Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Информация о Восьмой Колмогоровской студенческой олимпиаде по теории вероятностей, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2009, том 54, выпуск 2, 411–413

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp2802>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.187.69

26 апреля 2023 г., 17:35:51

20 мая — **В. Р. Фаталов** (Москва). *Точные асимптотики вероятностных распределений и функциональных интегралов: метод Лапласа.*

Координатор семинара в весеннем семестре 2009 г.
профессор В. И. Питербург,
Ученый секретарь семинара в весеннем семестре 2009 г.
А. Т. Абакирова

ИНФОРМАЦИЯ О ВОСЬМОЙ КОЛМОГОРОВСКОЙ СТУДЕНЧЕСКОЙ ОЛИМПИАДЕ ПО ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

В ознаменование дня рождения А. Н. Колмогорова кафедра теории вероятностей механико-математического факультета Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова при поддержке Московской государственной академии тонкой химической технологии им. М. В. Ломоносова провела восьмую Колмогоровскую студенческую олимпиаду по теории вероятностей. Информация о предыдущих олимпиадах содержится на сайте кафедры теории вероятностей (<http://mech.math.msu.su/probab>), см. также предыдущие выпуски журнала.

Олимпиада была проведена 18 апреля 2009 г. отдельно для I–II и III–V курсов (продолжительность — 5 часов). Оргкомитет констатирует, что в олимпиаде приняли участие 38 студентов I–II курсов и 41 студент III–V курсов механико-математического факультета, факультета ВМиК, химического факультета и факультета наук о материалах Московского государственного университета, а также Государственного университета «Высшая школа экономики», механико-математического факультета Киевского национального университета, математико-механического факультета Санкт-Петербургского государственного университета, факультета прикладной математики и компьютерных технологий Вологодского государственного педагогического университета.

Предлагавшиеся на олимпиаде задачи

В скобках после номера задачи указываются курсы, на которых предлагалась данная задача, затем число решивших ее студентов I–II курсов и, наконец, число студентов III–V курсов, решивших эту задачу.

Задача 1. (I–II; 15) Пусть случайная величина X имеет конечную дисперсию и не равна тождественно нулю. Доказать, что $P(X = 0) \leq (EX^2)^{-1}DX$.

Задача 2. (I–V; 8, 4) Пусть множества $A_1, \dots, A_{2000} \subset A$ содержат по крайней мере по 6 элементов каждое и не все эти множества совпадают. Доказать, что существует 100 таких различных разбиений множества A на 5 попарно непересекающихся подмножеств $E_1, \dots, E_5$, что каждое множество A_i содержит представителей хотя бы двух подмножеств E_i .

Задача 3. (I–V; 19, 29) Из контейнера A , в котором было 1000 зеленых и 3000 красных яблок, взяли половину яблок и перенесли в контейнер B , в котором к тому времени уже лежало 3000 зеленых и 1000 красных яблок. Затем из контейнера B извлекли одно яблоко. Найти вероятность, что оно зеленое.

Задача 4. (I–V; 2, 5) Жители города N любят после работы, которая у каждого заканчивается в случайный момент, уделить некоторое время рыбалке. В озере водятся караси и лещи, причем доля лещей равна p . В городе действует закон, запрещающий ловить более одного леща за день, а горожане исключительно законопослушны и после первой поимки леща сразу возвращаются домой. Найти долю лещей среди всей пойманной в городе рыбы.

Задача 5. (I–V; 9, 21) Последовательность случайных величин $(X_n)_{n \in \mathbf{N}}$ сходится по вероятности к случайной величине X , причем при каждом $n \in \mathbf{N}$ величины X_n и X независимы. Верно ли, что $X = \text{const}$ п.н.?

Задача 6. (I–V; 1, 1) Пусть $X_1, X_2, \dots$ — последовательность пуассоновских случайных величин с параметром 1. Доказать, что $\mathbf{E} \max\{X_1, \dots, X_n\} = O(\ln n)$ при $n \rightarrow \infty$.

Задача 7. (I–V; 2, 5) Пусть $(S_n)_{n \in \mathbf{N}}$ — простейшее случайное блуждание, т.е. $S_0 = 0$ и $S_n = \xi_1 + \dots + \xi_n$, где $(\xi_j)_{j \in \mathbf{N}}$ независимы и принимают значения 1 и -1 с вероятностями $1/2$. Обозначим $\tau = \inf\{n \in \mathbf{N}: S_n = 0\}$ момент первого возвращения в нуль. Для каждого $a \in \mathbf{N}$ найти $\mathbf{E} N_a$, где $N_a = |\{j < \tau: S_j = a\}|$ — время, проведенное блужданием в точке a до момента τ .

Задача 8. Пусть $W = (W_t)_{t \geq 0}$ — винеровский процесс. а) (III–V; 8) Найти математическое ожидание времени, которое его график проведет выше прямой $y = t$.

б) (III–V; 3) Записать дисперсию этого времени в виде интеграла от элементарных функций.

в) (III–V; 0) Вычислить ее.

Задача 9. (III–V; 0) Делается одно наблюдение X нормальной случайной величины с неизвестным средним $\mu \in \mathbf{R}$ и дисперсией 1. Для оценки μ используют выражение $f(X)$, где функция f непрерывна и $\mathbf{E} f(X)^2 < \infty$ при любом μ . Доказать, что минимум выражения $\sup_{\mu \in \mathbf{R}} \mathbf{E} (f(X) - \mu)^2$ по всем таким f достигается при $f(x) = x$.

Задача 10. (I–V; 2, 2) Пусть $p > 0$, а $X_1, X_2, \dots$ — такие случайные величины на одном и том же вероятностном пространстве, что при каждом $\varepsilon > 0$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1} \mathbf{P}(\max_{k=1, \dots, n} |X_k| > \varepsilon n^{1/p})$ сходится. Доказать, что $X_n/n^{1/p} \rightarrow 0$ п.н., когда $n \rightarrow \infty$.

Победители олимпиады

Разбор задач и награждение победителей проводились на Большом семинаре кафедры теории вероятностей 22 апреля 2009 г.

Победители среди студентов I–II курсов

Первая премия

Шамов Александр Александрович — студент II курса механико-математического факультета Киевского национального университета (8 решенных задач).

Вторая премия

Богатый Иван Симеонович — студент II курса механико-математического факультета Московского государственного университета (4 решенные задачи).

Окунев Алексей Владимирович — студент I курса механико-математического факультета Московского государственного университета (4 решенные задачи).

Розенштейн Илья Петрович — студент II курса механико-математического факультета Московского государственного университета (4 решенные задачи).

Третья премия

Авилов Артем Алексеевич — студент II курса механико-математического факультета Московского государственного университета (3 решенные задачи).

Гончарук Наталия Борисовна — студентка II курса механико-математического факультета Московского государственного университета (3 решенные задачи).

Есин Алексей Алексеевич — студент II курса механико-математического факультета Московского государственного университета (3 решенные задачи).

Остроумова Людмила Александровна — студентка II курса механико-математического факультета Московского государственного университета (3.5 решенные задачи).

Сафин Станислав Рафикович — студент II курса механико-математического факультета Московского государственного университета (3 решенные задачи).

Шмаров Владимир Альбертович — студент II курса механико-математического факультета Московского государственного университета (3 решенные задачи).

Победители среди студентов III–V курсов

Первая премия не присуждена.

Вторая премия

Бутковский Олег Александрович — студент V курса механико-математического факультета Московского государственного университета, научный руководитель — А. В. Булинский (5.5 решенных задач).

Девятков Ростислав Андреевич — студент III курса механико-математического факультета Московского государственного университета, научный руководитель — И. В. Аржанцев (5.5 решенных задач).

Третья премия

Демичев Вадим Петрович — студент IV курса механико-математического факультета Московского государственного университета, научный руководитель — А. В. Булинский (4 решенные задачи).

Каменов Андрей Александрович — студент V курса механико-математического факультета Московского государственного университета, научный руководитель — А. Н. Ширяев (4 решенные задачи).

Поджалюзин Александр Викторович — студент IV курса математико-механического факультета Санкт-Петербургского государственного университета, научный руководитель — Я. Ю. Никитин (4 решенные задачи).

10 мая 2009 г.

*Оргкомитет восьмой
Колмогоровской студенческой олимпиады
по теории вероятностей:
член-корр. РАН, профессор А. Н. Ширяев,
к.ф.-м.н. А. В. Куликов,
к.ф.-м.н., ассистент Е. М. Суханова,
к.ф.-м.н., доцент А. П. Шапкин,
аспиранты А. Т. Абакирова, М. М. Мусин,
С. П. Прохоренков, И. Г. Эрлих,
Д. А. Ярцева, П. А. Яськов*