Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. М. Ланге, О распределении числа финальных частиц ветвящегося процесса с превращениями и парными взаимодействиями, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2006, том 51, выпуск 4, 801–809

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp28>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.187.58

26 апреля 2023 г., 11:13:05

3. *Malyshev V. A.* Microscopic models for chemical thermodynamics. — J. Statist. Phys., 2005, v. 119, № 5/6, p. 997–1026.
4. *Malyshev V. A.* Fixed points for stochastic open chemical systems. — Markov Process. Related Fields, 2005, v. 11, № 2, p. 337–354.
5. *Gadgil C., Lee C.-H., Othmer H. G.* A stochastic analysis of first-order reaction networks. — Bull. Math. Biol., 2005, v. 67, № 5, p. 901–946.
6. *Streater R. F.* Statistical Dynamics. London: Imperial College Press, 1995, 275 p.
7. *Thomas R.* Feedback loops: the wheels of regulatory networks. — Integrative Approaches to Molecular Biology. Ed. by J. Collado-Vides, B. Magasanik, and T. F. Smith. Cambridge: MIT Press, 1996, p. 167–178.
8. *Mavrouniotis M. L.* Analysis of complex metabolic pathways. — Integrative Approaches to Molecular Biology. Ed. by J. Collado-Vides, B. Magasanik, and T. F. Smith. Cambridge: MIT Press, 1996, p. 211–238.
9. *Fell D.* Understanding the Control of Metabolism. London: Portland Press, 1996, 300 p.
10. *Левитан Б. М.* Почти-периодические функции. М.: Гостехиздат, 1953, 396 с.
11. *Rybko A., Shlosman S.* Poisson hypothesis for information networks. I, II. — Moscow Math. J., 2005, v. 5, № 3, p. 679–704; № 4, p. 927–959.
12. *Rybko A., Shlosman S., Vladimirov A.* Self-averaging property of queueing systems. <http://www.arxiv.org: math.PR/0510046>.
13. *Rolski T.* Ergodic properties of Poisson processes with almost periodic intensity. — Probab. Theory Related Fields, 1990, v. 84, № 1, p. 27–37.

Поступила в редакцию
21.XII.2005

© 2006 г.

ЛАНГЕ А. М.*

О РАСПРЕДЕЛЕНИИ ЧИСЛА ФИНАЛЬНЫХ ЧАСТИЦ ВЕТВЯЩЕГОСЯ ПРОЦЕССА С ПРЕВРАЩЕНИЯМИ И ПАРНЫМИ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯМИ

Рассматривается марковский ветвящийся процесс с непрерывным временем и двумя типами частиц T_1 и T_2 . Частицы обоих типов образуются при превращении частицы типа T_1 или взаимодействии двух частиц типа T_1 . При частных предположениях о распределениях числа новых частиц найдены асимптотики математического ожидания и дисперсии и показана асимптотическая нормальность распределения числа финальных частиц типа T_2 при большом начальном числе частиц типа T_1 .

Ключевые слова и фразы: ветвящийся процесс с взаимодействием, финальные вероятности, экспоненциальная производящая функция, стационарное первое уравнение Колмогорова, точные решения.

1. Ветвящийся процесс с двумя типами частиц T_1 , T_2 и двумя комплексами взаимодействия $\varepsilon^1 = (1, 0)$, $\varepsilon^2 = (2, 0)$ [5]. Пусть $\xi(t)$, $t \in [0, \infty)$, — однородный во времени марковский процесс на множестве состояний $N^2 = \{(\alpha_1, \alpha_2), \alpha_1, \alpha_2 = 0, 1, 2, \dots\}$. Переходные вероятности $P_{(\beta_1, \beta_2)}^{(\alpha_1, \alpha_2)}(t) = P(\xi(t) = (\beta_1, \beta_2) | \xi(0) = (\alpha_1, \alpha_2))$ при $\Delta t \rightarrow 0$ имеют вид ($\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$)

$$P_{(\alpha_1, \alpha_2)}^{(\alpha_1, \alpha_2)}(\Delta t) = 1 - (\lambda_2 \alpha_1 (\alpha_1 - 1) + \lambda_1 \alpha_1) \Delta t + o(\Delta t),$$

$$P_{(\beta_1, \beta_2)}^{(\alpha_1, \alpha_2)}(\Delta t) = (\lambda_2 \alpha_1 (\alpha_1 - 1) p_{\beta_1 - \alpha_1 + 2, \beta_2 - \alpha_2}^2 + \lambda_1 \alpha_1 p_{\beta_1 - \alpha_1 + 1, \beta_2 - \alpha_2}^1) \Delta t + o(\Delta t),$$

* Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана, 2-я Бауманская ул., 5, 107005 Москва, Россия; e-mail: lange_am@hotmail.com

если $\alpha_1 \neq \beta_1$ или $\alpha_2 \neq \beta_2$. Здесь $\{p_{\gamma_1 \gamma_2}^l \geq 0, \gamma_1, \gamma_2 \in \mathbf{N}; \sum_{\gamma_1 \gamma_2=0}^{\infty} p_{\gamma_1 \gamma_2}^l = 1, p_{l0}^l = 0\}$, $l = 1, 2$, — заданные распределения вероятностей. Введем производящие функции

$$G_{(\beta_1, \beta_2)}(t; z_1, z_2) = \sum_{\alpha_1, \alpha_2=0}^{\infty} \frac{z_1^{\alpha_1} z_2^{\alpha_2}}{\alpha_1! \alpha_2!} P_{(\beta_1, \beta_2)}^{(\alpha_1, \alpha_2)}(t),$$

$$F_{(\alpha_1, \alpha_2)}(t; s_1, s_2) = \sum_{\beta_1, \beta_2=0}^{\infty} P_{(\beta_1, \beta_2)}^{(\alpha_1, \alpha_2)}(t) s_1^{\beta_1} s_2^{\beta_2},$$

$$h_l(s_1, s_2) = \sum_{\gamma_1, \gamma_2=0}^{\infty} p_{\gamma_1 \gamma_2}^l s_1^{\gamma_1} s_2^{\gamma_2}, \quad |s_1| \leq 1, \quad |s_2| \leq 1,$$

и линейные дифференциальные операторы

$$h_l\left(\frac{\partial}{\partial z_1}, \frac{\partial}{\partial z_2}\right) = \sum_{\gamma_1, \gamma_2=0}^{\infty} p_{\gamma_1 \gamma_2}^l \frac{\partial^{\gamma_1 + \gamma_2}}{\partial z_1^{\gamma_1} \partial z_2^{\gamma_2}}, \quad l = 1, 2.$$

Первая (обратная) система дифференциальных уравнений Колмогорова для переходных вероятностей марковского процесса $\xi(t)$ равносильна уравнению в частных производных (см. [5, теорема 2])

$$\frac{\partial G_{(\beta_1, \beta_2)}}{\partial t} = \left[\lambda_2 z_1^2 \left(h_2\left(\frac{\partial}{\partial z_1}, \frac{\partial}{\partial z_2}\right) - \frac{\partial^2}{\partial z_1^2} \right) + \lambda_1 z_1 \left(h_1\left(\frac{\partial}{\partial z_1}, \frac{\partial}{\partial z_2}\right) - \frac{\partial}{\partial z_1} \right) \right] G_{(\beta_1, \beta_2)} \quad (1)$$

с начальным условием $G_{(\beta_1, \beta_2)}(0; z_1, z_2) = z_1^{\beta_1} z_2^{\beta_2} / (\beta_1! \beta_2!)$.

Вторая (прямая) система дифференциальных уравнений Колмогорова равносильна уравнению в частных производных (см. [5, теорема 1])

$$\frac{\partial F_{(\alpha_1, \alpha_2)}}{\partial t} = \lambda_2 (h_2(s_1, s_2) - s_1^2) \frac{\partial^2 F_{(\alpha_1, \alpha_2)}}{\partial s_1^2} + \lambda_1 (h_1(s_1, s_2) - s_1) \frac{\partial F_{(\alpha_1, \alpha_2)}}{\partial s_1}$$

с начальным условием $F_{(\alpha_1, \alpha_2)}(0; s_1, s_2) = s_1^{\alpha_1} s_2^{\alpha_2}$.

Состояние (α_1, α_2) интерпретируется как наличие α_1 частиц типа T_1 и α_2 частиц типа T_2 [1], [2], [5]. Через случайное время $\tau_{(\alpha_1, \alpha_2)}^1$, $\mathbf{P}\{\tau_{(\alpha_1, \alpha_2)}^1 < t\} = 1 - \exp\{-\lambda_1 \alpha_1 t\}$, частица типа T_1 независимо от других частиц может превратиться в совокупность из γ_1 частиц типа T_1 и γ_2 частиц типа T_2 с распределением вероятностей $\{p_{\gamma_1 \gamma_2}^1\}$. Кроме того, через случайное время $\tau_{(\alpha_1, \alpha_2)}^2$, $\mathbf{P}\{\tau_{(\alpha_1, \alpha_2)}^2 < t\} = 1 - \exp\{-\lambda_2 \alpha_1 (\alpha_1 - 1) t\}$, пара частиц $T_1 + T_1$ независимо от других частиц может превратиться в группу частиц с распределением вероятностей $\{p_{\gamma_1 \gamma_2}^2\}$. Предполагается, что случайные величины $\tau_{(\alpha_1, \alpha_2)}^1$ и $\tau_{(\alpha_1, \alpha_2)}^2$ независимы. В состоянии (α_1, α_2) процесс находится случайное время $\tau_{(\alpha_1, \alpha_2)} = \min(\tau_{(\alpha_1, \alpha_2)}^1, \tau_{(\alpha_1, \alpha_2)}^2)$. Частицы типа T_2 называются финальными, их число не уменьшается со временем и не влияет на число частиц типа T_1 [4].

2. Задача о финальных вероятностях. Для марковского процесса $\xi(t)$ состояния $(0, \beta_2)$, $\beta_2 \in \mathbf{N}$, являются поглощающими; пусть начальное состояние $\xi(0) = (\alpha_1, 0)$, $\alpha_1 \in \mathbf{N}$. Введем финальные вероятности $q_{(0, \beta_2)}^{(\alpha_1, 0)} = \lim_{t \rightarrow \infty} P_{(0, \beta_2)}^{(\alpha_1, 0)}(t)$ и вероятность вырождения $q_{\alpha_1 0} = \sum_{\beta_2=0}^{\infty} q_{(0, \beta_2)}^{(\alpha_1, 0)}$. Обозначим η_{α_1} случайное число частиц типа T_2 , оставшихся после вырождения процесса. Финальное распределение $\{q_{(0, \beta_2)}^{(\alpha_1, 0)}, \beta_2 \in \mathbf{N}\}$ может быть несобственным, т.е. $q_{\alpha_1 0} \leq 1$.

Введем производящие функции

$$f_{\alpha_1}(u) = \sum_{\beta_2=0}^{\infty} q_{(0, \beta_2)}^{(\alpha_1, 0)} u^{\beta_2}, \quad w_0(z, u) = \sum_{\alpha_1=0}^{\infty} \frac{z^{\alpha_1}}{\alpha_1!} f_{\alpha_1}(u), \quad |u| \leq 1. \quad (2)$$

Положим $h_{\gamma_1}^l(u) = \sum_{\gamma_2=0}^{\infty} p_{\gamma_1 \gamma_2}^l u^{\gamma_2}$, $|u| \leq 1$; пусть $p_{\gamma_1}^l = \sum_{\gamma_2=0}^{\infty} p_{\gamma_1 \gamma_2}^l$, $l = 1, 2$. Параметры критичности ветвящегося процесса обозначим $a_l = \lambda_l((\partial h_l(s, u)/\partial s)|_{s=1, u=1} - l)$, $l = 1, 2$ [4].

В случае $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 = 0$ (ветвящийся процесс с независимыми частицами) известно, что $q_{\alpha_1 0} = q_1^{\alpha_1}$, где q_1 — ближайший к нулю неотрицательный корень уравнения $h_1(s, 1) - s = 0$ [4, гл. 2, § 1]. В докритическом ($a_1 < 0$) и надкритическом ($a_1 > 0$) процессах финальное распределение асимптотически нормально при $\alpha_1 \rightarrow \infty$, а в критическом ($a_1 = 0$) процессе финальное распределение при $\alpha_1 \rightarrow \infty$ отлично от нормального закона [4, гл. 5, § 5].

В случае $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 > 0$ в работе [5] найдена асимптотика $q_{\alpha_1 0} \sim C_0 q_2^{\alpha_1}$, $\alpha_1 \rightarrow \infty$, где $C_0 > 0$ и q_2 — ближайший к нулю неотрицательный корень уравнения $h_2(s, 1) - s^2 = 0$. В [6] получены предельные теоремы для финальных распределений в докритическом ($a_2 < 0$), критическом ($a_2 = 0$) и надкритическом ($a_2 > 0$) процессах, аналогичные результатам [4].

В случае $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$ для надкритического ($a_2 > 0$) процесса при $h_1(s, u) = h_2^1(u) + h_2^2(u) s^2$, $h_2(s, u) = h_0^2(u) + h_1^2(u) s + h_3^2(u) s^3$ и условиях $p_1^2 > 0$, $p_3^2 > 0$, $p_0^1 + p_0^2 > 0$, $p_0^2 + p_1^2 > 0$, $q_2 > q_1$ найдена асимптотика $q_{\alpha_1 0} \sim C q_2^{\alpha_1} / \alpha_1^\alpha$, $\alpha_1 \rightarrow \infty$, где $C > 0$ и $\alpha > 0$ [7, следствие 1].

В настоящей работе рассматривается докритический ($a_2 < 0$) процесс. Выражения для производящей функции $f_{\alpha_1}(u)$, асимптотические оценки для математического ожидания $m_{\alpha_1} = \mathbf{E}\eta_{\alpha_1}$, дисперсии $\sigma_{\alpha_1}^2 = \mathbf{D}\eta_{\alpha_1}$ при $\alpha_1 \rightarrow \infty$ и асимптотическая нормальность финального распределения установлены при дополнительных предположениях о распределениях вероятностей $\{p_{\gamma_1 \gamma_2}^l\}$, $l = 1, 2$. Производящая функция $w_0(z, u)$ находится как точное решение стационарного уравнения Колмогорова.

Предельные распределения ветвящихся процессов с парными взаимодействиями рассматривались в работах [11], [12].

3. Первое уравнение Колмогорова для экспоненциальной производящей функции финальных вероятностей. Введем производящую функцию [6]

$$W_{\beta_1}(t; z, u) = \sum_{\alpha_1=0, \beta_2=0}^{\infty} \frac{z^{\alpha_1}}{\alpha_1!} P_{(\beta_1, \beta_2)}^{(\alpha_1, 0)}(t) u^{\beta_2}, \quad \beta_1 \in \mathbf{N},$$

и дифференциальные операторы

$$h_l \left(\frac{\partial}{\partial z_1}, u \right) = \sum_{\gamma_1, \gamma_2=0}^{\infty} p_{\gamma_1 \gamma_2}^l u^{\gamma_2} \frac{\partial^{\gamma_1}}{\partial z_1^{\gamma_1}}, \quad |u| \leq 1, \quad l = 1, 2.$$

Теорема 1. Производящая функция переходных вероятностей $W_{\beta_1}(t; z, u)$ при любом $\beta_1 \in \mathbf{N}$ удовлетворяет линейному дифференциальному уравнению в частных производных

$$\frac{\partial W_{\beta_1}}{\partial t} = \left[\lambda_2 z^2 \left(h_2 \left(\frac{\partial}{\partial z}, u \right) - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) + \lambda_1 z \left(h_1 \left(\frac{\partial}{\partial z}, u \right) - \frac{\partial}{\partial z} \right) \right] W_{\beta_1} \quad (3)$$

с начальным условием $W_{\beta_1}(0; z, u) = z^{\beta_1} / \beta_1!$.

Вывод уравнения (3) основан на уравнении (1) и соотношениях для переходных вероятностей $P_{(\beta_1, \beta_2)}^{(\alpha_1, \alpha_2)}(t) = P_{(\beta_1, \beta_2 - \alpha_2)}^{(\alpha_1, 0)}(t)$ при $\alpha_2 \leq \beta_2$, $P_{(\beta_1, \beta_2)}^{(\alpha_1, \alpha_2)}(t) = 0$ при $\alpha_2 > \beta_2$ (ср. [6, теорема 1]).

Аналогично работе [6] показывается, что $w_0(z, u) = \lim_{t \rightarrow \infty} W_0(t; z, u)$ и функция $w_0(z, u)$ удовлетворяет стационарному первому уравнению

$$\left[\lambda_2 z \left(h_2 \left(\frac{d}{dz}, u \right) - \frac{d^2}{dz^2} \right) + \lambda_1 \left(h_1 \left(\frac{d}{dz}, u \right) - \frac{d}{dz} \right) \right] w_0(z, u) = 0. \quad (4)$$

Из равенства $q_{(0,0)}^{(0,0)} = 1$ следует условие $w_0(0, u) \equiv 1$. Функция $w_0(z, u)$ при $|u| < 1$ является аналитической функцией переменных z и u , так как

$$|w_0(z, u)| \leq \sum_{\alpha_1=0}^{\infty} \frac{|z|^{\alpha_1}}{\alpha_1!} \sum_{\beta_2=0}^{\infty} q_{(0, \beta_2)}^{(\alpha_1, 0)} |u|^{\beta_2} \leq \sum_{\alpha_1=0}^{\infty} \frac{|z|^{\alpha_1}}{\alpha_1!} = e^{|z|}.$$

Обыкновенное дифференциальное уравнение (4), коэффициенты которого являются линейными функциями переменной z , относится к типу уравнений Лапласа [10, ч. 1, гл. 5, § 22.4]. Решение строится методом определенного интеграла

$$w_0(z, u) = \int_K e^{zs} \varphi(s, u) ds,$$

где

$$\varphi(s, u) = \frac{1}{h_2(s, u) - s^2} \exp \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2} \int \frac{h_1(v, u) - v}{h_2(v, u) - v^2} dv \right), \quad (5)$$

причем кривая K в комплексной s -плоскости удовлетворяет условию

$$\int_K \frac{d}{ds} e^{zs} (h_2(s, u) - s^2) \varphi(s, u) ds = 0. \quad (6)$$

Нахождение кривой K связано с рассмотрением римановой поверхности, соответствующей функции $\varphi(s, u)$ [10].

4. Интегральное представление для производящей функции $f_{\alpha_1}(u)$.
Случай $h_1(s, u) = h_0^1(u) + h_1^1(u)s + h_2^1(u)s^2$, $h_2(s, u) = h_0^2(u) + h_1^2(u)s + h_2^2(u)s^2$, $p_0^1 > 0$, $p_2^2 < 1$. Уравнение (4) для функции $w_0(z, u)$ является уравнением второго порядка

$$\begin{aligned} & (\lambda_2(h_2^2(u) - 1)z + \lambda_1 h_2^1(u)) \frac{d^2 w_0(z, u)}{dz^2} + (\lambda_2 h_1^2(u)z + \lambda_1(h_1^1(u) - 1)) \frac{dw_0(z, u)}{dz} \\ & + (\lambda_2 h_0^2(u)z + \lambda_1 h_0^1(u)) w_0(z, u) = 0. \end{aligned} \quad (7)$$

Пусть функции $h_{\gamma_l}^l(u)$, $\gamma_l = 0, 1, 2$, $l = 1, 2$, аналитичны при всех u . Обозначим $\varphi_0(u)$ и $\varphi_1(u)$ корни квадратного уравнения $h_2(s, u) - s^2 = 0$. Функции $\varphi_0(u)$, $\varphi_1(u)$ аналитичны в области $|u| < 1$ за исключением конечного числа точек. Выполнив интегрирование в (5), получаем общее решение уравнения (7) в виде ($\varphi_0(u) \neq \varphi_1(u)$)

$$w_0(z, u) = \sum_{n=1}^2 C_n(u) \int_{K^n} e^{(z+d_0(u))s} (s - \varphi_0(u))^{\nu_0(u)-1} (s - \varphi_1(u))^{\nu_1(u)-1} ds, \quad (8)$$

где

$$d_0(u) = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \frac{h_2^1(u)}{h_2^2(u) - 1}, \quad \nu_l(u) = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \frac{h_1(\varphi_l(u), u) - \varphi_l(u)}{h_2'(\varphi_l(u), u) - 2\varphi_l(u)}, \quad l = 0, 1,$$

$C_1(u)$, $C_2(u)$ — произвольные функции (здесь использовано обозначение $h_2'(s, u) = \partial h_2(s, u) / \partial s$). Кривые K^1 , K^2 удовлетворяют условию (6); интегралы по ним являются линейно независимыми функциями переменной z . Отметим, что функции $\nu_0(u)$ и $\nu_1(u)$ определены так же, как параметры α и β в работе [7].

Функция $d_0(u)$ аналитична при $|u| < 1$. Аналитичность функций $\nu_0(u)$, $\nu_1(u)$ в области $|u| < 1$ за исключением конечного числа точек следует из равенства $h_2'(\varphi_l(u), u) - 2\varphi_l(u) = (-1)^l (h_2^2(u) - 1)(\varphi_0(u) - \varphi_1(u))$, $l = 0, 1$.

Выбор кривых интегрирования в выражении (8) связан с рассмотрением точек ветвления $\varphi_0(u)$ и $\varphi_1(u)$ подынтегральных функций. Если кривая K^1 имеет вид двойной замкнутой петли, обходящей точки $\varphi_0(u)$ и $\varphi_1(u)$ сначала в положительном, а потом в отрицательном направлениях (ср. [9, гл. 6, § 11, интегральное представление (1)]), то интеграл (8) дает функцию, аналитическую в области $|u| < 1$ за исключением конечного числа точек, в которых $\varphi_0(u) = \varphi_1(u)$. Значения функции $w_0(z, u)$ в указанных точках определяются по непрерывности.

Далее используется другое интегральное представление для $w_0(z, u)$, справедливое в окрестности точки $u = 1$. Так как $h_2(1, 1) = 1$, положим $\varphi_0(1) = 1$. Из условий $p_2^2 < 1$ и $\varphi_0(1) = 1$ следует $-1 \leq \varphi_1(1) \leq 0$. Отсюда, учитывая, что $h_1(1, 1) = 1$ и $p_0^1 > 0$, получаем $\nu_0(1) = 0$, $\nu_1(1) > 0$. Следовательно, в силу непрерывности функции $\nu_1(u)$ в точке $u = 1$, неравенство $\operatorname{Re} \nu_1(u) > 0$ справедливо в области $|u - 1| < \varepsilon$ при некотором $\varepsilon > 0$. При $\operatorname{Re} \nu_1(u) > 0$ в качестве кривой K^1 можно взять петлю, которая начинается и заканчивается в точке $\varphi_1(u)$ и обходит в положительном направлении точку $\varphi_0(u)$ (ср. [9, гл. 6, § 11, интегральное представление (3)]). Кривая K^2 берется

в виде бесконечной петли, проходящей вдоль разреза по лучу $\arg(s - \varphi_1(u)) = \theta$, $\operatorname{Re}((z + d_0(u))e^{i\theta}) < 0$ и обходящей точку $\varphi_1(u)$ в положительном направлении (ср. [9, гл. 6, § 11, интегральное представление (9)]). Поскольку функция, определяемая интегралом по кривой K^2 , не является аналитической при $z = -d_0(u)$, полагаем $C_2(u) \equiv 0$. Функция $C_1(u)$ определяется из условия $w_0(0, u) \equiv 1$. После замены переменной $s = \varphi_0(u) + (\varphi_1(u) - \varphi_0(u))v$ в (8) приходим к представлению вида (далее $d(u) = d_0(u)(\varphi_1(u) - \varphi_0(u))$)

$$w_0(z, u) = \frac{1}{A(u)} \int_1^{(0+)} e^{z(\varphi_0(u) + (\varphi_1(u) - \varphi_0(u))v) + d(u)v} v^{\nu_0(u)-1} (1-v)^{\nu_1(u)-1} dv, \quad (9)$$

где

$$A(u) = \int_1^{(0+)} e^{d(u)v} v^{\nu_0(u)-1} (1-v)^{\nu_1(u)-1} dv, \quad |u-1| < \varepsilon. \quad (10)$$

Теорема 2. Пусть для ветвящегося процесса $h_1(s, u) = h_0^1(u) + h_1^1(u)s + h_2^1(u)s^2$, $h_2(s, u) = h_0^2(u) + h_1^2(u)s + h_2^2(u)s^2$ и $p_0^1 > 0$, $p_2^2 < 1$. Производящая функция финального распределения при $|u-1| < \varepsilon$ представима в виде

$$f_{\alpha_1}(u) = \frac{1}{A(u)} \int_1^{(0+)} e^{d(u)v} (1-v)^{\nu_1(u)-1} \frac{(\varphi_0(u) + (\varphi_1(u) - \varphi_0(u))v)^{\alpha_1}}{v^{1-\nu_0(u)}} dv. \quad (11)$$

Формула (11) следует из интегрального представления (9) и определения (2).

Далее полагаем, что контур интегрирования в (10) и (11) состоит из отрезка, ориентированного от $v = 1$ до $v = r$, $0 < r < 1$, окружности $|v| = r$ и отрезка от $v = r$ до $v = 1$. Поскольку подынтегральные функции при $u = 1$ однозначны в области $|v| \leq 1$, интегрирование по отрезку $[r, 1]$ в противоположных направлениях дает нуль. Вычисляя интегралы по окружности $|v| = r$ через вычеты в полюсе первого порядка $v = 0$, находим $A(1) = 2\pi i$ и $f_{\alpha_1}(1) = 1$. В частности, для вероятности вырождения получаем $q_{\alpha_1 0} = 1$, $\alpha_1 \in \mathbb{N}$.

З а м е ч а н и е 1. Уравнение (7) сводится к вырожденному гипергеометрическому уравнению (см. [10, ч. 3, гл. 2, уравнения 2.113, 2.145], [8, гл. 16, пример 5]). Экспоненциальная производящая функция представляется в виде

$$w_0(z, u) = e^{z\varphi_0(u)} \frac{\Phi(\nu_0(u), \nu_0(u) + \nu_1(u); z(\varphi_1(u) - \varphi_0(u)) + d(u))}{\Phi(\nu_0(u), \nu_0(u) + \nu_1(u); d(u))}, \quad (12)$$

где

$$\Phi(a, b; z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a(a+1) \cdots (a+n-1)}{b(b+1) \cdots (b+n-1)} \frac{z^n}{n!}, \quad b \neq 0, -1, -2, \dots, \quad (13)$$

— вырожденная гипергеометрическая функция [9]. Представление (12) имеет место при $|u| \leq 1$ за исключением конечного числа точек.

5. Математическое ожидание финального распределения. Случай $h_1(s, u) = h_0^1(u) + h_1^1(u)s + h_2^1(u)s^2$, $h_2(s, u) = h_0^2(u) + h_1^2(u)s + h_2^2(u)s^2$, $p_0^1 > 0$, $p_2^2 < 1$. Вычислим математическое ожидание $m_{\alpha_1} = f'_{\alpha_1}(1)$. Дифференцируя дробь (11), имеем ($\alpha_1 > 0$)

$$m_{\alpha_1} = \frac{1}{2\pi i} \int_1^{(0+)} \frac{d}{du} \left(e^{d(u)v} (1-v)^{\nu_1(u)-1} \frac{(\varphi_0(u) + (\varphi_1(u) - \varphi_0(u))v)^{\alpha_1} - 1}{v^{1-\nu_0(u)}} \right) \Big|_{u=1} dv = \frac{d'(1)}{2\pi i} \int_1^{(0+)} e^{d(1)v} (1-v)^{\nu_1(1)-1} ((1 + (\varphi_1(1) - 1)v)^{\alpha_1} - 1) dv \quad (14)$$

$$- \frac{\nu'_1(1)}{2\pi i} \int_1^{(0+)} e^{d(1)v} (1-v)^{\nu_1(1)-1} \ln(1-v) \cdot \frac{(1 + (\varphi_1(1) - 1)v)^{\alpha_1} - 1}{v} dv \quad (15)$$

$$+ \frac{\nu'_0(1)}{2\pi i} \int_1^{(0+)} e^{d(1)v} (1-v)^{\nu_1(1)-1} \ln v \cdot \frac{(1 + (\varphi_1(1) - 1)v)^{\alpha_1} - 1}{v} dv$$

$$+ \frac{\alpha_1}{2\pi i} \int_1^{(0+)} e^{d(1)v} (1-v)^{\nu_1(1)-1} (\varphi'_0(1) + (\varphi'_1(1) - \varphi'_0(1))v)$$

$$\times \frac{(1 + (\varphi_1(1) - 1)v)^{\alpha_1-1}}{v} dv. \quad (16)$$

Интеграл (14) равен нулю, так как подынтегральная функция не имеет особых точек при $|v| < 1$. Вычисляя вычеты в точке $v = 0$, получаем, что интеграл (15) равен нулю, а интеграл (16) равен $\varphi'_0(1) \alpha_1$. Таким образом, для математического ожидания имеем

$$m_{\alpha_1} = \varphi'_0(1) \alpha_1 - \frac{\nu'_0(1)}{2\pi i} \int_1^{(0+)} e^{d(1)v} (1-v)^{\nu_1(1)-1} \ln v \cdot \frac{1 - (1 - (1 - \varphi_1(1))v)^{\alpha_1}}{v} dv. \quad (17)$$

Преобразуем выражение под интегралом (17), используя сумму геометрической прогрессии $1 - (1 - (1 - \varphi_1(1))v)^{\alpha_1} = (1 - \varphi_1(1))v \sum_{k=0}^{\alpha_1-1} (1 - (1 - \varphi_1(1))v)^k$, а также разложения бинорма и экспоненты по степеням $1 - v$. Имеем

$$\begin{aligned} & (1 - \varphi_1(1)) \int_1^{(0+)} e^{d(1)v} (1-v)^{\nu_1(1)-1} \ln v \cdot \sum_{k=0}^{\alpha_1-1} ((1 - \varphi_1(1))(1-v) + \varphi_1(1))^k dv \\ &= e^{d(1)} \sum_{k=0}^{\alpha_1-1} \sum_{l=0}^k C_k^l (1 - \varphi_1(1))^{l+1} \varphi_1^{k-l}(1) \\ & \times \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-d(1))^m}{m!} \int_1^{(0+)} (1-v)^{\nu_1(1)+l+m-1} \ln v dv. \end{aligned} \quad (18)$$

К контурному интегралу применяем интегрирование по частям и после вычисления вычета в точке $v = 0$ переходим к интегралу по действительной полуоси:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_1^{(0+)} (1-v)^{\nu_1(1)+l+m-1} \ln v dv &= \frac{1}{2\pi i} \int_1^{(0+)} \frac{(1-v)^{\nu_1(1)+l+m}}{(\nu_1(1) + l + m)v} dv \\ &= \frac{1}{\nu_1(1) + l + m} = \int_0^{+\infty} e^{-(\nu_1(1)+l+m)v} dv. \end{aligned}$$

После подстановки последнего интеграла в (18) и суммирования выражение (17) приобретает вид

$$m_{\alpha_1} = \varphi'_0(1) \alpha_1 - \nu'_0(1) \int_0^{+\infty} e^{d(1)(1-e^{-v}) - \nu_1(1)v} \frac{1 - ((1 - \varphi_1(1))e^{-v} + \varphi_1(1))^{\alpha_1}}{1 - e^{-v}} dv. \quad (19)$$

Теорема 3. Пусть выполнены условия теоремы 2. Для математического ожидания финального распределения имеет место асимптотическая оценка

$$m_{\alpha_1} = \varphi'_0(1) \alpha_1 - \nu'_0(1) \ln \alpha_1 + O(1), \quad \alpha_1 \rightarrow \infty. \quad (20)$$

Доказательство. Используя представление логарифма

$$\ln x = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-v} - e^{-xv}}{v} dv, \quad x > 0,$$

[9, гл. 1, § 7, формула (18)], разобьем интеграл в выражении (19) на сумму интегралов. Тогда

$$\begin{aligned} & \int_0^{+\infty} e^{d(1)(1-e^{-v}) - \nu_1(1)v} \frac{1 - ((1 - \varphi_1(1))e^{-v} + \varphi_1(1))^{\alpha_1}}{1 - e^{-v}} dv \\ &= \ln((1 - \varphi_1(1)) \alpha_1 + \nu_1(1)) + \int_0^{+\infty} \left(\frac{e^{d(1)(1-e^{-v}) - \nu_1(1)v}}{1 - e^{-v}} - \frac{e^{-v}}{v} \right) dv \end{aligned} \quad (21)$$

$$+ \int_0^{+\infty} \left(\frac{1}{v} - \frac{1}{1 - e^{-v}} \right) e^{d(1)(1-e^{-v}) - \nu_1(1)v} ((1 - \varphi_1(1))e^{-v} + \varphi_1(1))^{\alpha_1} dv \quad (22)$$

$$+ \int_0^{+\infty} \frac{1 - e^{d(1)(1-e^{-v})}}{v} e^{-((1 - \varphi_1(1)) \alpha_1 + \nu_1(1))v} dv \quad (23)$$

$$\begin{aligned} & + \int_0^{\ln(1-1/\varphi_1(1))} \frac{e^{-(1-\varphi_1(1)) \alpha_1 v} - ((1 - \varphi_1(1))e^{-v} + \varphi_1(1))^{\alpha_1}}{v} \\ & \times e^{d(1)(1-e^{-v}) - \nu_1(1)v} dv \end{aligned} \quad (24)$$

$$+ \int_{\ln(1-1/\varphi_1(1))}^{+\infty} \frac{e^{-(1-\varphi_1(1))\alpha_1 v} - ((1-\varphi_1(1))e^{-v} + \varphi_1(1))^{\alpha_1}}{v} \times e^{d(1)(1-e^{-v})-\nu_1(1)v} dv. \quad (25)$$

В случае $\varphi_1(1) = 0$ слагаемые (24) и (25) отсутствуют. В интегралах (21)–(24) подынтегральные функции ограничены при $v \rightarrow 0+$, поэтому интегралы сходятся. Интегралы (22), (23) и (25) стремятся к нулю при $\alpha_1 \rightarrow \infty$. Для оценки интеграла (24) воспользуемся неравенством $1 - x^{\alpha_1} \leq \alpha_1(1 - x)$ при $0 < x < 1$ и ограниченностью функции

$$y(v) = \frac{e^{-(1-\varphi_1(1))v} - (1-\varphi_1(1))e^{-v} - \varphi_1(1)}{ve^{-(1-\varphi_1(1))v}}, \quad 0 < v < \ln\left(1 - \frac{1}{\varphi_1(1)}\right)$$

(так как $\lim_{v \rightarrow 0} y(v) = 0$). Имеем для (24)

$$\begin{aligned} & \int_0^{\ln(1-1/\varphi_1(1))} \left(1 - \left(\frac{(1-\varphi_1(1))e^{-v} + \varphi_1(1)}{e^{-(1-\varphi_1(1))v}}\right)^{\alpha_1}\right) \frac{e^{d(1)(1-e^{-v})-\nu_1(1)v-(1-\varphi_1(1))\alpha_1 v}}{v} dv \\ & \leq \alpha_1 \int_0^{\ln(1-1/\varphi_1(1))} y(v) e^{d(1)(1-e^{-v})-\nu_1(1)v-(1-\varphi_1(1))\alpha_1 v} dv \\ & \leq \alpha_1 e^{d(1)} \sup y(v) \int_0^{\ln(1-1/\varphi_1(1))} e^{-(1-\varphi_1(1))\alpha_1 v} dv \leq \frac{e^{d(1)}}{1-\varphi_1(1)} \sup y(v). \end{aligned}$$

Из ограниченности значений интегралов (21)–(25) с учетом равенства $\ln((1-\varphi_1(1))\alpha_1 + \nu_1(1)) = \ln \alpha_1 + O(1)$, $\alpha_1 \rightarrow \infty$, получаем оценку (20). Теорема доказана.

При $h_2(s, u) = p_0^2 + p_1^2 s$ (парные взаимодействия не дают частиц типа T_2) имеем $\varphi_0(u) \equiv 1$, $\varphi_1(u) \equiv -p_0^2$ и $m_{\alpha_1} = (\lambda_1/\lambda_2) a_2^1 \ln \alpha_1 / (1 + p_0^2) + O(1)$, $\alpha_1 \rightarrow \infty$, где $a_2^1 = (\partial h_1(s, u)/\partial u)|_{s=1, u=1}$ — среднее число частиц типа T_2 , образующихся при превращении частицы типа T_1 [12].

Возможность исследования асимптотики дисперсии финального распределения при $\alpha_1 \rightarrow \infty$, исходя из представления (11), остается неясной.

6. Предельная теорема для финального распределения. Случай $h_1(s, u) = h_0^1(u) + h_1^1(u)s$, $h_2(s, u) = h_0^2(u)s + h_2^2(u)s^2$, $p_0^1 > 0$, $p_2^2 < 1$. В рассматриваемом случае $\varphi_0(u) = h_1^2(u)/(1 - h_2^2(u))$, $\varphi_1(u) \equiv 0$ и $d(u) \equiv 0$. Учитывая равенство $\Phi(a, b; z) = e^z \Phi(b - a, b; -z)$ [9, гл. 6, § 3], из формулы (12) имеем $w_0(z, u) = \Phi(\nu_1(u), \nu_0(u) + \nu_1(u); \varphi_0(u)z)$. Используя (13), приравняв коэффициенты при одинаковых степенях z в ряде для $w_0(z, u)$ и в ряде (2), получаем производящую функцию финального распределения ($\alpha_1 > 0$)

$$f_{\alpha_1}(u) = \varphi_0^{\alpha_1}(u) \frac{\nu_1(u) \cdots (\nu_1(u) + \alpha_1 - 1)}{(\nu_0(u) + \nu_1(u)) \cdots (\nu_0(u) + \nu_1(u) + \alpha_1 - 1)}, \quad |u| \leq 1. \quad (26)$$

Учитывая свойство гамма-функции $\Gamma(z + \alpha_1) = z(z + 1) \cdots (z + \alpha_1 - 1) \Gamma(z)$, приходим к выражению

$$f_{\alpha_1}(u) = \varphi_0^{\alpha_1}(u) \frac{\Gamma(\nu_1(u) + \alpha_1) \Gamma(\nu_0(u) + \nu_1(u))}{\Gamma(\nu_0(u) + \nu_1(u) + \alpha_1) \Gamma(\nu_1(u))}. \quad (27)$$

Используя выражения $\nu_1(u) = (\lambda_1/\lambda_2) h_0^1(u)/h_2^2(u)$, $\nu_0(u) + \nu_1(u) = (\lambda_1/\lambda_2)(1 - h_1^1(u))/(1 - h_2^2(u))$, можно доказать аналитичность функции (26) в области $|u| < 1 + \varepsilon$ при некотором $\varepsilon > 0$. Вычислим математическое ожидание $m_{\alpha_1} = f'_{\alpha_1}(1)$ и дисперсию $\sigma_{\alpha_1}^2 = f''_{\alpha_1}(1) + f'_{\alpha_1}(1) - (f'_{\alpha_1}(1))^2$. При дифференцировании (27) воспользуемся функцией $\psi(z) = d \ln \Gamma(z)/dz$ [9, гл. 1, § 7], [8, гл. 12]. Получаем выражения

$$m_{\alpha_1} = \varphi'_0(1) \alpha_1 - \nu'_0(1)(\psi(\nu_1(1) + \alpha_1) - \psi(\nu_1(1))), \quad (28)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{\alpha_1}^2 &= (\varphi''_0(1) + \varphi'_0(1) - (\varphi'_0(1))^2) \alpha_1 - (\nu''_0(1) + \nu'_0(1))(\psi(\nu_1(1) + \alpha_1) - \psi(\nu_1(1))) \\ &\quad - \nu'_0(1)(\nu'_0(1) + 2\nu'_1(1))(\psi'(\nu_1(1) + \alpha_1) - \psi'(\nu_1(1))). \end{aligned} \quad (29)$$

Формула (28) следует также из (19) и интегрального представления для функции $\psi(z)$ [9, гл. 1, § 7, формула (17)].

Теорема 4. Пусть для ветвящегося процесса $h_1(s, u) = h_0^1(u) + h_1^1(u)s$, $h_2(s, u) = h_1^2(u)s + h_2^2(u)s^2$ и $p_0^1 > 0$, $p_2^2 < 1$. Для математического ожидания и дисперсии финального распределения имеют место асимптотические формулы

$$m_{\alpha_1} \sim \varphi_0'(1)\alpha_1 - \nu_0'(1) \ln \alpha_1 + \nu_0'(1)\psi(\nu_1(1)), \quad (30)$$

$$\sigma_{\alpha_1}^2 \sim (\varphi_0''(1) + \varphi_0'(1) - (\varphi_0'(1))^2)\alpha_1 - (\nu_0''(1) + \nu_0'(1)) \ln \alpha_1, \quad \alpha_1 \rightarrow \infty. \quad (31)$$

Для вывода асимптотик (30) и (31) используются выражения (28), (29) и асимптотические формулы $\psi(z) \sim \ln z$, $\psi'(z) \sim 1/z$ при $z \rightarrow \infty$, $|\arg z| < \pi$ [9, гл. 1, § 18].

Теорема 5. Пусть выполнены условия теоремы 4, $\partial h_1(s, u)/\partial u \neq 0$ или $\partial h_2(s, u)/\partial u \neq 0$. При фиксированном $x \in (-\infty, \infty)$

$$\lim_{\alpha_1 \rightarrow \infty} \mathbf{P} \left\{ \frac{\eta_{\alpha_1} - m_{\alpha_1}}{\sigma_{\alpha_1}} < x \right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-y^2/2} dy. \quad (32)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Покажем, что характеристическая функция $\hat{f}_{\alpha_1}(\tau) = \mathbf{E} \exp(i\tau(\eta_{\alpha_1} - m_{\alpha_1})/\sigma_{\alpha_1})$ нормированной случайной величины $(\eta_{\alpha_1} - m_{\alpha_1})/\sigma_{\alpha_1}$ стремится при $\alpha_1 \rightarrow \infty$ к функции $\exp(-\tau^2/2)$, являющейся характеристической функцией стандартного нормального распределения [3].

Введем функцию $y_{\alpha_1}(\tau) = \exp(i\tau/\sigma_{\alpha_1})$. Тогда $\hat{f}_{\alpha_1}(\tau) = y_{\alpha_1}(-m_{\alpha_1}\tau) f_{\alpha_1}(y_{\alpha_1}(\tau))$, и из (27) имеем

$$\hat{f}_{\alpha_1}(\tau) = y_{\alpha_1}(-m_{\alpha_1}\tau) \varphi_0^{\alpha_1}(y_{\alpha_1}(\tau)) \frac{\Gamma(\nu_1(y_{\alpha_1}(\tau)) + \alpha_1) \Gamma(\nu_0(y_{\alpha_1}(\tau)) + \nu_1(y_{\alpha_1}(\tau)))}{\Gamma(\nu_0(y_{\alpha_1}(\tau)) + \nu_1(y_{\alpha_1}(\tau)) + \alpha_1) \Gamma(\nu_1(y_{\alpha_1}(\tau)))}.$$

Используя разложение Тейлора $\ln \varphi_0(e^v) = \varphi_0'(1)v + (\varphi_0''(1) + \varphi_0'(1) - (\varphi_0'(1))^2)v^2/2 + o(v^2)$, $v \rightarrow 0$, получаем при $\alpha_1 \rightarrow \infty$

$$\varphi_0^{\alpha_1}(y_{\alpha_1}(\tau)) = \exp \left(i\tau \frac{\varphi_0'(1)\alpha_1}{\sigma_{\alpha_1}} - \tau^2 \frac{(\varphi_0''(1) + \varphi_0'(1) - (\varphi_0'(1))^2)\alpha_1}{2\sigma_{\alpha_1}^2} + o\left(\frac{\alpha_1}{\sigma_{\alpha_1}^2}\right) \right). \quad (33)$$

С помощью формулы Стирлинга $\Gamma(z) \sim \sqrt{2\pi} \exp((z - \frac{1}{2}) \ln z - z)$, $z \rightarrow \infty$, $|\arg z| < \pi$, получаем

$$\begin{aligned} & \frac{\Gamma(\nu_1(y_{\alpha_1}(\tau)) + \alpha_1)}{\Gamma(\nu_0(y_{\alpha_1}(\tau)) + \nu_1(y_{\alpha_1}(\tau)) + \alpha_1)} \\ & \sim \exp \left(\left(\left(\nu_1(y_{\alpha_1}(\tau)) + \alpha_1 - \frac{1}{2} \right) \ln \left(1 - \frac{\nu_0(y_{\alpha_1}(\tau))}{\nu_0(y_{\alpha_1}(\tau)) + \nu_1(y_{\alpha_1}(\tau)) + \alpha_1} \right) \right. \right. \\ & \quad \left. \left. - \nu_0(y_{\alpha_1}(\tau)) \ln(\nu_0(y_{\alpha_1}(\tau)) + \nu_1(y_{\alpha_1}(\tau)) + \alpha_1) + \nu_0(y_{\alpha_1}(\tau)) \right) \right). \end{aligned} \quad (34)$$

Поскольку $\ln(1+z) \sim z$, $z \rightarrow 0$, то, учитывая, что $\nu_0(y_{\alpha_1}(\tau)) \rightarrow 0$, $\nu_1(y_{\alpha_1}(\tau)) \rightarrow \nu_1(1)$ при $\alpha_1 \rightarrow \infty$, первое слагаемое под знаком экспоненты в выражении (34) стремится к нулю. Так как $\ln(\nu_0(y_{\alpha_1}(\tau)) + \nu_1(y_{\alpha_1}(\tau)) + \alpha_1) \sim \ln \alpha_1$, $\alpha_1 \rightarrow \infty$, то имеем

$$\frac{\Gamma(\nu_1(y_{\alpha_1}(\tau)) + \alpha_1)}{\Gamma(\nu_0(y_{\alpha_1}(\tau)) + \nu_1(y_{\alpha_1}(\tau)) + \alpha_1)} \sim \exp(-\nu_0(y_{\alpha_1}(\tau)) \ln \alpha_1). \quad (35)$$

Применяя разложение Тейлора $\nu_0(e^v) = \nu_0'(1)v + (\nu_0''(1) + \nu_0'(1))v^2/2 + o(v^2)$, $v \rightarrow 0$, из (35) получаем при $\alpha_1 \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} & \frac{\Gamma(\nu_1(y_{\alpha_1}(\tau)) + \alpha_1)}{\Gamma(\nu_0(y_{\alpha_1}(\tau)) + \nu_1(y_{\alpha_1}(\tau)) + \alpha_1)} \\ & = \exp \left(-i\tau \frac{\nu_0'(1) \ln \alpha_1}{\sigma_{\alpha_1}} + \tau^2 \frac{(\nu_0''(1) + \nu_0'(1)) \ln \alpha_1}{2\sigma_{\alpha_1}^2} + o\left(\frac{\ln \alpha_1}{\sigma_{\alpha_1}^2}\right) \right). \end{aligned} \quad (36)$$

Перемножая $y_{\alpha_1}(-m_{\alpha_1}\tau)$, выражения (33), (36) и учитывая, что

$$\Gamma(\nu_0(y_{\alpha_1}(\tau)) + \nu_1(y_{\alpha_1}(\tau))) \sim \Gamma(\nu_1(y_{\alpha_1}(\tau))), \quad \alpha_1 \rightarrow \infty,$$

имеем при $h_2(s, u) \neq s$

$$\hat{f}_{\alpha_1}(\tau) = \exp \left(i\tau \frac{\varphi'_0(1)\alpha_1 - \nu'_0(1) \ln \alpha_1 - m_{\alpha_1}}{\sigma_{\alpha_1}} - \tau^2 \frac{(\varphi''_0(1) + \varphi'_0(1) - (\varphi'_0(1))^2)\alpha_1 - (\nu''_0(1) + \nu'_0(1)) \ln \alpha_1}{2\sigma_{\alpha_1}^2} + o\left(\frac{\alpha_1}{\sigma_{\alpha_1}^2}\right) \right). \quad (37)$$

При $h_2(s, u) = s$ имеем $\varphi_0(u) \equiv 1$, и остаточный член в последней формуле равен $o(\ln \alpha_1 / \sigma_{\alpha_1}^2)$. Из оценки (30) следует, что первое слагаемое под знаком экспоненты в выражении (37) стремится к нулю. Применяя ко второму слагаемому и остаточному члену асимптотику (31), получаем

$$\lim_{\alpha_1 \rightarrow \infty} \hat{f}_{\alpha_1}(\tau) = \exp \left(-\frac{\tau^2}{2} \right).$$

Теорема доказана.

З а м е ч а н и е 2. Производящая функция финальных вероятностей (26) записывается в виде произведения

$$f_{\alpha_1}(u) = g_1(u) \cdots g_{\alpha_1}(u),$$

где $g_n(u) = \varphi_0(u)(\nu_1(u) + n - 1) / (\nu_0(u) + \nu_1(u) + n - 1)$, $n = 1, \dots, \alpha_1$, — вероятностные производящие функции. Применение теоремы Ляпунова [3, § 40] к сумме $\eta_{\alpha_1} = \eta^1 + \dots + \eta^{\alpha_1}$ независимых случайных величин η^n с производящими функциями $g_n(u)$ с целью вывода соотношения (32) требует проверки условия указанной теоремы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Баруча-Рид А. Т. Элементы теории марковских процессов и их приложения. М.: Наука, 1969, 512 с.
2. Ван Кампен Н. Г. Стохастические процессы в физике и химии. М.: Высшая школа, 1990, 376 с.
3. Гнеденко Б. В. Курс теории вероятностей. М.: УРСС, 2001, 318 с.
4. Севастьянов Б. А. Ветвящиеся процессы. М.: Наука, 1971, 436 с.
5. Севастьянов Б. А., Калинин А. В. Ветвящиеся случайные процессы с взаимодействием частиц. — Докл. АН СССР, 1982, т. 264, № 2, с. 306–308.
6. Калинин А. В. Финальные вероятности для ветвящегося случайного процесса с взаимодействием частиц. — Докл. АН СССР, 1983, т. 269, № 6, с. 1309–1312.
7. Калинин А. В. О вероятности вырождения ветвящегося процесса с двумя комплексами взаимодействия частиц. — Теория вероятн. и ее примен., 2001, т. 46, в. 2, с. 376–381.
8. Уиттекер Э. Т., Ватсон Дж. Н. Курс современного анализа. Ч. 2: Трансцендентные функции. М.: Физматлит, 1963, 516 с.
9. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Гипергеометрическая функция. Функция Лежандра. М.: Наука, 1973, 294 с.
10. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Наука, 1971, 576 с.
11. Ланге А. М. Стационарное распределение в открытой стохастической системе с парным взаимодействием частиц. — Вестн. МГТУ им. Н.Э. Баумана, сер. естеств. науки, 2005, в. 1 (16), с. 3–22.
12. Ланге А. М. Асимптотические свойства финальных вероятностей одного ветвящегося процесса с взаимодействием частиц. — Обзор. прикл. и промышл. матем., 2005, т. 12, в. 3, с. 669–770.

Поступила в редакцию
13.II.2006