Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

О. К. Закусило, Критерий существования локального времени в нуле для одного класса процессов хранения, *Теория вероятн. и ее примен.*, 1996, том 41, выпуск 1, 200–203

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp2794>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.93.64.190

26 апреля 2023 г., 14:15:26

© 1996 г.

ЗАКУСИЛО О. К.*

КРИТЕРИЙ СУЩЕСТВОВАНИЯ ЛОКАЛЬНОГО ВРЕМЕНИ В НУЛЕ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА ПРОЦЕССОВ ХРАНЕНИЯ

В данной заметке завершены исследования, проведенные в работах [1]–[3] при изучении условий существования локального времени в нуле $L(t)$ для процесса хранения запасов $x(t)$, являющегося решением уравнения (1) с характеристиками (2). Кроме того, указана структура множества нулей E .

Ключевые слова и фразы: процесс хранения запасов, локальное время, входной процесс, мера Леви.

Пусть $x(t) \geq 0$ есть процесс хранения запасов, являющийся решением уравнения

$$dx(t) = -r(x(t)) dt + dz(t), \quad (1)$$

в котором $z(t)$ — неубывающий непрерывный справа однородный процесс с независимыми приращениями и с преобразованием Лапласа

$$E \exp \left\{ -sz(t) \right\} = \exp \left\{ -t \int_0^\infty (1 - e^{-su}) \nu(du) \right\},$$

а $r(x)$ — неубывающая и непрерывная на $(0, \infty)$ функция, $r(x) > 0$ при $x > 0$, $r(0) = 0$.

Процесс $z(t)$ называют *входным*, а $r(x)$ — *функцией выпуска*.

В настоящей заметке мы завершаем исследования, проведенные в работах [1]–[3] при изучении условий существования локального времени в нуле $L(t)$ для процессов (1) с характеристиками

$$\nu(dx) = Ax^{-1-\alpha} dx, \quad 0 < \alpha < 1, \quad r(x) = x^\beta, \quad \beta > 0. \quad (2)$$

Кроме того, мы указываем структуру множества нулей $E = \{t > 0: x(t) = 0\}$ при различных значениях α, β и A .

Наиболее полное утверждение о существовании $L(t)$ для процессов (1) с характеристиками (2) содержится в работе [3]:

- а) если $\alpha + \beta < 1$, то $L(t)$ существует;
- б) если $\alpha + \beta > 1$, то $L(t)$ не существует;
- в) если $\alpha + \beta = 1$, то $L(t)$ существует при $A < A_0 = A_0(\alpha)$ и не существует при $A > A_0$; при этом $A_0 \in (0, \infty)$.

При исследовании общих процессов (1) с бесконечными мерами Леви ν Цинлар [4] показал, что при $x(0) = 0$ почти наверное справедливо одно из трех утверждений:

г) замыкание E не содержит интервалов, E не содержит изолированных точек, лебегова мера E положительна, $L(t)$ лишь множителем отличается от времени пребывания в нуле;

д) E имеет ту же структуру, что и в г), но лебегова мера E равна нулю, а $L(t)$ не совпадает (с точностью до множителя) со временем пребывания в нуле;

е) $E = \emptyset$, $L(t)$ не существует.

Мы найдем значение A_0 , покажем, что при $A = A_0$ локальное время в нуле $L(t)$ не существует и установим, что все гипотетические возможности г)–е) могут быть реализованы процессами хранения с характеристиками (2).

*Киевский национальный университет им. Т. Г. Шевченко, ул. Владимирская, 64, 252017 Киев, Украина.

Введем необходимые обозначения:

$$\tau(y) = \inf \{t > 0: x(t) = y\}, \quad \varphi(s, x, y) = E_x e^{-s\tau(y)},$$

E_x — символ математического ожидания случайной величины, связанной с процессом $x(t)$, для которого $x(0) = x$.

Теорема 1. Для процесса хранения (1) со степенной функцией выпуска $r(x) = x^{1-\alpha}$ и со строго устойчивым входным процессом с мерой Леви $\nu(du) = Au^{-1-\alpha}du$ локальное время в нуле существует при $A < A_0 = \alpha \sin(\alpha\pi)/\pi$ и не существует при $A \geq A_0$.

Доказательство. I. Пусть $A \geq A_0$. В этом случае можно почти дословно повторить рассуждения статьи [2], проведенные для процессов хранения с

$$\nu(du) = \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} u^{-1-\alpha} du.$$

Введем $F(x) = 1 - \varphi(s, x, 0)$. Из результатов работы [4] следует, что $F(x)$ — непрерывная справа функция распределения, удовлетворяющая на интервале $(0, \infty)$ уравнению

$$F'(x) - sx^{-1+\alpha}(1 - F(x)) = \frac{A}{\alpha} x^{-1+\alpha} \int_x^\infty (u-x)^{-\alpha} dF(u).$$

Интегрируя его по интервалу $(0, \infty)$, меняя порядок интегрирования в правой части и проводя замену $x = uz$, получаем

$$\begin{aligned} 1 - F(0) - s \int_0^\infty x^{-1+\alpha}(1 - F(x)) dx &= \frac{A}{\alpha} \int_0^\infty \int_0^1 z^{-1+\alpha}(1-z)^{-\alpha} dz dF(u) \\ &= \frac{CA}{\alpha} (1 - F(0)), \end{aligned}$$

где

$$C = \int_0^1 z^{-1+\alpha}(1-z)^{-\alpha} dz = \frac{\pi}{\sin \pi\alpha}.$$

Значит,

$$s \int_0^\infty x^{-1+\alpha}(1 - F(x)) dx = (1 - F(0)) \left(1 - \frac{CA}{\alpha}\right).$$

Простой анализ знаков частей последнего равенства показывает, что при $A \geq A_0$ оно возможно лишь в случае $F(0) = 1$. Но тогда $F(x) = 1$ при всех $x \geq 0$, $\varphi(s, x, 0) = 0$ при $x > 0$, $P_x\{\tau(0) = \infty\} = 1$ при $x > 0$.

Последнее равенство с учетом утверждения (2.31) работы [4] позволяет утверждать, что в рассматриваемой ситуации $L(t)$ не существует.

II. Пусть $A < A_0$. Для проверки существования $L(t)$ в силу утверждения (2.31) работы [4] нужно установить, что $\varphi(s, x, 0) > 0$ для некоторых $s > 0$, $x > 0$. Для этого, в свою очередь, достаточно убедиться в существовании функции $h(x)$, удовлетворяющей условиям

$$\infty > h(x) > 0, \quad h(x) \geq s + \int_0^\infty (1 - H(x, x+v)) \nu(dv), \quad (3)$$

где

$$H(y, x) = \exp \left\{ - \int_y^x h(u) \frac{du}{r(u)} \right\} > 0 \quad \text{при } x > y.$$

(Как показано в работе [3], $\varphi(s, x, 0) \geq H(0, x)$, что и даст требуемое условие $\varphi(s, x, 0) > 0$.)

Покажем, что функция $h(x) = 1 + x^{-\varepsilon}$ удовлетворяет условиям (3) при

$$\frac{\alpha}{2} \leq \varepsilon < \alpha, \quad \frac{A}{\alpha} B(1 - \alpha, \varepsilon) < 1, \quad 0 < s \leq 1 - \frac{A}{\alpha} B(1 - \alpha, \varepsilon), \quad (4)$$

где $B(a, b) = \int_0^1 x^{a-1} (1-x)^{b-1} dx$ есть бета-функция.

С учетом условия (2) имеем:

$$\begin{aligned} s + \int_0^\infty (1 - H(x, x+v)) \nu(dv) &= s + \int_0^\infty \frac{H(0, x) - H(0, x+v)}{H(0, x)} \nu(dv) \\ &= s + \frac{A}{H(0, x)} \int_0^\infty \int_x^{x+v} H'_z(0, z) dz v^{-1-\alpha} dv \\ &= s + \frac{A}{\alpha H(0, x)} \int_x^\infty (z-x)^{-\alpha} H'_z(0, z) dz \\ &= s + \frac{A}{\alpha} \int_x^\infty (z-x)^{-\alpha} \exp \left\{ - \int_x^z (1+u^{-\varepsilon}) u^{\alpha-1} du \right\} (1+z^{-\varepsilon}) z^{\alpha-1} dz \\ &= s + \frac{A}{\alpha} \int_1^\infty (v-1)^{-\alpha} \exp \left\{ - \int_x^{vx} (1+u^{-\varepsilon}) u^{\alpha-1} du \right\} (1+(vx)^{-\varepsilon}) v^{\alpha-1} dv \\ &= s + \frac{A}{\alpha} (1+x^{-\varepsilon}) \int_1^\infty (v-1)^{-\alpha} v^{\alpha-1-\varepsilon} Q(x, v) dv, \end{aligned} \quad (5)$$

где

$$Q(x, v) = \exp \left\{ - \int_x^{vx} (1+u^{-\varepsilon}) u^{\alpha-1} du \right\} \frac{1+(vx)^{-\varepsilon}}{1+x^{-\varepsilon}} v^\varepsilon.$$

Если $0 < \alpha/2 \leq \varepsilon < \alpha < 1$ и $v \geq 1$, то

$$\begin{aligned} \ln Q(x, v) &= - \int_x^{vx} \left[(1+u^{-\varepsilon}) u^{\alpha-1} - \frac{\varepsilon u^{\varepsilon-1}}{u^\varepsilon + 1} \right] du \\ &= - \int_x^{vx} \frac{2+u^\varepsilon + u^{-\varepsilon} - \varepsilon u^{\varepsilon-\alpha}}{u^\varepsilon + 1} u^{\alpha-1} du \leq 0 \end{aligned}$$

и $Q(x, v) \leq 1$.

Поэтому из равенства (5) с учетом условий (4) следует условие (3):

$$\begin{aligned} s + \int_0^\infty (1 - H(x, x+v)) \nu(dv) &\leq s + \frac{A}{\alpha} (1+x^{-\varepsilon}) \int_1^\infty (v-1)^{-\alpha} v^{\alpha-1-\varepsilon} dv \\ &= s + \frac{A}{\alpha} (1+x^{-\varepsilon}) \int_0^1 (1-z)^{-\alpha} z^{\varepsilon-1} dz = s + \frac{A}{\alpha} B(\varepsilon, 1-\alpha) (1+x^{-\varepsilon}) \\ &\leq 1 + x^{-\varepsilon} = h(x). \end{aligned}$$

В свою очередь, ввиду непрерывности бета-функции,

$$B(1-\alpha, \varepsilon) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow \alpha} B(1-\alpha, \alpha) = \frac{\pi}{\sin \pi \alpha},$$

и условия (4) можно удовлетворить, если $A < A_0 = \alpha \sin(\pi \alpha) / \pi$.

Этого достаточно для завершения доказательства.

Перейдем теперь к выяснению структуры множества нулей E и локального времени в нуле $L(t)$.

Теорема 2. Если процесс транения имеет характеристики (2), то при $\alpha + \beta < 1$ множество E и локальное время $L(t)$ имеет структуру, указанную в пункте г), а при $\alpha + \beta = 1$ и $A < A_0$ — структуру, указанную в пункте д).

Доказательство. Зафиксируем $s > 0$ и обозначим $\varphi(x) = \varphi(s, x, 0)$. Цинлар [4] показал, что ситуация, указанная в пункте г), наблюдается при условиях $\nu(0, \infty) = \infty$ и $\int_0^\infty (1 - \varphi(x)) \nu(dx) < \infty$. Если же $\nu(0, \infty) = \infty$ и $\int_0^\infty (1 - \varphi(x)) \nu(dx) = \infty$, то E и $L(t)$ обладают свойствами, указанными в пункте д).

Пусть $\alpha + \beta < 1$. Из лемм 3 и 4 работы [3] вытекает, что для достаточно больших значений K функция $h(x) = K$ удовлетворяет неравенству (3) и

$$\varphi(x) \geq \exp \left\{ -\frac{K}{1-\beta} x^{1-\beta} \right\}.$$

Поэтому

$$\int_0^\infty (1 - \varphi(x)) \nu(dx) \leq A \int_0^\infty \left(1 - \exp \left\{ -\frac{K}{1-\beta} x^{1-\beta} \right\} \right) x^{-1-\alpha} dx < \infty.$$

Пусть теперь $\alpha + \beta = 1$, $A < A_0$. Теорема 1 утверждает, что в этом случае $L(t)$ существует и, следовательно, $E \neq \emptyset$. С учетом результатов работы [4] отсюда вытекает, что $\varphi(0) = 1$, $\varphi(x) > 0$ при $x > 0$. Это, в свою очередь, обеспечивает справедливость оценки, указанной в работе [3] для функции $g(x) = -(1/r(x)) d \ln \varphi(x)/dx$:

$$g(x) > C x^{-A(1-\varepsilon)/(\alpha\varepsilon)} \quad (6)$$

при достаточно малых C , x и ε .

Далее, лемма 2 работы [3] утверждает, что

$$g(x) = s + \int_0^\infty (1 - \varphi(s, x+v, x)) \nu(dv). \quad (7)$$

В этой же работе показано, что в наших условиях $\varphi(s, x+v, x)$ не убывает по x . Поэтому из непрерывности $\varphi(s, x+v, x)$ по x при $x \in [0, \infty)$, равенства (7), теоремы о монотонной сходимости и оценки (6) следует:

$$\int_0^\infty (1 - \varphi(v)) \nu(dv) = \lim_{x \downarrow 0} \int_0^\infty (1 - \varphi(s, x+v, x)) \nu(dx) = \lim_{x \downarrow 0} (g(x) - s) = \infty.$$

Вместе с равенством $\nu(0, \infty) = \infty$ это обеспечивает выполнение условий Цинлара, при которых справедливо утверждение пункта д).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Brockwell P. J., Chung K. L. Emptiness times of a dam with stable input and a general release rule. — J. Appl. Probab., 1975, v. 12, № 1, p. 212–217.
2. Brockwell P. J. Stationary distributions for dams with additive input and content-dependent release rule. — Adv. Appl. Probab., 1977, v. 9, № 3, p. 645–663.
3. Закусило О. К. Еще раз о локальном поведении процессов хранения с устойчивым входом. — Теория вероятн. и ее примен., 1990, т. 35, в. 2, с. 349–352.
4. Çinlar E. A local time for a storage process. — Ann. Probab., 1975, v. 3, № 6, p. 930–951.

Поступила в редакцию
4.XI.1993