Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Г. Н. Мильштейн, Применение численного интегрирования стохастических уравнений для решения краевых задач с граничными условиями Неймана, *Теория вероятн. и ее примен.*, 1996, том 41, выпуск 1, 210–218

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp2797>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.197.130.99

26 апреля 2023 г., 15:29:23

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Лидл Р., Нидеррайтер Г. Конечные поля. Т. 1. М.: Мир, 1988, 430 с.
2. Гончаров В. Л. Из области комбинаторики. — Изв. АН СССР, сер. матем., 1944, т. 8, № 1, с. 3–48.
3. Колчин В. Ф. Случайные отображения. М.: Наука, 1984, 206 с.
4. Odizko A. M. Discrete logarithms in finite fields and there cryptographic significance. — Proceedings of EUROCRYPT 1984. Berlin: Springer-Verlag, 1984, p. 225–314.
5. Arratia R., Barbour A., Tavaré S. On random polynomials over finite fields. — Math. Proc. Cambridge Philos. Soc., 1993, v. 114, p. 347–368.

Поступила в редакцию
7.XII.1995

© 1996 г.

МИЛЬШТЕЙН Г. Н.*

**ПРИМЕНЕНИЕ ЧИСЛЕННОГО ИНТЕГРИРОВАНИЯ
СТОХАСТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ
ДЛЯ РЕШЕНИЯ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ
С ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ НЕЙМАНА**

В статье приводится ряд методов построения марковской цепи с отражением такой, что математическое ожидание определенного функционала от траекторий цепи близко к решению задачи Неймана для уравнений параболического типа. Эта марковская цепь слабо аппроксимирует решение системы стохастических дифференциальных уравнений, являющейся характеристической для задачи Неймана. Для рассмотренных методов получены теоремы сходимости с указанием порядка точности относительно шага аппроксимации.

Ключевые слова и фразы: численное интегрирование стохастических дифференциальных уравнений, слабая аппроксимация решений стохастических дифференциальных уравнений, одношаговый порядок точности метода, порядок сходимости метода, методы Монте-Карло решения задач математической физики.

1. Пусть G — ограниченная область в $\mathbf{R}^n$, $Q = G \times [T_0, T_1]$ — цилиндр в $\mathbf{R}^{n+1}$. Рассмотрим уравнение параболического типа

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n a^{ij}(t, x) \frac{\partial^2 u}{\partial x^i \partial x^j} + \sum_{i=1}^n b^i(t, x) \frac{\partial u}{\partial x^i} \\ + c(t, x) u + g(t, x) = 0, \quad (t, x) \in Q, \end{aligned} \quad (1.1)$$

с начальным условием

$$u(t_1, x) = \varphi(x) \quad (1.2)$$

и граничным условием Неймана

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} + \bar{c}(t, x) u = \bar{g}(t, x), \quad T_0 \leq t \leq T_1, \quad x \in \partial G, \quad (1.3)$$

*Уральский государственный ун-т, пр. Ленина, 51, 620081 Екатеринбург, Россия.

где ν — направление внутренней нормали к поверхности ∂G в точке $x \in \partial G$.

Предполагается, что коэффициенты $a^{ij} = a^{ji}$ удовлетворяют условию строгой эллиптичности в $\bar{Q}$. Будем предполагать также, что достаточно гладкими являются поверхность ∂G и коэффициенты рассматриваемой задачи.

В дальнейшем нам понадобится существование классического решения задачи (1.1)–(1.3) [1], обладающего непрерывными в $\bar{Q}$ вторыми по t , x^i и третьими по x^i производными. Такое решение существует в случае, например, однородной краевой задачи ($\bar{g}(t, x) \equiv 0$), если $g = 0$ во внутренней части некоторой окрестности поверхности множества $\partial G \times [T_0, T_1]$, а $\varphi = 0$ во внутренней части некоторой окрестности поверхности ∂G .

Вероятностное представление решения задачи (1.1)–(1.3) имеет вид [2]–[4]

$$u(t, x) = E \left[\varphi \left(X_{t,x}(T_1) \right) Y_{t,x,1}(T_1) + Z_{t,x,1,0}(T_1) \right], \quad (1.4)$$

где $X_{t,x}(s)$, $Y_{t,x,y}(s)$, $Z_{t,x,y,z}(s)$, $s \geq t$, — решение задачи Коши для системы стохастических дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} dX &= b(s, X) I_G(X) ds + \sigma(s, X) I_G(X) dw(s) \\ &\quad + \nu(X) I_{\partial G}(X) d\mu(s), \quad X(t) = x, \\ dY &= c(s, X) I_G(X) Y ds + \bar{c}(s, X) I_{\partial G}(X) Y d\mu(s), \quad Y(t) = y, \\ dZ &= g(s, X) I_G(X) Y ds + \bar{g}(s, X) I_{\partial G}(X) Y d\mu(s), \quad Z(t) = z, \\ T_0 &\leq t \leq T_1, \quad t \leq s \leq T_1, \quad x \in \bar{G}. \end{aligned} \quad (1.5)$$

В (1.5) $w(s) = (w^1(s), \dots, w^n(s))^T$ есть стандартный винеровский процесс, $b(s, x)$ есть n -мерный вектор-столбец, составленный из коэффициентов $b^i(s, x)$, $(n \times n)$ -матрица $\sigma(s, x)$ получается из представления

$$\sigma(s, x) \sigma^T(s, x) = a(s, x), \quad a(s, x) = \{a^{ij}(s, x)\}, \quad i, j = 1 \div n,$$

$\mu(s)$ — локальное время процесса X на ∂G — это скалярный возрастающий процесс, который растет, лишь когда $X(s) \in \partial G$, $I_A(x)$ — индикатор множества A .

Для задачи (1.1)–(1.3) марковская цепь (t_k, X_k, Y_k, Z_k) , слабо аппроксимирующая решение системы (1.5), заканчивается благодаря отражению на верхнем основании цилиндра $\bar{Q}$. Будем ее строить таким образом, чтобы, как и при решении первой краевой задачи [5], на каждом шаге условное математическое ожидание разности

$$d = u(t_{k+1}, X_{k+1}) Y_{k+1} + Z_{k+1} - u(t_k, X_k) Y_k - Z_k \quad (1.6)$$

при известных X_k, Y_k, Z_k (все t_k для определенности считаем детерминированными) было малым.

Пусть $r > 0$ есть некоторое достаточно малое число. Если расстояние $\rho(X_k, \partial G)$ от точки X_k до ∂G больше r , то точка (t_{k+1}, X_{k+1}) строится по точке (t_k, X_k) с помощью одного из методов для решения первой краевой задачи [5], имеющего одношаговый порядок точности $O(r^4)$.

Пусть теперь точка X_k — приграничная, т.е. $\rho(X_k, \partial G) \leq r$. Будем считать, что $t_k \leq T_1 - r^2$. В противном случае цепь заканчиваем в точке $(t_{k+1}, X_{k+1}, Y_{k+1}, Z_{k+1}) = (T_1, X_k, Y_k, Z_k)$. Ошибка на последнем шаге в таком случае будет равна $O(r^2)$.

Для точки (t_k, X_k, Y_k, Z_k) введем для удобства обозначение (t_0, x_0, y_0, z_0) , $t_0 \leq T_1 - r^2$, $\rho(x_0, \partial G) \leq r$. Наша ближайшая цель — построить точку $t_1 = t_0 + r^2 =$

$t_0 + h, X_1, Y_1, Z_1$ так, чтобы математическое ожидание Ed разности (1.6) имело порядок $O(r^3)$.

Пусть $\bar{x}_0$ — проекция x_0 на ∂G . Обозначим $r_0 = \rho(x_0, \partial G) = \rho(x_0, \bar{x}_0)$, $r_0 \leq r$. В окрестности точки x_0 перейдем к новой ортогональной системе координат таким образом, чтобы ее начало совпало с x_0 , а один из координатных векторов (для определенности первый) совпал с $\nu(x_0)$. Координаты вектора $x - x_0$ в новой системе обозначим $\chi = (\chi^1, \dots, \chi^n)^T$. Такое преобразование переменных имеет вид

$$\chi = Q(x - x_0), \quad x = x_0 + Q^T \chi, \quad (1.7)$$

где $Q = \{q_{ij}\}$ есть ортогональная матрица.

Точка x_0 в новых переменных имеет нулевые координаты, а точка $\bar{x}_0$ имеет координаты $(-r_0, 0, \dots, 0)$.

Уравнение (1.1) в новых переменных запишется в виде

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \alpha^{ij}(t, \chi) \frac{\partial^2 u}{\partial \chi^i \partial \chi^j} + \sum_{i=1}^n b^i(t, \chi) \frac{\partial u}{\partial \chi^i} + c(t, \chi) u + g(t, \chi) = 0, \quad (1.8)$$

а краевое условие (1.3) в виде

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} + \bar{c}(t, \chi) u = \bar{g}(t, \chi), \quad T_0 \leq t \leq T_1, \quad \chi \in \partial G. \quad (1.9)$$

В (1.8), (1.9) за функциями $u, c, g, \bar{c}, \bar{g}$, которые зависят от t, χ согласно (1.7), сохранены прежние обозначения, коэффициенты

$$\alpha^{ij} = \sum_{k,m=1}^n q_{ik} a^{km} q_{jm}$$

образуют матрицу $QAQ^T = \{\alpha^{ij}\}$, коэффициенты $\beta^i = \sum_{k=1}^n q_{ik} b^k$ образуют вектор Qb .

Выпишем два важных для дальнейшего соотношения относительно функции u в точке $\chi = 0$. Имеем (точку $(-r_0, 0, \dots, 0)$, $0 \leq r_0 < r$, будем для краткости записывать $(-r_0, 0)$):

$$\begin{aligned} u(t_0, -r_0, 0) &= u(t_0, 0, 0) + \frac{\partial u}{\partial \chi^1}(t_0, 0, 0)(-r_0) + O(r^2), \\ \frac{\partial u}{\partial \chi^1}(t_0, -r_0, 0) &= \frac{\partial u}{\partial \chi^1}(t_0, 0, 0) + \frac{\partial^2 u}{(\partial \chi^1)^2}(t_0, 0, 0)(-r_0) + O(r^2). \end{aligned}$$

Условие (1.9) в точке $(t_0, -r_0, 0)$ переписывается в виде

$$\frac{\partial u}{\partial \chi^1}(t_0, -r_0, 0) = -\bar{c}(t_0, -r_0, 0) u(t_0, -r_0, 0) + \bar{g}(t_0, -r_0, 0).$$

Из этих трех соотношений находим

$$\left(\frac{\partial u}{\partial \chi^1} \right)_0 = -\bar{c}_0(1 + \bar{c}_0 r_0) u_0 + r_0 \left(\frac{\partial^2 u}{(\partial \chi^1)^2} \right)_0 + (1 + \bar{c}_0 r_0) \bar{g}_0 + O(r^2), \quad (1.10)$$

где u_0 обозначает $u(t_0, 0, 0)$, $\bar{c}_0, \bar{g}_0$ обозначают $\bar{c}(t_0, -r_0, 0)$, $\bar{g}(t_0, -r_0, 0)$, а символ $(\cdot)_0$ означает, что соответствующая функция вычисляется в точке $(t_0, 0, 0)$.

Далее, дифференцируя (1.9) по переменным $\chi^2, \dots, \chi^n$ в точке $(t_0, -r_0, 0)$, получим

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \chi^1 \partial \chi^j}(t_0, -r_0, 0) + \frac{\partial \bar{c}}{\partial \chi^j}(t_0, -r_0, 0) u(t_0, -r_0, 0) + \bar{c}(t_0, -r_0, 0) \frac{\partial u}{\partial \chi^j}(t_0, -r_0, 0) = \frac{\partial \bar{g}}{\partial \chi^j}(t_0, -r_0, 0),$$

откуда вытекает

$$\bar{c}_0 \left(\frac{\partial u}{\partial \chi^j} \right)_0 = -\bar{c}'_{j0} u_0 - \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \chi^1 \partial \chi^j} \right)_0 + \bar{g}'_{j0} + O(r), \quad (1.11)$$

где $\bar{c}'_{j0}, \bar{g}'_{j0}$ — значения соответствующих производных в точке $(t_0, -r_0, 0)$.

2. Одношаговая аппроксимация для приграничных точек. Имея точку (t_0, x_0, y_0, z_0) , где $\rho(x_0, \partial G) \leq r$, $t_0 \leq T_1 - r^2$, будем формировать $(t_1, X_1, Y_1, Z_1) = (t_0 + r^2, x_0 + \Delta X, y_0 + \Delta Y, z_0 + \Delta Z)$ так, чтобы точка (t_1, X_1) принадлежала $\bar{Q}$, случайная величина ΔX имела порядок $O(r)$ и выполнялось равенство

$$\mathbb{E}(u(t_1, X_1) Y_1 + Z_1 - u(t_0, x_0) y_0 - z_0) = O(r^3). \quad (2.1)$$

В новых координатах это соотношение перепишется в виде

$$\mathbb{E}(u(t_1, \chi) Y_1 + Z_1 - u(t_0, 0) y_0 - z_0) = O(r^3), \quad (2.2)$$

где $\chi = Q \Delta X$.

Теорема 1. Пусть

$$t_1 = t_0 + r^2, \quad \chi^1 = \chi_0^1 + \chi_1^1, \quad \chi_0^1 = \beta_0^1 r^2, \quad (2.3)$$

$$\chi_1^1 = \left[\alpha_0^{11} r^2 + r_0^2 + 2(\beta_0^1)^2 r^2 r_0 \right]^{1/2} - r_0 - \beta_0^1 r^2, \quad (2.4)$$

$$\chi^j = \chi_0^j + \bar{c}_0 \chi_1^j + \chi_2^j, \quad \chi_0^j = \beta_0^j r^2, \quad \chi_1^j = -\alpha_0^{1j} r^2, \quad (2.5)$$

$$\chi_2^j = \sum_{m=2}^n \lambda^{jm} \nu_m r, \quad j = 2 \div n,$$

где ν_m — независимые случайные величины, принимающие значения ± 1 с вероятностью $\frac{1}{2}$, числа λ^{jm} , $j = 2 \div n$, $m = 2 \div n$, такие, что

$$\sum_{k=2}^n \lambda^{ik} \lambda^{jk} = \alpha^{ij}, \quad i, j = 2 \div n \quad (2.6)$$

(т.е. они образуют матрицу λ порядка $(n-1) \times (n-1)$, удовлетворяющую равенству $\lambda \lambda^T = \{\alpha^{ij}\}_{i,j=2 \div n}$, что в итоге дает $\mathbb{E} \chi_2^i \chi_2^j = \alpha^{ij} r^2$),

$$\Delta Y = \left(c_0 r^2 + \bar{c}_0 (1 + \bar{c}_0 r_0) \chi_1^1 + \sum_{j=2}^n \bar{c}'_{j0} \chi_1^j + \bar{c}_0^2 (\chi_1^1)^2 \right) y_0, \quad (2.7)$$

$$\Delta Z = \left(g_0 r^2 - \bar{g}_0 (1 + \bar{c}_0 r_0) \chi_1^1 - \sum_{j=2}^n \bar{g}'_{j0} \chi_1^j - \bar{c}_0 \bar{g}_0 (\chi_1^1)^2 \right) y_0. \quad (2.8)$$

Тогда выполняется соотношение (2.2) (а в старых координатах (2.1)).

Доказательство. Имеем:

$$\begin{aligned}
 d &= u(t_1, \chi) Y_1 + Z_1 - u_0 y_0 - z_0 \\
 &= \left(u_0 + \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)_0 r^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial \chi^1} \right)_0 \chi^1 + \sum_{j=2}^n \left(\frac{\partial u}{\partial \chi^j} \right)_0 \chi^j + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 u}{(\partial \chi^1)^2} \right)_0 (\chi^1)^2 \right. \\
 &\quad \left. + \sum_{j=2}^n \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \chi^1 \partial \chi^j} \right)_0 \chi^1 \chi^j + \frac{1}{2} \sum_{i,j=2}^n \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \chi^i \partial \chi^j} \right)_0 \chi^i \chi^j + O(r^3) \right) \\
 &\quad \times (y_0 + \Delta Y) + \Delta Z - u_0 y_0.
 \end{aligned} \tag{2.9}$$

Пользуясь (1.10), (1.11), (2.4), (2.5), запишем

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{\partial u}{\partial \chi^1} \right)_0 \chi^1 &= \left(\frac{\partial u}{\partial \chi^1} \right)_0 \chi_0^1 \\
 &\quad + \left[-\bar{c}_0(1 + \bar{c}_0 r_0) u_0 + r_0 \left(\frac{\partial^2 u}{(\partial \chi^1)^2} \right)_0 \right. \\
 &\quad \left. + (1 + \bar{c}_0 r_0) \bar{g}_0 \right] \chi_1^1 + O(r^3), \\
 \sum_{j=2}^n \left(\frac{\partial u}{\partial \chi^j} \right)_0 \chi^j &= \sum_{j=2}^n \left(\frac{\partial u}{\partial \chi^j} \right)_0 (\chi_0^j + \chi_2^j) + \bar{c}_0 \sum_{j=2}^n \left(\frac{\partial u}{\partial \chi^j} \right)_0 \chi_1^j \\
 &= \sum_{j=2}^n \left(\frac{\partial u}{\partial \chi^j} \right)_0 (\chi_0^j + \chi_2^j) \\
 &\quad + \sum_{j=2}^n \left(-\bar{c}'_{j0} u_0 - \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \chi^1 \partial \chi^j} \right)_0 + \bar{g}'_{j0} \right) \chi_1^j + O(r^3), \\
 \sum_{j=2}^n \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \chi^1 \partial \chi^j} \right)_0 \chi^1 \chi^j &= \sum_{j=2}^n \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \chi^1 \partial \chi^j} \right)_0 \chi_1^1 \chi_2^j + O(r^3), \\
 \frac{1}{2} \sum_{i,j=2}^n \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \chi^i \partial \chi^j} \right)_0 \chi^i \chi^j &= \frac{1}{2} \sum_{i,j=2}^n \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \chi^i \partial \chi^j} \right)_0 \chi_2^i \chi_2^j + O(r^3).
 \end{aligned}$$

Подставив эти выражения в (2.9), после элементарных преобразований получим (следует обратить внимание на то, что $2r_0 \chi_1^1 + (\chi^1)^2 = \alpha_0^{11} r^2$)

$$\begin{aligned}
 d &= \left(\left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)_0 r^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial \chi^1} \right)_0 \beta_0^1 r^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 u}{(\partial \chi^1)^2} \right)_0 \alpha_0^{11} r^2 \right. \\
 &\quad \left. + (-\bar{c}_0(1 + \bar{c}_0 r_0) u_0 + \bar{g}_0(1 + \bar{c}_0 r_0)) \chi_1^1 + \sum_{j=2}^n \left(\frac{\partial u}{\partial \chi^j} \right)_0 \beta_0^j r^2 \right. \\
 &\quad \left. + \sum_{j=2}^n \left(\frac{\partial u}{\partial \chi^j} \right)_0 \chi_2^j + \sum_{j=2}^n \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \chi^1 \partial \chi^j} \right)_0 \alpha_0^{1j} r^2 + \sum_{j=2}^n \alpha_0^{1j} (\bar{c}'_{j0} u_0 - \bar{g}'_{j0}) r^2 \right. \\
 &\quad \left. + \sum_{j=2}^n \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \chi^1 \partial \chi^j} \right)_0 \chi_1^1 \chi_2^j + \frac{1}{2} \sum_{i,j=2}^n \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \chi^i \partial \chi^j} \right)_0 \chi_2^i \chi_2^j + O(r^3) \right) y_0
 \end{aligned}$$

$$+ u_0 \Delta Y + (-\bar{c}_0 u_0 + \bar{g}_0) \chi_1^1 \Delta Y + \sum_{j=2}^n \left(\frac{\partial u}{\partial \chi^j} \right)_0 \chi_2^j \Delta Y + \Delta Z + O(r^3).$$

Далее, учитывая, что $E\chi_2^j = 0$, $j = 2 \div n$, найдем

$$\begin{aligned} Ed &= \left[\left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)_0 r^2 + \sum_{i=1}^n \beta_0^i \left(\frac{\partial u}{\partial \chi^i} \right)_0 r^2 + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \alpha_0^{ij} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \chi^i \partial \chi^j} \right)_0 r^2 \right. \\ &\quad + \left(-\bar{c}_0(1 + \bar{c}_0 r_0) \chi_1^1 + \sum_{j=2}^n \alpha_0^{1j} \bar{c}'_{j0} r^2 \right) u_0 \\ &\quad + \left. \bar{g}_0(1 + \bar{c}_0 r_0) \chi_1^1 - \sum_{j=2}^n \alpha_0^{1j} \bar{g}'_{j0} r^2 \right] y_0 \\ &\quad + u_0 \left(c_0 r^2 + \bar{c}_0(1 + \bar{c}_0 r_0) \chi_1^1 - \sum_{j=2}^n \bar{c}'_{j0} \alpha_0^{1j} r^2 + \bar{c}_0^2 (\chi_1^1)^2 \right) y_0 \\ &\quad - \bar{c}_0^2 u_0 (\chi_1^1)^2 y_0 + \bar{g}_0 (\chi_1^1)^2 \bar{c}_0 + g_0 r^2 y_0 - \bar{g}_0(1 + \bar{c}_0 r_0) \chi_1^1 \\ &\quad + \sum_{j=2}^n \bar{g}'_{j0} \alpha_0^{1j} r^2 y_0 - \bar{c}_0 \bar{g}_0 (\chi_1^1)^2 y_0 + O(r^3) \\ &= \left(\left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)_0 + \sum_{i=1}^n \beta_0^i \left(\frac{\partial u}{\partial \chi^i} \right)_0 + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \alpha_0^{ij} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \chi^i \partial \chi^j} \right)_0 + c_0 u_0 + g_0 \right) \\ &\quad \times r^2 y_0 + O(r^3) = O(r^3). \end{aligned}$$

Теорема 1 доказана.

Теорема 2. Пусть для точек, не являющихся приграничными, переход за один шаг совершается с помощью метода, имеющего одношаговую погрешность $O(r^4)$, шаг h_k по времени которого удовлетворяет неравенству $h_k \geq C_0 r^2$, а приращение ΔX удовлетворяет неравенству $|\Delta X| \leq C_1 r$, где C_0, C_1 — некоторые положительные постоянные (такие методы построены в связи с решением первой краевой задачи). Пусть для приграничных точек (t_0, x_0) при $t_0 < T_1 - r^2$ переход за один шаг совершается согласно теореме 1. Пусть, наконец, последний n -й шаг, когда $T_1 - r^2 \leq t_{n-1} < T_1$, дает переход в точку $(t_n, X_n, Y_n, Z_n) = (T_1, X_{n-1}, Y_{n-1}, Z_{n-1})$. Тогда такой метод имеет слабый порядок точности $O(r^2)$, т.е. выполняется соотношение

$$u(t, x) = E(\varphi(X_n) Y_n + Z_n) + O(r^2), \quad t_0 = t, \quad X_0 = x. \quad (3.1)$$

Среднее число шагов при этом равно $E_n = O(1/r^2)$.

Доказательство этой теоремы проводится аналогично доказательству общей теоремы сходимости для первой краевой задачи. При этом используются следующие соображения.

Число шагов для точек, не являющихся приграничными, очевидно, не превосходит числа $(T_1 - T_0)/(Cr^2) = O(1/r^2)$. Поскольку ошибка на каждом из таких шагов имеет вид $O(r^4)$, то суммарная ошибка по этим шагам есть $O(r^2)$. Оказывается (см. ниже лемму 1), что среднее число шагов для приграничных точек оценивается величиной $O(1/r)$. Поскольку одношаговая погрешность здесь есть $O(r^3)$, то суммарная ошибка по таким шагам снова равна $O(r^2)$. Наконец, ошибка на последнем шаге не превосходит $O(r^2)$. Стало быть, и итоговая ошибка есть $O(r^2)$. Теорема 2 доказана.

Перейдем к формулировке и доказательству упомянутой леммы.

Вместе с поверхностью ∂G рассмотрим концентрическую ей поверхность $\partial_l G$, принадлежащую G и удаленную от ∂G на некоторое небольшое фиксированное расстояние l такое, что любой шар радиуса l с центром на $\partial_l G$ целиком принадлежит G . Слой между $\partial_l G$ и ∂G обозначим G_l .

Рассмотрим цепь Маркова (t_k, X_k) , порожденную тем или иным методом из теоремы 2 и стартующую из точки (t, x) , т.е. $t_0 = t$, $X_0 = x$.

Пусть (t_k, X_k) , $k = 0, \dots, n$, — некоторая реализация этой цепи. Рассмотрим все моменты $t_{k_1}, \dots, t_{k_q}$ пребывания этой реализации в цилиндрическом слое $\bar{Q}_r = [T_0, T_1 - r^2] \times \bar{G}_r$. Случайное число q зависит от t и x : $q = q(t, x)$ (разумеется, q зависит также и от r).

Лемма 1. Среднее время $v(t, x) = \mathbb{E}q(t, x)$ пребывания цепи (t_k, X_k) в цилиндрическом слое $[T_0, T_1 - r^2] \times \bar{G}_r$ удовлетворяет равномерно по $(t, x) \in \bar{Q}$ оценке

$$v(t, x) \leq \frac{C}{r}. \quad (3.2)$$

Доказательство. В связи с цепью Маркова (t_k, X_k) рассмотрим краевую задачу

$$\begin{aligned} PV - V &= -g(t, x), & (t, x) \in [T_0, T_1 - r^2] \times \bar{G}, \\ V(t, x) &= 0, & (t, x) \in (T_1 - r^2, T_1] \times \bar{G}, \end{aligned} \quad (3.3)$$

где P — оператор перехода за один шаг:

$$PV(t, x) = \mathbb{E}V(t_1, X_1), \quad t_0 = t, \quad X_0 = x.$$

Как известно [6], решением этой задачи является функция

$$V(t, x) = \mathbb{E} \sum_{k=0}^{n-1} g(t_k, X_k), \quad t_0 = t, \quad X_0 = x. \quad (3.4)$$

Если в качестве g взять индикатор введенного выше цилиндрического слоя $\bar{Q}_r$: $g(t, x) = I_{\bar{Q}_r}(t, x)$, то решением задачи (3.3) будет $v(t, x)$. Далее, если найти решение $V(t, x)$ задачи (3.3) с функцией $g(t, x)$, которая всюду в $[T_0, T_1 - r^2] \times \bar{G}$ удовлетворяет неравенству

$$g(t, x) \geq I_{\bar{Q}_r}(t, x), \quad (3.5)$$

то благодаря (3.4)

$$v(t, x) \leq V(t, x). \quad (3.6)$$

Введем функцию

$$w(x) = \begin{cases} \rho^2(x, \partial_l G), & x \in \bar{G}_l, \\ 0, & x \in \bar{G} \setminus \bar{G}_l. \end{cases}$$

Возьмем теперь в качестве $V(t, x)$ функцию

$$W(t, x) = \begin{cases} 0, & (t, x) \in (T_1 - r^2, T_1] \times \bar{G}, \\ K(T_1 - t) + w(x), & (t, x) \in [T_0, T_1 - r^2] \times \bar{G}. \end{cases} \quad (3.7)$$

Эта функция удовлетворяет краевому условию в (3.3), $K \geq 0$ — некоторая постоянная, значение которой будет уточнено ниже. Подсчитаем $PW - W$ (т.е. функцию $-g(t, x)$) для различных точек (t, x) .

Пусть точка (t, x) такова, что $T_0 \leq t \leq T_1 - r^2$, а x принадлежит слою, заключенному между поверхностями $\partial_l G$ и $\partial_r G$, $r \leq l$, и, кроме того, $\rho(x, \partial_l G) \geq C_1 r$. Благодаря этому (см. условия теоремы 2) точка $x + \Delta X \in \bar{G}_l$. Поэтому $w(x) = \rho^2(x, \partial_l G)$,

$w(x + \Delta X) = \rho^2(x + \Delta X, \partial_1 G)$. Пусть p_x — проекция x на поверхность $\partial_1 G$. Имеем $\rho(x + \Delta X, \partial_1 G) = \rho(x, \partial_1 G) + (\Delta X, (x - p_x)/|x - p_x|) + O(r^2)$, где $(\cdot, \cdot)$ — скалярное произведение векторов. Отсюда

$$\begin{aligned} E[w(x + \Delta X) - w(x)] &= E\left[\left(\rho(x, \partial_1 G) + \left(\Delta X, \frac{x - p_x}{|x - p_x|}\right)\right)^2 - \rho^2(x, \partial_1 G)\right] + O(r^2) \\ &= 2\rho(x, \partial_1 G) E\left(\Delta X, \frac{x - p_x}{|x - p_x|}\right) + E\left(\Delta X, \frac{x - p_x}{|x - p_x|}\right)^2 + O(r^2) = O(r^2), \end{aligned}$$

так как $|E\Delta X| = O(r^2)$ и $E|\Delta X|^2 = O(r^2)$ для методов, которые используются в теореме 2. Отсюда

$$PW - W = -K\Delta t + O(r^2). \quad (3.8)$$

Пусть теперь $\rho(x, \partial_1 G) < C_1 r$. В этом случае как $w(x) = O(r^2)$, так и $w(x + \Delta X) = O(r^2)$, и поэтому снова выполняется (3.8).

Для точек x , находящихся внутри $\partial_1 G$ на расстоянии от $\partial_1 G$, большем, чем $C_1 r$, очевидно выполняется

$$PW - W = -K\Delta t.$$

Так как $O(r^2)$ в (3.8) равномерно по (t, x) удовлетворяет неравенству $|O(r^2)| \leq C_2 r^2$, где $C_2 > 0$ — некоторая постоянная, а $\Delta t \geq C_0 r^2$, то за счет выбора постоянной K можно добиться, чтобы правая часть в (3.8) была неположительной. Итак, для функции (3.7) функция $f(t, x) = -(PW - W)$ является неотрицательной.

Рассмотрим, наконец, точку (t, x) , $T_0 \leq t \leq T_1 - r^2$, $x \in \bar{G}_r$. В связи с обозначениями в теореме 1 удобно вместо (t, x) временно ввести обозначение (t_0, x_0) . Имеем $\rho(x, \partial_1 G) = l - r_0$, $\rho(x + \Delta X, \partial_1 G) = l - r_0 - \chi^1 + O(r^2)$. Далее,

$$E[w(x_0 + \Delta X) - w(x_0)] = (l - r_0 - \chi^1)^2 - (l - r_0)^2 + O(r^2) = -2l\chi^1 + O(r^2).$$

Нетрудно убедиться, что χ^1 равномерно ограничено снизу величиной, пропорциональной r . Поэтому для таких точек (t, x) получим

$$PW(t, x) - W(t, x) = -f(t, x), \quad f(t, x) \geq qr.$$

В итоге построена функция W , являющаяся решением задачи (3.3) с неотрицательной всюду функцией $f(t, x)$, которая в $\bar{Q}_r$ удовлетворяет неравенству $f \geq qr$.

Рассмотрим теперь функцию $V(t, x) = W(t, x)/(qr)$. Очевидно, что $V(t, x)$ является решением задачи (3.3) с функцией $g(t, x) = f(t, x)/(qr)$, которая удовлетворяет неравенству (3.5). Поэтому выполняется (3.6) и $v(t, x)$ действительно удовлетворяет оценке (3.2).

Лемма 1 доказана.

Доказательство теоремы 2 наводит на следующие соображения.

Поскольку время пребывания в $\bar{G}_r$ есть $O(1/r)$, то для сходимости метода достаточно, чтобы одношаговая погрешность в G_r была $O(r^2)$ вместо $O(r^3)$. Правда, при этом порядок точности метода будет всего $O(r)$, но за этот счет можно попытаться существенно упростить метод. Имеет место следующая теорема.

Теорема 3. Пусть

$$t_1 = t_0 + r^2, \quad (3.9)$$

$$\chi^1 = qr, \quad (3.10)$$

где q — некоторое положительное число,

$$\chi^j = 0, \quad j = 2 \div n, \quad (3.11)$$

$$\Delta Y = \bar{c}_0 \chi^1 y_0 = \bar{c}_0 q \tau y_0, \quad (3.12)$$

$$\Delta Z = -\bar{g}_0 \chi^1 y_0 = -\bar{g}_0 q \tau y_0. \quad (3.13)$$

Тогда выполняются соотношения (2.1), (2.2) с заменой $O(r^3)$ на $O(r^2)$, а метод теоремы 2 с заменой формул (2.3)–(2.8) на формулы (3.9)–(3.13) имеет порядок точности $O(r)$, т.е. выполняется соотношение (3.1) с заменой $O(r^2)$ на $O(r)$.

Доказательство. Имеем:

$$\begin{aligned} d &= u(t_1, \chi) Y_1 + Z_1 - u_0 y_0 - z_0 \\ &= \left(u_0 + \left(\frac{\partial u}{\partial \chi^1} \right)_0 \chi^1 + O(r^2) \right) (y_0 + \bar{c}_0 \chi^1 y_0) - \bar{g}_0 \chi^1 y_0 - u_0 y_0 \\ &= u_0 \bar{c}_0 \chi^1 y_0 + \left(\frac{\partial u}{\partial \chi^1} \right)_0 \chi^1 y_0 - \bar{g}_0 \chi^1 y_0 + O(r^2). \end{aligned}$$

Но из (1.10) вытекает соотношение $(\frac{\partial u}{\partial \chi^1})_0 + \bar{c}_0 u_0 - \bar{g}_0 = O(r)$, откуда $d = O(r^2)$. Последнее утверждение этой теоремы доказывается со ссылкой на лемму 1 точно так же, как и теорема 2.

З а м е ч а н и е. Можно получить метод порядка $O(r^2)$ с использованием более простых формул вида (3.9)–(3.13) следующим образом. Вместо цилиндрического приграничного слоя $\bar{Q}_r$, как это было сделано в теореме 2, ввести слой $\bar{Q}_\delta$, где δ по своей величине пропорционально r^2 . Для точек, не являющихся приграничными, использовать обычный метод, для приграничных точек использовать теорему 3 с заменой r на δ . Одношаговая погрешность будет равна $O(\delta^2)$, а среднее время пребывания цепи в $\bar{Q}_\delta$ будет равно $O(1/\delta)$. Поэтому суммарная ошибка по приграничным точкам будет равна $O(\delta) = O(r^2)$. Суммарная ошибка по другим точкам тоже есть $O(r^2)$. Итоговая ошибка будет $O(r^2)$. Число шагов при этом, конечно, увеличится по сравнению с методом теоремы 2, но, по-видимому, по порядку не будет отличаться от $O(1/r^2)$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Мизайлов В. П. Дифференциальные уравнения в частных производных. М.: Наука, 1976, 392 с.
2. Гизман И. И., Скороход А. В. Стохастические дифференциальные уравнения и их приложения. Киев: Наукова думка, 1982, 612 с.
3. Ватанабэ С., Икэда Н. Стохастические дифференциальные уравнения и диффузионные процессы. М.: Наука, 1986, 446 с.
4. Кушнер Г. Дж. Вероятностные методы аппроксимации в стохастических задачах управления и теории эллиптических уравнений. М.: Наука, 1985, 222 с.
5. Мильштейн Г. Н. Решение первой краевой задачи для уравнений параболического типа с помощью интегрирования стохастических дифференциальных уравнений. — Теория вероятн. и ее примен., 1995, т. 40, в. 3, с. 657–665.
6. Вентцель А. Д. Курс теории случайных процессов. М.: Наука, 1975, 320 с.

Поступила в редакцию
11.VIII.1993