Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. А. Егоров, Зависимость скорости роста мартингала от скорости роста мартингал-разностей, *Теория вероятн. и ее примен.*, 1996, том 41, выпуск 1, 192–199

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp2793>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.91.87.62

26 апреля 2023 г., 12:59:03

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Нагаев С. В., Хан Л. В. Предельные теоремы для критического ветвящегося процесса Гальтона–Ватсона с миграцией. — Теория вероятн. и ее примен., 1980, т. XXV, в. 3, с. 523–534.
2. Yanev G. P., Yanev N. M. On a new model of branching migration processes. — C. R. Acad. Bulg. Sci., v. 44, № 3, p. 19–22.
3. Foster F. G. On the stochastic matrices associated with certain queueing processes. — Ann. Math. Statist., 1953, v. 24, p. 355–360.
4. Зубков А. М. Периоды жизни ветвящегося процесса с иммиграцией. — Теория вероятн. и ее примен., 1972, т. XVII, в. 1, с. 179–188.
5. Ватутин В. А. Критический ветвящийся процесс Гальтона–Ватсона с эмиграцией. — Теория вероятн. и ее примен., 1977, т. XXII, в. 3, с. 482–497.
6. Дьяконова Е. Е. О процессе Гальтона–Ватсона с иммиграцией. — В сб.: Проблемы устойчивости стохастических моделей. М.: Институт системных исследований, 1991, с. 49–52.
7. Дьяконова Е. Е., Соловьев А. Д. Однолинейная система с групповым обслуживанием в условиях высокой нагрузки. — Изв. АН СССР, сер. техн. кибернет., 1986, № 6, с. 35–39.

Поступила в редакцию
28.X.1993

© 1996 г.

ЕГОРОВ В. А.*

ЗАВИСИМОСТЬ СКОРОСТИ РОСТА МАРТИНГАЛА ОТ СКОРОСТИ РОСТА МАРТИНГАЛ-РАЗНОСТЕЙ¹⁾

Пусть S_n — мартингал, $A_n > 0$ — предсказуемая последовательность. В работе строятся такие последовательности A_n , для которых условия $\max_{i \leq n} (S_i - S_{i-1}) = o(A_n)$ п.н. и $S_n = o(A_n)$ п.н. равносильны.

Ключевые слова и фразы: мартингал, закон повторного логарифма, момент остановки, обобщенная лемма Бореля–Кантелли, скорость роста, усиленный закон больших чисел.

Известно, что большая часть предельных теорем теории вероятностей, справедливых для сумм независимых случайных величин, имеют свои аналоги для мартингалов и других типов зависимых случайных величин. При этом в случае мартингалов нормирующие последовательности обычно уже не являются детерминированными, а представляют собой последовательности положительных предсказуемых случайных величин. Сказанное относится и к исследованиям скорости роста мартингалов с точки зрения сходимости к вероятности единица. Так аналоги теорем Хартмана–Винтнера и А. Н. Колмогорова о законе повторного логарифма для мартингалов доказаны Стаутом [5], [6], соответствующие аналоги для функционального закона повторного логарифма получены Басу [9], Филиппом и Стаутом [7] и в работе автора

*С.-Петербургский государственный электротехнический ун-т, кафедра высшей математики, ул. проф. Попова, 5, 197022 С.-Петербург, Россия.

¹⁾Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант 93-011-1459.

[8]. Исследования скорости роста мартингала при более грубых, чем в законе повторного логарифма, нормировках можно найти в работах Фридмана [10] и Фернхольза и Тайшера [11]. Подробная библиография по результатам типа закона повторного логарифма, в том числе и для мартингалов, опубликована Бингхемом [12].

В предлагаемой работе исследуется скорость роста мартингалов, при этом предсказуемая нормирующая последовательность выбирается таким образом, что бесконечная малость относительно нее мартингал-разностей влечет за собой бесконечную малость относительно нее самого мартингала. Эта работа обобщает на мартингалы соответствующие результаты работы автора [1], относящиеся к суммам независимых случайных величин.

Пусть $g(x)$ — четная непрерывная функция, положительная и строго возрастающая в области $x > 0$, причем $g(x) \rightarrow \infty$ при $x \rightarrow \infty$. Будем предполагать, что $x/g(x)$ и $g(x)/x^2$ не возрастают в области $x > 0$. Примером функции такого рода может служить функция $g(x) = |x|^p$, $1 \leq p \leq 2$. Введем также класс F_c таких положительных функций $f(x)$, что $f(x)$ не убывает в области $x > x_0$ для некоторого $x_0 > 0$, $f(2x)/f(x) \leq A$ для всех $x > x_0$ и некоторой положительной постоянной A и интеграл $\int_{x_0}^{\infty} dx/(x(f(x))^k)$ сходится для некоторого положительного целого k .

Теорема. Пусть $(S_n, \mathcal{F}_n, n \geq 1)$ — мартингал, $X_n = S_n - S_{n-1}$, $n = 1, 2, \dots$, — соответствующая последовательность мартингал-разностей, $g(x)$ — описанная выше функция, F_c — описанный выше класс функций. Предположим, что выполнены условия

$$Eg(X_n) < \infty, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (1)$$

$$B_n = \sum_{j=1}^n E(g(X_j) | \mathcal{F}_{j-1}) \rightarrow \infty \quad \text{п.н.} \quad (n \rightarrow \infty). \quad (2)$$

Тогда если $f \in F_c$, то из условий

$$\sum_{n=1}^{\infty} P\{|X_n| > \epsilon g^{-1}(B_n f(B_n)) | \mathcal{F}_{n-1}\} < \infty \quad \text{п.н.} \quad (3)$$

для любого $\epsilon > 0$ вытекает соотношение

$$S_n = o(g^{-1}(B_n f(B_n))) \quad \text{п.н.} \quad (4)$$

Отметим сначала, что условие (3) является необходимым и достаточным для (4). Это достигается за счет выбора достаточно грубой нормировки, которая примерно в $(\ln B_n)^\epsilon$ (при произвольном $\epsilon > 0$) хуже оптимальных нормировок в усиленном законе больших чисел и в законе повторного логарифма. Действительно, при $f(x) = (\ln x)^\epsilon$, $\epsilon > 0$, и $g(x) = |x|$ получаем, что при выполнении условия (3)

$$S_n = o(B_n (\ln B_n)^\epsilon) \quad \text{п.н.} \quad \text{при} \quad B_n = \sum_{j=1}^n E(|X_j| | \mathcal{F}_{j-1}),$$

а при $g(x) = x^2$

$$S_n = o(\sqrt{B_n (\ln B_n)^\epsilon}) \quad \text{п.н.} \quad \text{при} \quad B_n = \sum_{j=1}^n E(X_j^2 | \mathcal{F}_{j-1}).$$

Отметим также, что для сумм независимых случайных величин (см. [13]) и для мартингалов без предположения (3) известны приведенные выше две оценки с заменой ϵ на $1 + \epsilon$. Конечно, условие (3) в этом случае выполняется автоматически.

С помощью сформулированной теоремы можно легко обобщить и распространить на мартингалы большую часть результатов В. В. Петрова, приведенных в [13, гл. 4, § 4]. Приведем в качестве следствия нашей теоремы одно из таких обобщений.

Следствие. Пусть $(S_n, \mathcal{F}_n, n \geq 1)$ — мартингал и $E|X_n|^p < \infty$ для всех n и некоторого $p, 1 \leq p \leq 2$. Пусть

$$B_n = \sum_{j=1}^n E(|X_j|^p | \mathcal{F}_{j-1}) \rightarrow \infty \quad \text{п.н.}$$

Тогда если для некоторого $\varepsilon > 0$

$$X_n = o(B_n^{1/p} (\ln B_n)^\varepsilon) \quad \text{п.н.,}$$

то

$$S_n = o(B_n^{1/p} (\ln B_n)^\varepsilon) \quad \text{п.н.}$$

Прежде чем приступить к доказательству теоремы, сформулируем в виде лемм требуемые для ссылок известные факты.

Лемма 1. 1. (Обобщенная лемма Бореля–Кантелли). Число осуществлений событий B_n п.н. конечно или бесконечно в зависимости от того, конечна или бесконечна п.н. сумма ряда условных вероятностей $\sum_n P(B_n | \mathcal{F}_{n-1})$, где $\mathcal{F}_n$ есть σ -алгебра, индуцированная событиями $B_1, B_2, \dots, B_n$.

2. Если $(S_n, \mathcal{F}_n, n \geq 1)$ — мартингал и $E|S_n|^p < \infty$ для любого n , где $p > 1$, то

$$\sup_{m \geq 0} E \left(\max_{n \leq m} |S_n|^p \right) \leq q^p \sup_{n \geq 0} E|S_n|^p, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Доказательство первого из двух утверждений леммы 1 можно найти в [2], а второго — в [3].

Лемма 2. Пусть $(Z_j, j \geq 1)$ — последовательность положительных чисел,

$$R_{n,k} = \sum_{J_{n,k}} Z_{j_1} Z_{j_2} \cdots Z_{j_k},$$

где множество индексов $J_{n,k}$ определено равенством

$$J_{n,k} = \{(j_1, j_2, \dots, j_k): 1 \leq j_1 < j_2 < \cdots < j_k \leq n\}.$$

Тогда для любых целых положительных n и k и при любом положительном A , если $Z_j \leq A, j \leq n$, и $R_{n,k} \leq A^k$, то

$$\sum_{j=1}^n Z_j \leq (2k-1)A.$$

Доказательство этой леммы можно найти в работе [4].

Доказательство теоремы. Положим $b_n = g^{-1}(B_n f(B_n))$. Определим $\bar{X}_n = X_n$, если $|X_n| < b_n$, и $\bar{X}_n = 0$, если $|X_n| \geq b_n$; $Y_n = \bar{X}_n - E(\bar{X}_n | \mathcal{F}_{n-1})$. Используя определение функции $g(x)$, имеем

$$\begin{aligned} |E(\bar{X}_n | \mathcal{F}_{n-1})| &= |E((X_n; |X_n| \geq b_n) | \mathcal{F}_{n-1})| \leq E(|X_n|; |X_n| > b_n | \mathcal{F}_{n-1}) \\ &\leq \frac{b_n}{g(b_n)} E(g(X_n) | \mathcal{F}_{n-1}) = \frac{b_n E(g(X_n) | \mathcal{F}_{n-1})}{B_n f(B_n)} \\ &\leq \frac{b_n}{f(B_n)} = o(b_n) \quad \text{п.н.} \end{aligned}$$

Из этого неравенства, условия (3) теоремы и обобщенной леммы Бореля-Кантелли (п. 1 леммы 1) вытекают равенства

$$X_n = o(b_n) \text{ п.н.}, \quad Y_n = o(b_n) \text{ п.н.} \quad (5)$$

Определим возрастающую последовательность моментов остановки n_p равенствами

$$n_p = \min(n: B_{n+1} > 2B_{n_{p-1}+1}), \quad p > 0, \quad n_0 = 0. \quad (6)$$

Поскольку $B_n \rightarrow \infty$ п.н., последовательность n_p определена корректно и $n_p \rightarrow \infty$ при $p \rightarrow \infty$.

Далее, из (6) получим соотношения

$$\frac{B_{n_p}}{B_{n_{p-1}+1}} \leq 2, \quad B_{n_p} > 2^{p-1}, \quad \frac{B_{n_{p+1}}}{B_{n_{p-1}+1}} > 2. \quad (7)$$

Отметим также нужные в дальнейшем неравенства

$$\frac{b_{n_p}}{b_{n_{p-1}+1}} \leq 2A, \quad \frac{b_{n_{p+1}}}{b_{n_{p-1}+1}} \geq \sqrt{2}, \quad (8)$$

где A — постоянная из определения функции f . Действительно, поскольку из определения функции g следует, что $\sqrt{x}/\sqrt{y} \leq g^{-1}(x)/g^{-1}(y) \leq x/y$ для $x > y$, то, учитывая (7), получим

$$\begin{aligned} \frac{b_{n_p}}{b_{n_{p-1}+1}} &= \frac{g^{-1}(B_{n_p} f(B_{n_p}))}{g^{-1}(B_{n_{p-1}+1} f(B_{n_{p-1}+1}))} \leq \frac{2f(B_{n_p})}{f(B_{n_{p-1}+1})} \leq \frac{2f(2B_{n_{p-1}+1})}{f(B_{n_{p-1}+1})} \leq 2A, \\ \frac{b_{n_{p+1}}}{b_{n_{p-1}+1}} &\geq \left(2 \frac{f(B_{n_{p+1}})}{f(B_{n_{p-1}+1})}\right)^{1/2} \geq 2^{1/2}. \end{aligned}$$

Поскольку $n_p \uparrow \infty$ п.н., с вероятностью единица для каждого n можно выбрать такой случайный индекс $p = p(n)$, что выполняются неравенства $n_{p-1} < n \leq n_p$. Поэтому, используя определение функции g и неравенства (7), (8), получим

$$\begin{aligned} \frac{1}{b_n} \left| \sum_{j=1}^n \mathbb{E}(X_j; |X_j| < b_j) \mid \mathcal{F}_{j-1} \right| &\leq \frac{1}{b_{n_{p-1}+1}} \sum_{j=1}^{n_p} \mathbb{E}(|X_j|; |X_j| > b_j) \mid \mathcal{F}_{j-1} \\ &\leq \frac{1}{b_{n_{p-1}+1}} \sum_{i=1}^p \sum_{j=n_{i-1}+1}^{n_i} \mathbb{E}(|X_j|; |X_j| > b_{n_{i-1}+1}) \mid \mathcal{F}_{j-1} \\ &\leq \frac{1}{b_{n_{p-1}+1}} \sum_{i=1}^p \sum_{j=n_{i-1}+1}^{n_i} \frac{b_{n_{i-1}+1}}{g(b_{n_{i-1}+1})} \mathbb{E}(g(X_j) \mid \mathcal{F}_{j-1}) \\ &\leq \frac{1}{b_{n_{p-1}+1}} \sum_{i=1}^p \frac{b_{n_{i-1}+1} B_{n_i}}{B_{n_{i-1}+1} f(B_{n_{i-1}+1})} \leq 2 \sum_{i=1}^p \frac{b_{n_{i-1}+1}}{b_{n_{i-1}+1} f(B_{n_{i-1}+1})} \\ &\leq 2 \sum_{i=1}^p 2^{(i-p)/2} \frac{1}{f(B_{n_{i-1}+1})} \rightarrow 0 \text{ п.н.} \quad (n \rightarrow \infty). \end{aligned} \quad (9)$$

Последнее предельное соотношение в (9) имеет место в силу очевидного соотношения $p \rightarrow \infty$ п.н. при $n \rightarrow \infty$ и леммы Тёплица. Используя (9), находим, что

$$\left| \sum_{j=1}^n \mathbb{E}(\bar{X}_j \mid \mathcal{F}_{j-1}) \right| = o(b_n) \text{ п.н.} \quad (10)$$

Из соотношений (5) следует, что при всех достаточно больших n выполняется равенство $X_n = \bar{X}_n$. Поэтому, учитывая соотношение (10), получим, что для доказательства теоремы нам достаточно доказать соотношение

$$\hat{S}_n \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{j=1}^n Y_j = o(b_n) \quad \text{п.н.} \quad (11)$$

Используя введенную в (6) последовательность n_p и выбирая, как и выше, для каждого n индекс $p = p(n)$ таким образом, чтобы выполнялись неравенства $n_{p-1} < n \leq n_p$, положим для $k \geq 1$

$$U_{n,k} = \sum_{n_{p-1} < j_1 < \dots < j_k \leq n} Y_{j_1} Y_{j_2} \dots Y_{j_k} = \sum_{j=n_{p-1}+k}^n Y_j U_{j-1,k-1}, \quad U_{n,0} = 1.$$

Тогда, используя полиномиальное разложение, получим

$$(S_n - S_{n_{p-1}})^k = (k! U_{n,k} + V_{n,k}), \quad (12)$$

где k взято из определения функции f , $V_{n,k}$ — сумма тех членов разложения, которые содержат хотя бы один множитель вида Y_i^r при $r \geq 2$.

Сначала докажем соотношение

$$\max_{n_{p-1} < n \leq n_p} |U_{n,k}| = o(b_{n_{p-1}+1}^k) \quad \text{п.н.} \quad (13)$$

Для этого на множестве, определяемом равенством $n_{p-1} = l$, для $n > l$ и для фиксированного $N > l$ рассмотрим мартингал

$$U'_{n,k} = \begin{cases} U_{n,k} & \text{для } n \leq n_p \wedge N, \\ U_{n_p \wedge N, k} & \text{для } n > n_p \wedge N. \end{cases}$$

Используя оценки леммы 1 (п. 2) при $p = 2$ и вводя обозначение $E_p X = E(X | \mathcal{F}_{n_{p-1}})$, получим неравенства

$$E_p \left(\max_n (U'_{n,k})^2 \right) \leq 4 \max_n E_p (U'_{n,k})^2 \leq 4 E_p \left(\sum_{j=n_{p-1}+1}^{n_p \wedge N} Y_j^2 U_{j-1,k-1}^2 \right). \quad (14)$$

Далее, положив $\hat{B}_n = \sum_{j=1}^n \sigma_j^2 = \sum_{j=1}^n E(Y_j^2 | \mathcal{F}_{j-1})$, выводим

$$\begin{aligned} \hat{B}_{n_p} &= \sum_{j=1}^{n_p} \sigma_j^2 \leq \sum_{j=1}^{n_p} E(\bar{X}_j^2 | \mathcal{F}_{j-1}) \leq \sum_{i=1}^p \sum_{j=n_{i-1}+1}^{n_i} E((X_j^2; |X_j| < b_{n_i}) | \mathcal{F}_{j-1}) \\ &\leq \sum_{i=1}^p \sum_{j=n_{i-1}+1}^{n_i} E((X_j^2; |X_j| < 2A b_{n_{i-1}+1}) | \mathcal{F}_{j-1}) \\ &\leq 4A^2 \sum_{i=1}^p \sum_{j=n_{i-1}+1}^{n_i} \frac{b_{n_{i-1}+1}^2}{g(b_{n_{i-1}+1})} E(g(X_j) | \mathcal{F}_{j-1}) \\ &\leq 4A^2 \frac{b_{n_{p-1}+1}^2}{g(b_{n_{p-1}+1})} B_{n_p} \leq 8A^2 \frac{b_{n_{p-1}+1}^2}{f(B_{n_{p-1}+1})}. \end{aligned} \quad (15)$$

Рассмотрим на множестве $n_{p-1} = l$ мартингал

$$L_n = \sum_{j=n_{p-1}+1}^n (Y_j^2 - \sigma_j^2) U_{j-1, k-1},$$

$$n \leq n_p \wedge N; \quad L_n = L_{n_p \wedge N}, \quad n > n_p \wedge N,$$

где $\sigma_j^2 = E(Y_j^2 | \mathcal{F}_{j-1})$. Используя теорему Дуба о произвольном выборе (см. [3]), находим

$$E_p(L_{n \wedge N}) = 0. \quad (16)$$

С помощью соотношений (14), (16), (15), (7), (8) получим неравенства

$$\begin{aligned} E_p \left(\max_{n_{p-1} < n \leq n_p \wedge N} U_{n, k}^2 \right) &= E_p \left(\max_n (U'_{n, k})^2 \right) \leq 4 E_p \left(\sum_{j=n_{p-1}+k}^{n_p \wedge N} \sigma_j^2 U_{j-1, k-1}^2 \right) \\ &\leq 4 E_p \left(\hat{B}_{n_p} \max_{n_{p-1}+k < j \leq n_p \wedge N} U_{j-1, k-1}^2 \right) \\ &\leq 32 A^2 \frac{b_{n_{p-1}+1}^2}{f(B_{n_{p-1}+1})} E_p \left(\max_{n_{p-1}+k < j \leq n_p \wedge N} U_{j-1, k-1}^2 \right) \\ &\leq 32 A^2 \frac{b_{n_{p-1}+1}^2}{f(B_{n_{p-1}+1})} E_p \left(\max_{n_{p-1} < n \leq n_p \wedge N} U_{n, k-1}^2 \right). \end{aligned}$$

Переходя в этом неравенстве к пределу при $N \rightarrow \infty$ и итерируя его k раз, придем к соотношению

$$E_p \left(\max_{n_{p-1} < n \leq n_p} U_{n, k}^2 \right) \leq C \frac{b_{n_{p-1}+1}^2}{(f(B_{n_{p-1}+1}))^k}, \quad (17)$$

где в качестве постоянной C можно взять $(32A^2)^k$. Из неравенства (17) вытекает соотношение

$$\begin{aligned} \sum_p \frac{1}{(b_{n_{p-1}+1})^{2k}} E_p \left(\max_{n_{p-1} < n \leq n_p} U_{n, k}^2 \right) &\leq C \sum_p \frac{1}{(f(B_{n_{p-1}+1}))^k} \\ &\leq C \sum_p \frac{1}{f^k(2^{p-1})} < \infty. \end{aligned} \quad (18)$$

Последнее неравенство в (18) непосредственно следует из определения функции f . Действительно,

$$\sum_{p=p_0}^{\infty} \frac{1}{f^k(2^p)} = \frac{1}{\ln 2} \sum_{p=p_0}^{\infty} \frac{1}{f^k(2^p)} \int_{2^{p-1}}^{2^p} \frac{dx}{x} \leq \frac{1}{\ln 2} \int_{2^{p_0-1}}^{\infty} \frac{dx}{x(f(x))^k} < \infty,$$

где p_0 выбрано так, чтобы выполнялось неравенство $2^{p_0-1} > x_0$.

Из неравенств (18) и неравенства Чебышева имеем для любого $\varepsilon > 0$

$$\sum_p P \left\{ \left(\max_{n_{p-1} < n \leq n_p} |U_{n, k}| > \varepsilon b_{n_{p-1}+1}^k \right) \middle| \mathcal{F}_{n_{p-1}} \right\} < \infty \text{ п.н.} \quad (19)$$

Из (19) и обобщенной леммы Бореля–Кантелли (см. лемму 1) следует соотношение (13).

Далее, положим для $n_{p-1} < n \leq n_p$, $k \geq 1$

$$G_{n,k} = \sum_{n_{p-1} < j_1 < \dots < j_k \leq n} Y_{j_1}^2 Y_{j_2}^2 \dots Y_{j_k}^2 = \sum_{j=n_{p-1}+k}^n Y_j^2 G_{j-1,k-1}, \quad G_{n,0} = 1.$$

Аналогично тому, как мы получили оценки (14)–(16), для $G_{n,k}$, используя соотношения (16), (15), (7) и (8), имеем:

$$\begin{aligned} E_p(G_{n_p,k}) &\leq E_p \left(\sum_{j=n_{p-1}+1}^{n_p} \sigma_j^2 G_{j-1,k-1} \right) \leq 32A^2 \frac{b_{n_{p-1}+1}^2}{f(B_{n_{p-1}+1})} E_p(G_{n_p,k-1}) < \dots \\ &\leq C \frac{b_{n_{p-1}+1}^{2k}}{(f(B_{n_{p-1}+1}))^k}. \end{aligned}$$

Поэтому, учитывая неравенства (7), (8), получим неравенства

$$\sum_p \frac{1}{b_{n_{p-1}+1}^{2k}} E_p(G_{n_p,k}) \leq C \sum_p \frac{1}{f^k(2^{p-1})} < \infty \quad \text{п.н.,}$$

из которых с помощью неравенства Чебышева выводим для любого $\varepsilon > 0$ соотношение

$$\sum_p P\{(G_{n_p,k} > \varepsilon b_{n_{p-1}+1}^{2k}) \mid \mathcal{F}_{n_{p-1}}\} < \infty \quad \text{п.н.,}$$

которое с учетом обобщенной леммы Бореля–Кантелли влечет за собой равенство

$$\max_{n_{p-1} < n \leq n_p} G_{n,k} = o(b_{n_{p-1}+1}^{2k}) \quad \text{п.н.} \quad (20)$$

Из соотношений (5), (20) и леммы 2 имеем

$$\sum_{j=n_{p-1}+1}^{n_p} Y_j^2 = o(b_{n_{p-1}+1}^2) \quad \text{п.н.} \quad (21)$$

Легко видеть, что величина $V_{n,k}$ из представления (12), являясь симметрической функцией порядка k , есть линейная комбинация с числом членов и коэффициентами, зависящими только от k , элементарных симметрических функций вида

$$\prod_{i=1}^t \left(\sum_{j=n_{p-1}+1}^n Y_j^{h_i} \right), \quad (22)$$

где $1 \leq t < k$, $1 \leq h_i \leq k$, $\sum_{i=1}^t h_i = k$, причем в силу определения $V_{n,k}$ не все h_i в (22) равны единице.

Далее, учитывая соотношение (21), получим для $h \geq 2$

$$\left| \sum_{j=n_{p-1}+1}^n Y_j^h \right| \leq \left(\sum_{j=n_{p-1}+1}^n Y_j^2 \right)^{h/2} = o(b_{n_{p-1}+1}^h) \quad \text{п.н.} \quad (23)$$

Из соотношений (12), (13), (23) и приведенных выше рассуждений о представлении $V_{n,k}$ через элементарные симметрические функции следует, что с вероятностью единицы справедливо равенство

$$\left(\frac{\widehat{S}_n - \widehat{S}_{n_{p-1}}}{b_{n_{p-1}+1}} \right)^k = \sum_{h=2}^{k-1} \left(\frac{\widehat{S}_n - \widehat{S}_{n_{p-1}}}{b_{n_{p-1}+1}} \right)^{k-h} \cdot o(1) + o(1), \quad n_{p-1} < n \leq n_p,$$

откуда следует соотношение

$$\max_{n_{p-1} < n \leq n_p} (\hat{S}_n - \hat{S}_{n_{p-1}}) = o(b_{n_{p-1}+1}) \quad \text{п.н.} \quad (24)$$

Далее, выбирая, как и ранее, для данного n индекс $p = p(n)$, исходя из условия $n_{p-1} < n \leq n_p$, имеем, учитывая неравенство (8),

$$\begin{aligned} \frac{|\hat{S}_n|}{b_n} &\leq \sum_{j=1}^p \max_{n_{j-1} < n \leq n_j} \frac{|\hat{S}_n - \hat{S}_{n_{j-1}}|}{b_{n_{p-1}+1}} \leq \sum_{j=1}^p \max_{n_{j-1} < n \leq n_j} \frac{|\hat{S}_n - \hat{S}_{n_{j-1}}|}{b_{n_{j-1}+1}} \frac{b_{n_{j-1}+1}}{b_{n_{p-1}+1}} \\ &\leq C \sum_{j=1}^p \max_{n_{j-1} < n \leq n_j} \frac{|\hat{S}_n - \hat{S}_{n_{j-1}}|}{b_{n_{j-1}+1}} 2^{(j-p)/2}. \end{aligned}$$

Правая часть этого неравенства сходится к нулю при $n \rightarrow \infty$ (и, следовательно, $p = p(n) \rightarrow \infty$) в силу леммы Тёплица. Поэтому справедливо соотношение (11). Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Егоров В. А. Несколько теорем об усиленном законе больших чисел и законе повторного логарифма. — Теория вероятн. и ее примен., 1972, т. 17, в. 1, с. 84–98.
2. Лозе М. Теория вероятностей. М.: ИЛ, 1962, 719 с.
3. Гизман И. И., Скороход А. А. Стохастические дифференциальные уравнения и их приложения. Киев: Наукова думка, 1982, 611 с.
4. Егоров В. А. Об усиленном законе больших чисел и законе повторного логарифма для последовательности независимых случайных величин. — Теория вероятн. и ее примен., 1970, т. 15, в. 3, с. 520–526.
5. Stout W. F. The Hartman–Wintner law of the iterated logarithm for martingales. — Ann. Math. Statist., 1970, v. 41, № 6, p. 2158–2160.
6. Stout W. F. A martingale analogue of Kolmogorov's law of the iterated logarithm. — Z. Wahrscheinlichkeitstheor. verw. Geb., 1970, B. 15, H. 4, S. 279–290.
7. Philipp W., Stout W. F. Invariance principle for martingales. — Math. Z., 1986, B. 192, H. 2, S. 253–264.
8. Егоров В. А. Об усиленном законе больших чисел и законе повторного логарифма для мартингалов и сумм независимых случайных величин. — Теория вероятн. и ее примен., 1990, т. 35, в. 4, с. 691–704.
9. Basu A. K. A note on Strassen's version of the law of the iterated logarithm. — Proc. Amer. Math. Soc., 1973, v. 41, p. 596–601.
10. Freedman D. A. On tail probabilities for martingales. — Ann. Probab., 1975, v. 3, № 1, p. 100–118.
11. Fernholz L. T., Teicher H. Stability of random variables and iterated logarithm laws for martingales and quadratic forms. — Ann. Probab., 1980, v. 8, № 4, p. 765–774.
12. Bingham N. H. Variants of the law of the iterated logarithm. — Bull. London Math. Soc., 1986, v. 18, № 5, p. 433–467.
13. Петров В. В. Предельные теоремы для сумм независимых случайных величин. М.: Наука, 1987, 317 с.

Поступила в редакцию
2.XI.1993