f^{l-i}(z)}\right). \quad (8)$$

Рассмотрим теперь последовательность итераций $f_1(z) = f(z), \dots, f_{n+1}(z) = f(f_n(z))$. Применяя к (8) процесс итерирования, находим, что

$$\Pi(z) = \prod_{k=1}^{\infty} g(f_k(z)) + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i=0}^T \pi_i \sum_{l=i+1}^T q_l \left(1 - \frac{1}{f_k^{l-i}(z)}\right) \prod_{n=1}^{k-1} g(f_n(z)). \quad (9)$$

В силу равенства $\pi_0 = \Pi(0)$ из (9) получаем соотношение

$$\pi_0 = \prod_{k=1}^{\infty} g(f_k(0)) + \sum_{i=0}^T \pi_i \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=i+1}^T q_l \left(1 - \frac{1}{f_k^{l-i}(0)}\right) \prod_{n=1}^{k-1} g(f_n(0)), \quad (10)$$

где подразумевается, что $\pi_i = \pi_i(m)$, $i = 0, 1, \dots$. Как показано в работе [1], для критического процесса $Z_n = Z_n(1)$ выполняется следующее соотношение:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P \left\{ \frac{\log Z_n}{\log n} \leq x \right\} = x, \quad x \in [0, 1]. \quad (11)$$

Так как при $m \nearrow 1$ $\pi_0(m) \rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} P \{Z_n(1) = 0\}$, то из (11) следует, что $\pi_0(m) \rightarrow 0$ при $m \nearrow 1$. Поскольку $0 < \prod_{k=1}^{\infty} g(f_k(0)) < \infty$ равномерно по $f(z) \in K$, то из (10) получаем, что

$$1 \underset{m \nearrow 1}{\sim} \sum_{i=0}^T \pi_i \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=i+1}^T q_l \left(\frac{1}{f_k^{l-i}(0)} - 1 \right) \prod_{n=k}^{\infty} g^{-1}(f_n(0)), \quad (12)$$

где $g^{-1}(f_n(0))$ обозначает $(g(f_n(0)))^{-1}$. В дальнейшем мы будем использовать выражение (9), записанное в виде

$$\Pi(z) = \prod_{k=1}^{\infty} g(f_k(z)) \left(1 - \sum_{i=0}^T \pi_i \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=i+1}^T q_l \left(\frac{1}{f_k^{l-i}(z)} - 1 \right) \prod_{n=k}^{\infty} g^{-1}(f_n(z)) \right). \quad (13)$$

Нам понадобится ряд вспомогательных утверждений.

Лемма 1. *Существует такая левая окрестность единицы $U_1 = (1 - \text{const}, 1]$, что при $m \in U_1$ для любого $1 > \varepsilon > 0$ найдется такое натуральное число $k_0 = k_0(\varepsilon)$, что $1 - f_{k_0}(0) < \varepsilon$ равномерно по $f \in K$ (при этом $m \in U_1$).*

Д о к а з а т е л ь с т в о. При всех m , достаточно близких к 1, $l^* + m - 1 > d$ для некоторой константы $d > 0$. Так как

$$1 - f(z) = m(1 - z) - b(z)(1 - z)^2, \quad (14)$$

то из условия (3) следует, что $b(z) > d$ равномерно по всему классу K для m , достаточно близких к 1. Таким образом, из (14) мы получаем, что

$$1 - f(z) \leq m(1 - z) - d(1 - z)^2 \leq (1 - z) \left(1 - d(1 - z) \right). \quad (15)$$

Из (15) имеем, что при $0 < \delta < 1 - z$ выполняется следующее неравенство: $1 - f(z) < (1 - z)(1 - d\delta)$, т.е.

$$1 - f_n(z) \leq (1 - d\delta)^n, \quad (16)$$

где $0 < d < 1$, $0 < \delta < 1$, $\delta < 1 - z$. Откуда и следует утверждение леммы.

Лемма 2. *Для любого $c_1^2 > \varepsilon > 0$ найдется такое $\delta = \delta(\varepsilon)$, $1 > \delta > 0$, что для всех $z \in U_\delta(1) = (1 - \delta, 1]$*

$$y^-(u) \doteq \frac{mu}{1 + (b + \varepsilon)u} \leq 1 - f(z) \leq \frac{mu}{1 + (b - \varepsilon/c_1)u} \doteq y^+(u), \quad (17)$$

где $u = 1 - z$, $b = f''(1)/2$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как $b - \varepsilon > 0$ при $c_1^2 > \varepsilon > 0$, то из условия (2) следует, что

$$mu - (b + \varepsilon)u^2 + \beta^+(u) \leq mu - bu^2 + \alpha(u^2) = 1 - f(z) \leq mu - (b - \varepsilon)u^2 + \beta^-(u),$$

где

$$\begin{aligned} \beta^+(u) &= \frac{mu}{1 + (b + \varepsilon)u/m} - mu + (b + \varepsilon)u^2, \\ \beta^-(u) &= \frac{mu}{1 + (b - \varepsilon)u/m} - mu + (b - \varepsilon)u^2, \end{aligned}$$

u — достаточно близко к 0. Лемма доказана.

З а м е ч а н и е. Пусть $f^+(z) = 1 - y^-(1 - z)$, $f^-(z) = 1 - y^+(1 - z)$, где $y^-(u)$, $y^+(u)$ — из выражения (17). Тогда

$$f^-(z) \leq f(z) \leq f^+(z) \quad (18)$$

при z , достаточно близких к 1, и неравенства сохраняются и для итераций, т.е.

$$f_n^-(z) \leq f_n(z) \leq f_n^+(z). \quad (19)$$

Здесь функции $f^-(z)$, $f^+(z)$ уже дробно-линейны.

Лемма 3. Для

$$f(z) = 1 - \frac{mu}{1 + bu} \quad (20)$$

(где $u = 1 - z$) выполняются следующие соотношения:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(1 - f_k^{l-i}(z))}{f_k^{l-i}(z)} \underset{m \nearrow 1}{\sim} \sum_{k=1}^{\infty} (1 - f_k(z)) (l-i) \underset{m \nearrow 1}{\sim} \frac{(l-i)}{b} \ln \frac{1}{1-m} \quad (21)$$

при $z = \text{const}$,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(1 - f_k^{l-i}(1 - (1-m)^x))}{f_k^{l-i}(1 - (1-m)^x)} \underset{m \nearrow 1}{\sim} \sum_{k=1}^{\infty} (1 - f_k(1 - (1-m)^x)) (l-i) \\ \underset{m \nearrow 1}{\sim} \frac{(l-i)}{b} (1-x) \ln \frac{1}{1-m}, \end{aligned} \quad (22)$$

где $x \in [0, 1]$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. В случае (20) итерации $f_k(z)$ легко находятся в явном виде: $1 - f_k(z) = m^k u / [1 + bu(1 - m^k)/(1 - m)]$. Рассмотрим

$$\sum_{k=N}^{\infty} (1 - f_k(z)) = \int_N^{\infty} \frac{m^x u dx}{c - h m^x u} + \theta, \quad (23)$$

где $0 \leq \theta \leq 1$, $c = 1 + bu/(1 - m)$, $h = bu/(1 - m)$, $N = \text{const} \geq 1$. (Равенство (23) выполняется в силу монотонного убывания $1 - f_k(z)$ по k .) Обозначим

$$A(u) = \frac{(1-m)}{b \ln(1/m)} \ln \left(1 + \frac{m^N u b}{(1-m)(1 + bu(1 - m^N)/(1 - m))} \right).$$

Так как

$$\int_N^{\infty} \frac{m^x u dx}{c - h m^x u} = A(u) \quad (24)$$

и при $u = \text{const}$

$$A(u) \underset{m \nearrow 1}{\sim} \frac{1}{b} \ln \frac{1}{1-m}, \quad (25)$$

а

$$A((1-m)^x) \underset{m \nearrow 1}{\sim} \frac{1}{b} (1-x) \ln \frac{1}{1-m}, \quad (26)$$

то из (24) — (26) следуют правые эквивалентности в (21), (22). Несложно показать, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(1 - f_k^{l-i}(z))}{f_k^{l-i}(z)} \underset{m \nearrow 1}{\sim} \sum_{k=1}^{\infty} (1 - f_k(z)) (l-i), \quad (27)$$

откуда и следует утверждение леммы.

Лемма 4. При $f \in K$ имеют место следующие оценки:

$$B(z) \equiv \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{f''(0)}{2} \right) \left(\frac{1 - f_k^{l-i}(z)}{f_k^{l-i}(z)} \right) m \nearrow 1 (l-i) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{f''(0)}{2} (1 - f_k(z)) \\ m \nearrow 1 (l-i) \ln \frac{1}{1-m} \quad (28)$$

при $z = \text{const}$,

$$B(z) m \nearrow 1 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{f''(0)}{2} (1 - f_k(z)) (l-i) m \nearrow 1 (l-i) (1-x) \ln \frac{1}{1-m} \quad (29)$$

при $z = 1 - (1-m)^x$.

Доказательство. Пусть $z = \text{const}$, $\delta = \delta(\varepsilon)$, где $\delta(\varepsilon)$ — из леммы 2, $k_1 = k_0(\delta)$, где $k_0(\varepsilon)$ — из леммы 1, $z^* = f_{k_1}(z)$. Тогда

$$\sum_{k=1}^{\infty} (1 - f_k^+(z^*)) \leq \sum_{k=1}^{\infty} (1 - f_k(z)) \leq k_1 + \sum_{k=1}^{\infty} (1 - f_k^-(z^*)). \quad (30)$$

Заметим, что при m , достаточно близком к 1, оценка (30) сохраняется и для $z = 1 - (1-m)^x$, где в этом случае $k_1 = 0$, $z^* = z$. Из оценки (30) в силу леммы 3 и произвольности ε следуют правые эквивалентности в выражениях (28), (29). Поскольку $\sum_{k=1}^{\infty} (1 - f_k(z)) \rightarrow \infty$ при $m \rightarrow 1$ для $z = \text{const}$ или $z = 1 - (1-m)^x$, и по лемме 1 $f_k(z) \nearrow 1$ при $k \rightarrow \infty$ равномерно по $f \in K$, то эквивалентность (27) сохраняется и в случае $f \in K$. Лемма доказана.

Лемма 5. При $z = \text{const}$ или $z = 1 - (1-m)^x$, и при $f(z) \in K$

$$D(z) \equiv \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1 - f_k^{l-i}(z)}{f_k^{l-i}(z)} \right) \frac{f''(0)}{2} \prod_{n=k}^{\infty} g^{-1}(f_n(z)) \\ m \nearrow 1 \frac{f''(0)}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1 - f_k^{l-i}(z)}{f_k^{l-i}(z)} \right). \quad (31)$$

Доказательство. Из соотношения (1) и леммы 1 следует, что при $z \nearrow 1$ $\prod_{n=k}^{\infty} g^{-1}(f_n(z))$ сходится к 1 равномерно по $f \in K$. Откуда, учитывая, что в силу леммы 4 $B(z) \rightarrow \infty$ при $z = \text{const}$ или $z = 1 - (1-m)^x$, получаем утверждение леммы.

Для доказательства теоремы осталось заметить, что из (10) в силу лемм 1-5 следует соотношение

$$\sum_{i=0}^T \pi_i \sum_{l=i+1}^T q_l (l-i) m \nearrow 1 \left(\sum_{k=1}^{\infty} (1 - f_k(0)) \prod_{n=k}^{\infty} g^{-1}(f_n(0)) \right)^{-1} \\ m \nearrow 1 \left(\sum_{k=1}^{\infty} (1 - f_k(0)) \right)^{-1}. \quad (32)$$

Так как $\lim_{z \rightarrow 1} \prod_{k=1}^{\infty} g(f_k(z)) = 1$, то из (13), (32), лемм 5 и 4 получаем, что

$$\lim_{m \nearrow 1} \prod (1 - (1-m)^x) = 1 - (1-x) = x, \quad x \in [0, 1]. \quad (33)$$

Из (33) следует (см. [7]) утверждение теоремы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Нагаев С. В., Хан Л. В. Предельные теоремы для критического ветвящегося процесса Гальтона–Ватсона с миграцией. — Теория вероятн. и ее примен., 1980, т. XXV, в. 3, с. 523–534.
2. Yanev G. P., Yanev N. M. On a new model of branching migration processes. — C. R. Acad. Bulg. Sci., v. 44, № 3, p. 19–22.
3. Foster F. G. On the stochastic matrices associated with certain queueing processes. — Ann. Math. Statist., 1953, v. 24, p. 355–360.
4. Зубков А. М. Периоды жизни ветвящегося процесса с иммиграцией. — Теория вероятн. и ее примен., 1972, т. XVII, в. 1, с. 179–188.
5. Ватутин В. А. Критический ветвящийся процесс Гальтона–Ватсона с эмиграцией. — Теория вероятн. и ее примен., 1977, т. XXII, в. 3, с. 482–497.
6. Дьяконова Е. Е. О процессе Гальтона–Ватсона с иммиграцией. — В сб.: Проблемы устойчивости стохастических моделей. М.: Институт системных исследований, 1991, с. 49–52.
7. Дьяконова Е. Е., Соловьев А. Д. Однолинейная система с групповым обслуживанием в условиях высокой нагрузки. — Изв. АН СССР, сер. техн. кибернет., 1986, № 6, с. 35–39.

Поступила в редакцию
28.X.1993

© 1996 г.

ЕГОРОВ В. А.*

ЗАВИСИМОСТЬ СКОРОСТИ РОСТА МАРТИНГАЛА ОТ СКОРОСТИ РОСТА МАРТИНГАЛ-РАЗНОСТЕЙ¹⁾

Пусть S_n — мартингал, $A_n > 0$ — предсказуемая последовательность. В работе строятся такие последовательности A_n , для которых условия $\max_{i \leq n} (S_i - S_{i-1}) = o(A_n)$ п.н. и $S_n = o(A_n)$ п.н. равносильны.

Ключевые слова и фразы: мартингал, закон повторного логарифма, момент остановки, обобщенная лемма Бореля–Кантелли, скорость роста, усиленный закон больших чисел.

Известно, что большая часть предельных теорем теории вероятностей, справедливых для сумм независимых случайных величин, имеют свои аналоги для мартингалов и других типов зависимых случайных величин. При этом в случае мартингалов нормирующие последовательности обычно уже не являются детерминированными, а представляют собой последовательности положительных предсказуемых случайных величин. Сказанное относится и к исследованиям скорости роста мартингалов с точки зрения сходимости к вероятности единица. Так аналоги теорем Хартмана–Винтнера и А. Н. Колмогорова о законе повторного логарифма для мартингалов доказаны Стаутом [5], [6], соответствующие аналоги для функционального закона повторного логарифма получены Басу [9], Филиппом и Стаутом [7] и в работе автора

*С.-Петербургский государственный электротехнический ун-т, кафедра высшей математики, ул. проф. Попова, 5, 197022 С.-Петербург, Россия.

¹⁾Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант 93-011-1459.