Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. А. Ватутин, В. И. Вахтель, Внезапное вырождение критического ветвящегося процесса в случайной среде, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2009, том 54, выпуск 3, 417–438

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp2803>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.89.185.249

26 апреля 2023 г., 14:20:03

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЯ

Основан в январе 1956 г.
Выходит 4 раза в год
Москва • Наука

Том 54
Выпуск 3, 2009 год
июль, август, сентябрь

© 2009 г. ВАТУТИН В. А.* , ВАХТЕЛЬ В. И.**

ВНЕЗАПНОЕ ВЫРОЖДЕНИЕ КРИТИЧЕСКОГО ВЕТВЯЩЕГОСЯ ПРОЦЕССА В СЛУЧАЙНОЙ СРЕДЕ¹⁾

Пусть T — момент вырождения критического ветвящегося процесса $Z = (Z_n, n \geq 0)$ в случайной среде, порожденной последовательностью независимых одинаково распределенных вероятностных производящих функций. Мы изучаем асимптотическое поведение вероятности вырождения процесса Z в момент $n \rightarrow \infty$ и показываем, что если логарифм (случайного) математического ожидания числа потомков одной частицы принадлежит области притяжения негауссовского устойчивого закона, то вырождение процесса происходит под воздействием чрезвычайно неблагоприятной среды, приводящей к мгновенной гибели всех частиц в момент T в процессе, имеющем в момент $T - 1$ экспоненциально большую популяцию. Мы также даем интерпретацию полученных результатов в терминах случайных блужданий в случайной среде.

Ключевые слова и фразы: ветвящиеся процессы в случайной среде, случайное блуждание в случайной среде, локальное время, предельные теоремы, перескок, недоскок, условные предельные теоремы.

1. Введение и основные результаты. Рассмотрим ветвящийся процесс в случайной среде, порожденной последовательностью независимых одинаково распределенных вероятностных производящих функций

$$f_n(s) := \sum_{k=0}^{\infty} f_{nk} s^k, \quad n \geq 0. \quad (1)$$

*Математический институт им. В.А.Стеклова РАН, ул. Губкина, 8, 119991 Москва, Россия; e-mail: vatutin@mi.ras.ru

**Mathematical Institute, University of Munich, Theresienstrasse, 39, D-80333, Munich, Germany; e-mail: wachtel@mathematik.uni-muenchen.de

¹⁾ Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ-ННИО 08-01-91954.

Обозначив Z_n количество частиц в процессе в момент времени n , определим эволюцию процесса соотношениями

$$Z_0 := 1, \\ \mathbf{E}[s^{Z_{n+1}} | f_0, f_1, \dots, f_n; Z_0, Z_1, \dots, Z_n] := (f_n(s))^{Z_n}, \quad n \geq 0.$$

Положим $X_k := \ln f'_{k-1}(1)$, $k \geq 1$, и обозначим $S_0 := 0$, $S_n := X_1 + \dots + X_n$. Следуя работе [1], будем называть процесс $Z := \{Z_n, n \geq 0\}$ *критическим* тогда и только тогда, когда случайное блуждание $S := \{S_n, n \geq 0\}$ является осциллирующим, т.е. если

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} S_n = \infty \quad \text{и} \quad \liminf_{n \rightarrow \infty} S_n = -\infty$$

с вероятностью 1. Это означает, что момент остановки

$$T^- := \min\{k \geq 1: S_k < 0\}$$

конечен с вероятностью 1 и, как результат (см. [1]), момент вырождения

$$T := \min\{k \geq 1: Z_k = 0\}$$

процесса Z также конечен с вероятностью 1. Ввиду этого представляет интерес изучение асимптотического поведения вероятности невырождения $\mathbf{P}(T > n)$ при $n \rightarrow \infty$. Эта задача рассматривалась в работе [1], где показано, что если

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}(S_n > 0) =: \rho \in (0, 1), \quad (2)$$

то (при некоторых слабых дополнительных условиях)

$$\mathbf{P}(T > n) \sim \theta \mathbf{P}(T^- > n) = \theta \frac{l(n)}{n^{1-\rho}}, \quad (3)$$

где $l(n)$ — медленно меняющаяся функция, а θ — известная положительная константа, явное выражение которой описано формулой (4.10) работы [1].²⁾

Локальная версия соотношения (3) была получена в работе [7], где установлено, что если производящие функции $f_n(s)$, $n = 0, 1, \dots$, числа непосредственных потомков частиц дробно-линейны с вероятностью 1 и (наряду с некоторыми другими условиями) $\mathbf{E} X_n = 0$ и $\mathbf{D} X_n \in (0, \infty)$, то

$$\mathbf{P}(T = n) \sim \theta \mathbf{P}(T^- = n) \sim \frac{C}{n^{3/2}}. \quad (4)$$

²⁾ Мы пишем $a_n \sim b_n$, если $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n/b_n) = 1$.

Цель данной работы — уточнить эквивалентность (3) и дополнить соотношение (4) исследованием асимптотического поведения вероятности $\mathbf{P}(T = n)$ при $n \rightarrow \infty$ в случае $\mathbf{D}X_n = \infty$. Кроме того, будет изучено асимптотическое поведение совместного распределения случайных величин T и Z_{T-1} при $T \rightarrow \infty$.

Рассмотрим множество

$$\mathcal{A} := \{0 < \alpha < 1, |\beta| < 1\} \cup \{1 < \alpha < 2, |\beta| \leq 1\} \\ \cup \{\alpha = 1, \beta = 0\} \cup \{\alpha = 2, \beta = 0\}$$

в $\mathbf{R}^2$. Для $(\alpha, \beta) \in \mathcal{A}$ и случайной величины X будем писать $X \in \mathcal{D}(\alpha, \beta)$, если распределение случайной величины X принадлежит области притяжения устойчивого закона с характеристической функцией

$$G_{\alpha, \beta}(t) := \exp \left\{ -c|t|^\alpha \left(1 - i\beta \frac{t}{|t|} \operatorname{tg} \frac{\pi\alpha}{2} \right) \right\}, \quad c > 0, \quad (5)$$

и, кроме того, $\mathbf{E}X = 0$, если это математическое ожидание существует. Следовательно, найдется числовая последовательность $\{c_n, n \geq 1\}$ такая, что случайная последовательность $c_n^{-1}S_n$ сходится по распределению к устойчивому закону, характеристическая функция которого задается равенством (5). Заметим, что если $X_n \stackrel{d}{=} X \in \mathcal{D}(\alpha, \beta)$, то (см., например, [11]) величина ρ в (2) вычисляется по формуле

$$\rho = \begin{cases} \frac{1}{2}, & \text{если } \alpha = 1, \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi\alpha} \operatorname{arctg} \left(\beta \operatorname{tg} \frac{\pi\alpha}{2} \right) & \text{в остальных случаях.} \end{cases} \quad (6)$$

Введем следующее основное предположение.

У с л о в и е А. Для некоторых $0 < \alpha < 2$ и $|\beta| < 1$ случайные величины $X_n = \ln f'_{n-1}(1)$, $n \geq 1$, являются независимыми копиями случайной величины $X \in \mathcal{D}(\alpha, \beta)$.

Теперь мы можем сформулировать наш первый результат.

Теорема 1. Пусть производящие функции числа непосредственных потомков частиц являются геометрическими, т.е.

$$f_{n-1}(s) := \frac{e^{-X_n}}{1 + e^{-X_n} - s}, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (7)$$

где случайные величины X_n , $n \geq 1$, удовлетворяют условию А. Тогда

$$\mathbf{P}(T = n) \sim \theta \mathbf{P}(T^- = n) \sim \theta(1 - \rho) \frac{l(n)}{n^{2-\rho}} \quad \text{при } n \rightarrow \infty. \quad (8)$$

З а м е ч а н и е 1. В случае геометрических производящих функций числа непосредственных потомков частиц имеется явная формула

для условной вероятности события $\{T = n\}$ (при фиксации набора $f_0, f_1, \dots, f_{n-1}$) в терминах экспоненциального функционала сопровождающего случайного блуждания $\{S_k, k \geq 0\}$ (см. ниже равенство (48)). Таким образом, анализ свойств вероятности вырождения $\mathbf{P}(T = n)$ сводится в этой ситуации к исследованию некоторого функционала от сопровождающего случайного блуждания.

Обратимся теперь к совместному распределению случайной величины T и размера популяции Z_{T-1} . Здесь мы не будем ограничиваться случаем геометрических законов распределения числа непосредственных потомков частиц. Для того чтобы сформулировать соответствующий результат, положим

$$\zeta(b) := e^{-2X_1} \sum_{k=b}^{\infty} k^2 f_{0k}, \quad b = 0, 1, \dots,$$

и обозначим $\Lambda := \{\Lambda_t, 0 \leq t \leq 1\}$ извилину строго устойчивого процесса с параметрами α, β , т.е. строго устойчивый процесс Леви при условии его положительности в интервале $(0, 1]$ (более детальное описание см. в [3] и [4]). Наряду с Λ рассмотрим случайный процесс $\tilde{\Lambda} := \{\tilde{\Lambda}_t, 0 \leq t \leq 1\}$, задаваемый соотношением

$$\mathbf{E}[\phi(\tilde{\Lambda})] = \frac{\mathbf{E}[\Lambda_1^{-\alpha} \phi(\Lambda)]}{\mathbf{E} \Lambda_1^{-\alpha}} \text{ для любой функции } \phi \in D[0, 1],$$

где $D[0, 1]$ обозначает пространство функций на единичном интервале, не имеющих разрывов второго рода.

Теорема 2. Пусть выполнено условие A и существует $\delta > 0$ такое, что

$$\mathbf{E}(\ln^+ \zeta(b))^{\alpha+\delta} < \infty$$

для некоторого $b \geq 0$. Тогда для любого $x > 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mathbf{P}(Z_{n-1} > e^{x c_n}; T = n)}{\mathbf{P}(T^- = n)} = \theta \mathbf{P}(\tilde{\Lambda}_1 > x). \quad (9)$$

З а м е ч а н и е 2. Легко видеть, что $\zeta(2) \leq 4$ для геометрических законов распределения числа непосредственных потомков частиц. Таким образом, утверждение теоремы 2 выполнено для этого случая. Более того, ввиду (8)

$$\lim_{x \downarrow 0} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mathbf{P}(Z_{n-1} \leq e^{x c_n}; T = n)}{\mathbf{P}(T = n)} = 0, \quad (10)$$

если условия теоремы 1 выполнены.

Дополним теорему 2 следующим утверждением, справедливым для геометрических законов распределения числа непосредственных потомков частиц.

Теорема 3. Если выполнены условия теоремы 1, то при $n \rightarrow \infty$

$$\mathcal{L}\left(\frac{\ln Z_{[(n-1)t]}}{c_n}, 0 \leq t \leq 1 \mid T = n\right) \Rightarrow \mathcal{L}(\tilde{\Lambda}_t, 0 \leq t \leq 1).$$

Здесь символ $\Rightarrow$ обозначает слабую сходимость в топологии Скорохода в пространстве $D[0, 1]$.

В действительности справедлив еще более сильный результат. Для его формулировки возьмем набор целых чисел $0 \leq r \leq n-1$ и рассмотрим нормированный процесс $W^{r,n} = (W_t^{r,n}, 0 \leq t \leq 1)$ задаваемый соотношением

$$W_t^{r,n} := e^{-S_{r+[(n-r-1)t]}} Z_{r+[(n-r-1)t]}, \quad 0 \leq t \leq 1.$$

Теорема 4. Пусть $r_1, r_2, \dots$ — последовательность натуральных чисел такая, что $r_n \leq n-1$ и $r_n \rightarrow \infty$. Если выполнены условия теоремы 1, то

$$\mathcal{L}(W^{r_n,n} \mid T = n) \Rightarrow \mathcal{L}(W_t, 0 \leq t \leq 1) \quad \text{при } n \rightarrow \infty,$$

где предельный процесс является случайным процессом, траектории которого постоянны почти наверное, т.е. $\mathbf{P}(W_t = W \text{ для любого } t \in [0, 1]) = 1$ для некоторой случайной величины W . Более того,

$$\mathbf{P}(0 < W < \infty) = 1.$$

Применение теорем 1, 2 и 3 к случаю геометрических законов распределения числа непосредственных потомков частиц влечет, в частности, соотношение

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}(Z_{n-1} > e^{xc_n} \mid T = n) = \mathbf{P}(\tilde{\Lambda}_1 > x). \quad (11)$$

Последнее равенство и теорема 3 позволяют нам дать следующее нестрогое описание эволюции критического ветвящегося процесса Z , подчиняющегося условиям теоремы 1. Если процесс не выродился в течение длительного промежутка времени ($T = n \rightarrow \infty$), то величина $\ln Z_{[(n-1)t]}$ растет, грубо говоря, как $c_n \tilde{\Lambda}_t$ до момента $n-1$. Затем процесс мгновенно вырождается. В частности, случайная величина $\ln Z_{n-1}$ имеет порядок c_n (ср. со следствием 1.6 работы [1]). Этот факт можно интерпретировать как развитие процесса в благоприятной среде до момента $n-1$ и внезапное вырождение популяции в момент $T = n \rightarrow \infty$ под воздействием неблагоприятной, даже «катастрофической» среды в момент $n-1$. В конце данной работы мы покажем, что это явление резко контрастирует со случаем $\mathbf{E} X_n = 0$, $\sigma^2 := \mathbf{D} X_n \in (0, \infty)$. А именно, если дополнительно потребовать выполнение условий

$$\mathbf{E}(1 - f_{00})^{-1} < \infty, \quad \mathbf{E} f_{00}^{-1} < \infty, \quad (12)$$

то

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}(Z_{n-1} > N \mid T = n) = 0, \quad (13)$$

в то время как (см. следствие 1.6 в работе [1])

$$\mathcal{L}\left(\frac{\ln Z_{[(n-1)t]}}{\sigma\sqrt{n}}, 0 \leq t \leq 1 \mid Z_{n-1} > 0\right) \Rightarrow \mathcal{L}(B_t^+, 0 \leq t \leq 1),$$

где $B^+ := \{B_t^+, 0 \leq t \leq 1\}$ — броуновская извилина.

Эти факты показывают, что если $\sigma^2 < \infty$, то явление «внезапного вырождения» в благоприятной среде отсутствует. Более того, можно сказать, что в данной ситуации мы наблюдаем «естественное» вырождение. Действительно, вырождение процесса в момент $T = n$ происходит ввиду малого размера популяции в предыдущем поколении, а не под давлением неблагоприятной среды.

В данной работе мы используем так называемый «annealed approach», в соответствии с которым происходит усреднение характеристик процесса по мере, порожденной случайной средой. Как показано в работе [9], даже при выполнении условий теоремы 1 явление «внезапного вырождения» отсутствует в рамках «quenched approach», согласно которому различные характеристики процесса (математическое ожидание, закон распределения и т.д.) трактуются как случайные величины на множестве реализаций среды. «Типичная» траектория критического ветвящегося процесса в случайной среде в рамках «quenched approach» осциллирует перед вырождением. Процесс в такой ситуации проходит через ряд «бутылочных горлышек», соответствующих строго убывающим лестничным моментам сопровождающего случайного блуждания, и вымирает «естественным» образом ввиду малого числа индивидуумов в поколении $T - 1$ — точно так же, как это происходит при использовании «annealed approach» для случая $\sigma^2 < \infty$ (см. статью [9], где имеется детальное обсуждение этого вопроса).

Еще одним следствием теоремы 2 является нижняя оценка для вероятности $\mathbf{P}(T = n)$.

Следствие 1. При выполнении условий теоремы 2

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{\mathbf{P}(T = n)}{\mathbf{P}(T^- = n)} = \theta. \quad (14)$$

Мы предполагаем, что соотношение $\mathbf{P}(T = n) \sim \theta \mathbf{P}(T^- = n)$ выполнено для любого критического ветвящегося процесса в случайной среде, удовлетворяющего условиям теоремы 2, т.е. без предположения о геометрическом характере распределений числа непосредственных потомков частиц. Из теоремы 2 нетрудно вывести, что наша гипотеза эквива-

лентна справедливости равенства

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mathbf{P}(Z_{n-1} \leq e^{\varepsilon c_n}; T = n)}{\mathbf{P}(T^- = n)} = 0.$$

Но это и есть описанное выше явление «внезапного вырождения».

Известно, что между критическими (докритическими) ветвящимися процессами в случайной среде и простыми случайными блужданиями в случайной среде с нулевым (отрицательным) сносом существует естественное соответствие. В частности, соотношение (8) допускает интерпретацию в терминах следующего простого случайного блуждания $\{R_k, k \geq 0\}$ в случайной среде. Блуждание стартует из точки $R_0 = 0$ и имеет переходные вероятности

$$q_n := \mathbf{P}(R_{k+1} = n - 1 \mid R_k = n) = \frac{e^{-X_{n+1}}}{1 + e^{-X_{n+1}}}, \quad (15)$$

$$p_n := \mathbf{P}(R_{k+1} = n + 1 \mid R_k = n) = \frac{1}{1 + e^{-X_{n+1}}}, \quad (16)$$

$n \in \mathbf{Z}$, где набор $\{X_n, n \in \mathbf{Z}\}$ является последовательностью независимых одинаково распределенных случайных величин. Положим

$$\chi := \min\{k > 0: R_k = -1\}$$

и обозначим

$$\ell(n) := \sum_{0 \leq k \leq \chi} 1\{R_k = n\}, \quad n \geq -1,$$

— локальное время случайного блуждания в случайной среде, вычисленное для первой неотрицательной экскурсии этого блуждания. Ясно, что если

$$Z_n := \sum_{i=0}^n (-1)^i \ell(n - i - 1), \quad n \geq 0,$$

то

$$\ell(n) = Z_{n+1} + Z_n, \quad n \geq 0.$$

Можно показать, что если последовательность $S_n := \ln(p_1/q_1) + \dots + \ln(p_n/q_n)$ является осциллирующей или стремится к $-\infty$ с вероятностью 1, то последовательность $\{Z_n, n \geq 0\}$ является соответственно критическим или докритическим ветвящимся процессом в случайной среде, задаваемой производящими функциями

$$f_n(s) := \frac{q_n}{1 - p_n s}$$

(см. работу [8], где дано более детальное описание указанного соответствия). В частности, величина $T := \min\{j > 0: \ell(j) = 0\}$ является моментом вырождения процесса. Ясно, что если $\bar{R} := \max_{0 \leq k < \chi} R_k$, то

$$\{\bar{R} = n - 1\} = \{T = n\}.$$

В этих терминах теорема 1 и соотношение (11) эквивалентны следующему утверждению.

Теорема 5. Если вероятности q_n и p_n , заданные равенствами (15) и (16), таковы, что случайные величины

$$X_n := \ln \frac{p_n}{q_n}, \quad n \in \mathbf{Z},$$

удовлетворяют условию A, то при $n \rightarrow \infty$

$$\mathbf{P}(\bar{R} = n) \sim \theta \mathbf{P}(T^- = n).$$

Кроме того,

$$\mathbf{P}(\ell(n) > e^{xc_n} \mid \ell(n) > 0, \ell(n+1) = 0) \sim \mathbf{P}(\tilde{\Lambda}_1 > x), \quad x > 0,$$

а также

$$\mathcal{L}\left(\frac{\ln \ell([nt])}{c_n}, 0 \leq t \leq 1 \mid \ell(n) > 0, \ell(n+1) = 0\right) \Longrightarrow \mathcal{L}(\tilde{\Lambda}_t, 0 \leq t \leq 1).$$

Таким образом, рассматриваемое случайное блуждание в случайной среде много раз посещает уровень, максимально возможный для него за первую экскурсию, при условии, что длина χ этой экскурсии велика. Эта ситуация существенно отличается от случая $\mathbf{E} \ln(p_n/q_n) = 0$, $\mathbf{E} \ln^2(p_n/q_n) < \infty$, где (ср. с (13))

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}(\ell(n) > N \mid \ell(n) > 0, \ell(n+1) = 0) = 0.$$

2. Некоторые вспомогательные результаты о случайных блужданиях. Условимся обозначать $C, C_1, C_2, \dots$ положительные константы, значения которых могут меняться от формулы к формуле.

Известно (см., например, [5, гл. XVII, § 5]), что если $X \in \mathcal{D}(\alpha, \beta)$, то нормирующая последовательность

$$c_n := \min\{x > 0: \mathbf{P}(X > x) \leq n^{-1}\}, \quad n \geq 1, \quad (17)$$

для случайной последовательности S_n является правильно меняющейся порядка α^{-1} , т.е. существует функция $l_1(n)$, медленно меняющаяся на бесконечности, такая, что

$$c_n = n^{1/\alpha} l_1(n). \quad (18)$$

Более того, если $X \in \mathcal{D}(\alpha, \beta)$ с $\alpha \in (0, 2)$, то

$$\mathbf{P}(|X| > x) \sim \frac{1}{x^\alpha l_0(x)} \quad \text{при } x \rightarrow \infty, \quad (19)$$

где функция $l_0(x)$ медленно меняется на бесконечности и

$$\frac{\mathbf{P}(X < -x)}{\mathbf{P}(|X| > x)} \rightarrow q, \quad \frac{\mathbf{P}(X > x)}{\mathbf{P}(|X| > x)} \rightarrow p \quad \text{при } x \rightarrow \infty \quad (20)$$

с $p + q = 1$ и $\beta = p - q$ из представления (5). Кроме того,

$$\mathbf{P}(X < -c_n) \sim \frac{(2 - \alpha)q}{\alpha n} \quad \text{при } n \rightarrow \infty \quad (21)$$

в силу (17) и (18).

2.1. Асимптотическое поведение перескоков и недоскоков.

В этом пункте мы докажем несколько утверждений об асимптотическом поведении распределений перескоков и недоскоков. Нам кажется, что приводимые ниже результаты имеют самостоятельный интерес.

Пусть

$$\tau^- := \min\{k \geq 1: S_k \leq 0\}.$$

Р. Дарретт [4] показал, что если $X \in \mathcal{D}(\alpha, \beta)$, то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}(S_n \leq xc_n | \tau^- > n) = \mathbf{P}(\Lambda_1 \leq x) \quad \text{для всех } x \geq 0. \quad (22)$$

При помощи незначительных изменений доказательства соотношения (22), предложенного в работе [4], можно показать, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}(S_n \leq xc_n | T^- > n) = \mathbf{P}(\Lambda_1 \leq x) \quad \text{для всех } x \geq 0. \quad (23)$$

Мы установим аналоги равенств (22) и (23) при выполнении либо условия $\{\tau^- = n\}$, либо условия $\{T^- = n\}$.

Лемма 1. Если выполнено условие A, то для любого $u > 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}(S_n \leq -uc_n | \tau^- = n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}(S_n \leq -uc_n | T^- = n) = \frac{\mathbf{E}(u + \Lambda_1)^{-\alpha}}{\mathbf{E}\Lambda_1^{-\alpha}}.$$

Доказательство. Для фиксированного $u > 0$ имеем

$$\mathbf{P}(S_n \leq -uc_n; \tau^- = n) = \mathbf{E}[\mathbf{P}(X \leq -S_{n-1} - uc_n); \tau^- > n - 1]. \quad (24)$$

Поскольку при выполнении условий нашей леммы

$$\frac{\mathbf{P}(X \leq -x - uc_n)}{\mathbf{P}(X \leq -c_n)} = \left(\frac{x}{c_n} + u\right)^{-\alpha} (1 + o(1)) \quad (25)$$

равномерно по $x \in [0, \infty)$, то при больших n правую часть (24) можно аппроксимировать величиной $\mathbf{P}(X \leq -c_n) \mathbf{E}[(S_{n-1}/c_n + u)^{-\alpha}; \tau^- > n - 1]$. Используя (21) и (22), получаем

$$\mathbf{P}(S_n \leq -uc_n; \tau^- = n) \sim \frac{q(2 - \alpha)}{\alpha n} \mathbf{P}(\tau^- > n - 1) \mathbf{E}(\Lambda_1 + u)^{-\alpha}. \quad (26)$$

Напомним, что в соответствии с теоремой 7 работы [10]

$$\mathbf{P}(\tau^- = n) \sim (1 - \rho) \frac{\mathbf{P}(\tau^- > n - 1)}{n}. \quad (27)$$

Следовательно,

$$\mathbf{P}(S_n \leq -uc_n | \tau^- = n) \sim \frac{q(2 - \alpha) \mathbf{E}(u + \Lambda_1)^{-\alpha}}{(1 - \rho)\alpha}. \quad (28)$$

Этим завершается доказательство первой части леммы, поскольку

$$\mathbf{E} \Lambda_1^{-\alpha} = \frac{(1 - \rho)\alpha}{q(2 - \alpha)} \quad (29)$$

согласно формуле (109) статьи [10].

Для доказательства второй части достаточно заменить в приведенных выше рассуждениях τ^- на T^- .

Лемма 2. Если выполнено условие A , то для любого $v > 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}(S_{n-1} \geq vc_n | \tau^- = n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}(S_{n-1} \geq vc_n | T^- = n) = \mathbf{P}(\tilde{\Lambda}_1 \geq v).$$

Доказательство. Для того чтобы убедиться в справедливости желаемого утверждения, необходимо использовать равенство

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(S_{n-1} \geq vc_n | \tau^- = n) &= \frac{\mathbf{P}(\tau^- > n - 1)}{\mathbf{P}(\tau^- = n)} \\ &\quad \times \mathbf{E}[\mathbf{P}(X \leq -S_{n-1}) 1\{S_{n-1} \geq vc_n\} | \tau^- > n - 1], \end{aligned}$$

аналогичное равенство с T^- вместо τ^- , асимптотическое соотношение (25) при $u = 0$ и $x \geq vc_n$, а также рассуждения, сходные с теми, что применялись при доказательстве леммы 1.

З а м е ч а н и е 3. Из лемм 1 и 2 вытекает, что переход от положительных (неотрицательных) значений в момент n возможен лишь благодаря большому отрицательному скачку порядка c_n в этот момент. Более точно, в этом случае недоскок S_{n-1} и перескок $-S_n$ имеют порядок c_n .

2.2. Математические ожидания на событии $\{T^- = n\}$. Обозначим

$$T_0 := 0, \quad T_{j+1} := \min(n > T_j : S_n < S_{T_j}), \quad j \geq 0,$$

строго убывающие лестничные моменты случайного блуждания S . Очевидно, что $T^- = T_1$. Положим $L_n := \min_{0 \leq k \leq n} S_k$ и введем функцию

$$V(x) := \sum_{j=0}^{\infty} \mathbf{P}(S_{T_j} \geq -x), \quad x > 0; \quad V(0) = 1; \quad V(x) = 0, \quad x < 0.$$

Фундаментальным свойством функции $V(x)$ является тождество

$$\mathbf{E}[V(x+X); X+x \geq 0] = V(x), \quad x \geq 0. \quad (30)$$

Обозначим $\mathcal{F}$ фильтрацию, состоящую из σ -алгебр $\mathcal{F}_n$, порожденных случайными величинами $S_0, \dots, S_n$ и значениями процесса $Z_0, \dots, Z_n$. Используя функцию $V(x)$, определим вероятностную меру $\mathbf{P}^+$ следующим образом:

$$\mathbf{E}^+[\psi(S_0, \dots, S_n; Z_0, \dots, Z_n)] := \mathbf{E}[\psi(S_0, \dots, S_n; Z_0, \dots, Z_n)V(S_n); L_n \geq 0],$$

где ψ — произвольная измеримая функция на соответствующем пространстве аргументов. Опираясь на (30), можно проверить, что эта мера корректно определена (см. работу [1], содержащую более детальное описание введенной меры).

Сформулируем теперь утверждение, связанное с мерой $\mathbf{P}^+$, которое является частным случаем леммы 2.5 статьи [1].

Лемма 3 (см. [1]). Пусть выполнено условие (2), и пусть ξ_k — ограниченная $\mathcal{F}_k$ -измеримая случайная величина. Тогда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{E}[\xi_k | T^- > n] = \mathbf{E}^+ \xi_k.$$

Более того, если $\xi_1, \xi_2, \dots$ — последовательность равномерно ограниченных случайных величин, согласованных с фильтрацией $\mathcal{F}$, таких, что предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \xi_n =: \xi_\infty \quad (31)$$

существует $\mathbf{P}^+$ -н.н., то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{E}[\xi_n | T^- > n] = \mathbf{E}^+ \xi_\infty.$$

Мы докажем «локальный» вариант этой леммы при дополнительном условии $X \in D(\alpha, \beta)$. С этой целью обозначим $\tilde{S} := \{\tilde{S}_n, n \geq 0\}$ вероятностную копию последовательности $S = \{S_n, n \geq 0\}$. В дальнейшем все переменные и математические ожидания, связанные со случайным блужданием $\tilde{S}$, будут снабжаться символом $\sim$. Например, мы будем использовать обозначение $\tilde{L}_n := \min_{0 \leq k \leq n} \tilde{S}_k$.

Лемма 4. Пусть $X \in D(\alpha, \beta)$ для некоторых $\alpha < 2$ и $\beta < 1$, и пусть ξ_k — ограниченная $\mathcal{F}_k$ -измеримая случайная величина. Тогда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{E}[\xi_k | T^- = n] = \mathbf{E}^+ \xi_k.$$

Кроме того, если $\xi_1, \xi_2, \dots$ — последовательность равномерно ограниченных случайных величин, согласованных с фильтрацией $\mathcal{F}$, таких, что предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \xi_n =: \xi_\infty \quad (32)$$

существует $\mathbf{P}^+$ -н.н., то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{E} [\xi_{n-1} | T^- = n] = \mathbf{E}^+ \xi_\infty. \quad (33)$$

Более того,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{L}(\xi_{n-1} | T^- = n) = \mathcal{L}(\xi_\infty). \quad (34)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Согласно лемме 2, для любого фиксированного $\varepsilon \in (0, 1)$

$$\begin{aligned} & \limsup_{n \rightarrow \infty} \left| \mathbf{E} \left[\xi_k 1 \left\{ \frac{S_{n-1}}{c_n} \notin [\varepsilon, \varepsilon^{-1}] \right\} \middle| T^- = n \right] \right| \\ & \leq C \limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P} \left(\frac{S_{n-1}}{c_n} \notin [\varepsilon, \varepsilon^{-1}] \middle| T^- = n \right) \leq C \mathbf{P}(\Lambda_1 \notin [\varepsilon, \varepsilon^{-1}]), \end{aligned} \quad (35)$$

причем, ввиду замечания 3, последняя вероятность стремится к нулю при $\varepsilon \downarrow 0$. Далее,

$$\begin{aligned} & \mathbf{E} \left[\xi_k 1 \left\{ \frac{S_{n-1}}{c_n} \in (\varepsilon, \varepsilon^{-1}) \right\}; T^- = n \right] \\ & = \mathbf{E} \left[\xi_k \mathbf{P}(X < -S_{n-1}) 1 \left\{ \frac{S_{n-1}}{c_n} \in [\varepsilon, \varepsilon^{-1}] \right\}; T^- > n - 1 \right]. \end{aligned}$$

Положим $\psi_\varepsilon(x) := x^{-\alpha} 1(\varepsilon \leq x \leq \varepsilon^{-1})$. Поскольку

$$\mathbf{P}(X < -uc_n) \sim u^{-\alpha} \mathbf{P}(X < -c_n) \sim u^{-\alpha} \frac{q(2-\alpha)}{\alpha n}$$

равномерно по $u \in [\varepsilon, \varepsilon^{-1}]$, то

$$\begin{aligned} & \mathbf{E} \left[\xi_k \mathbf{P}(X < -S_{n-1}) 1 \left\{ \frac{S_{n-1}}{c_n} \in [\varepsilon, \varepsilon^{-1}] \right\}; T^- > n - 1 \right] \\ & \sim \mathbf{P}(X < -c_n) \mathbf{E} \left[\xi_k \left(\frac{S_{n-1}}{c_n} \right)^{-\alpha} 1 \left\{ \frac{S_{n-1}}{c_n} \in [\varepsilon, \varepsilon^{-1}] \right\}; T^- > n - 1 \right] \\ & = \frac{q(2-\alpha)}{\alpha n} \mathbf{E} \left[\xi_k \psi_\varepsilon \left(\frac{S_{n-1}}{c_n} \right); T^- > n - 1 \right]. \end{aligned} \quad (36)$$

Взяв для $k < n - 1$ условное математическое ожидание относительно набора $S_0, S_1, \dots, S_k$, получим

$$\begin{aligned} & \mathbf{E} \left[\xi_k \psi_\varepsilon \left(\frac{S_{n-1}}{c_n} \right); T^- > n - 1 \right] \\ & = \mathbf{E} \left[\xi_k \tilde{\mathbf{E}} \left[\psi_\varepsilon \left(\frac{\tilde{S}_{n-k-1}}{c_n} \right); \tilde{L}_{n-k-1} \geq -S_k \right]; T^- > k \right]. \end{aligned}$$

Используя леммы 2.1 и 2.3 статьи [1], легко проверить, что

$$\mathbf{E} \left[\xi_k \tilde{\mathbf{E}} \left[\psi_\varepsilon \left(\frac{\tilde{S}_{n-k-1}}{c_n} \right); \tilde{L}_{n-k} \geq -S_{k-1} \right]; T^- > k \right]$$

$$\begin{aligned}
&\sim \mathbf{E} [\xi_k \mathbf{P}(\tilde{L}_{n-k} \geq -S_{k-1}); T^- > k] \mathbf{E} [\psi_\varepsilon(\Lambda_1)] \\
&\sim \mathbf{E} [\xi_k V(S_{k-1}); T^- > k-1] \mathbf{P}(T^- > n-k) \mathbf{E} [\psi_\varepsilon(\Lambda_1)] \\
&\sim \mathbf{E}^+[\xi_k] \mathbf{P}(T^- > n-1) \mathbf{E} [\psi_\varepsilon(\Lambda_1)].
\end{aligned}$$

Таким образом,

$$\begin{aligned}
&\mathbf{E} \left[\xi_k \psi_\varepsilon \left(\frac{S_{n-1}}{c_n} \right) 1 \left\{ \frac{S_{n-1}}{c_n} \in [\varepsilon, \varepsilon^{-1}] \right\} \middle| T^- = n \right] \\
&\sim \frac{\mathbf{P}(T^- > n-1)}{\mathbf{P}(T^- = n)} \frac{q(2-\alpha)}{\alpha n} \mathbf{E}^+[\xi_k] \mathbf{E} [\psi_\varepsilon(\Lambda_1)].
\end{aligned} \quad (37)$$

Ясно, что $\mathbf{E} \psi_\varepsilon(\Lambda_1) \rightarrow \mathbf{E} \Lambda_1^{-\alpha}$ при $\varepsilon \rightarrow 0$. Объединяя эти оценки с (29), (3) и асимптотическим соотношением

$$\mathbf{P}(T^- = n) \sim \frac{1-\rho}{n} \mathbf{P}(T^- > n-1) = (1-\rho) \frac{l(n)}{n^{2-\rho}}, \quad (38)$$

установленным в теореме 8 работы [10], и вспоминая (35), нетрудно завершить доказательство первой части леммы.

Для того чтобы убедиться в справедливости второй части леммы, зафиксируем $\varepsilon \in (0, 1)$ и запишем неравенство

$$\begin{aligned}
|\mathbf{E} [\xi_k - \xi_{n-1} | T^- = n]| &\leq \mathbf{E} \left[|\xi_k - \xi_{n-1}| 1 \left\{ \frac{S_{n-1}}{c_n} \notin [\varepsilon, \varepsilon^{-1}] \right\} \middle| T^- = n \right] \\
&\quad + \mathbf{E} \left[|\xi_k - \xi_{n-1}| 1 \left\{ \frac{S_{n-1}}{c_n} \in [\varepsilon, \varepsilon^{-1}] \right\} \middle| T^- = n \right].
\end{aligned}$$

Как и в (35),

$$\begin{aligned}
&\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbf{E} \left[|\xi_k - \xi_{n-1}| 1 \left\{ \frac{S_{n-1}}{c_n} \notin [\varepsilon, \varepsilon^{-1}] \right\} \middle| T^- = n \right] \\
&\leq C \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P} \left(\frac{S_{n-1}}{c_n} \notin [\varepsilon, \varepsilon^{-1}] \middle| T^- = n \right) = 0,
\end{aligned} \quad (39)$$

и по аналогии с (36) и (37),

$$\begin{aligned}
&\mathbf{E} \left[|\xi_k - \xi_{n-1}| 1 \left\{ \frac{S_{n-1}}{c_n} \in [\varepsilon, \varepsilon^{-1}] \right\} \middle| T^- = n \right] \\
&\leq C \mathbf{E} \left[|\xi_k - \xi_{n-1}| \psi_\varepsilon \left(\frac{S_{n-1}}{c_n} \right) \middle| T^- > n-1 \right] \\
&\leq C \varepsilon^{-\alpha} \mathbf{E} [|\xi_k - \xi_{n-1}| | T^- > n-1].
\end{aligned} \quad (40)$$

В соответствии с леммой 3 условие (32) влечет

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{E} [|\xi_k - \xi_{n-1}| | T^- > n-1] = \lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{E}^+ |\xi_k - \xi_\infty| = 0. \quad (41)$$

Объединение оценок (39)–(41) завершает доказательство (33).

Для доказательства (34) достаточно заметить, что ввиду (33) и теоремы о мажорируемой сходимости

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{E}[e^{it\xi_{n-1}} | T^- = n] = \mathbf{E}^+ e^{it\xi_\infty}, \quad t \in (-\infty, \infty).$$

Лемма доказана.

Положим $\mu_n := \min\{k \geq 0: S_k = L_n\}$.

Лемма 5. Если $X \in \mathcal{D}(\alpha, \beta)$, то

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} nc_n \mathbf{E} e^{2L_n - S_n} < \infty$$

и

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} nc_n \mathbf{E}[e^{S_n}; \mu_n = n] < \infty. \quad (42)$$

Доказательство. Применяя известное факторизационное тождество (см., например, теорему 8.9.3 в [2]) с $\lambda = -1$ и $\mu = 1$ к случайной величине L_n вместо случайной величины $M_n := \max_{0 \leq k \leq n} S_k$, получаем

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n \mathbf{E}[e^{2L_n - S_n}] = \exp \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^n}{n} (\mathbf{E}[e^{-S_n}; S_n \geq 0] + \mathbf{E}[e^{S_n}; S_n < 0]) \right\}.$$

Поскольку $X \in D(\alpha, \beta)$, то локальная предельная теорема для асимптотически устойчивых случайных блужданий влечет

$$\mathbf{E}[e^{-S_n}; S_n \geq 0] + \mathbf{E}[e^{S_n}; S_n < 0] \leq \frac{C}{c_n}. \quad (43)$$

Комбинируя эту оценку с теоремой 6 работы [6], выводим

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} nc_n \mathbf{E}[e^{2L_n - S_n}] < \infty,$$

что доказывает первое утверждение леммы.

Для доказательства второго достаточно заметить, что (см., например, теорему 8.9.1 в [2])

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n \mathbf{E}[e^{S_n}; \mu_n = n] = \exp \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^n}{n} \mathbf{E}[e^{S_n}; S_n < 0] \right\},$$

и использовать оценку (43) еще раз.

Предыдущая лемма позволяет нам доказать следующее утверждение.

Лемма 6. Если $X \in \mathcal{D}(\alpha, \beta)$ с $\alpha < 2$ и $\beta < 1$, то для любого $\varepsilon > 0$ существует натуральное число l такое, что

$$\sum_{k=l}^{n-1} \mathbf{E}[e^{S_k}; \mu_k = k] \mathbf{P}(T^- = n - k) \leq \varepsilon \mathbf{P}(T^- = n)$$

для всех $n \geq l$.

Доказательство. В силу леммы 5 и соотношений (38) для любого $\delta \in (0, 1)$ справедлива оценка

$$\begin{aligned} \sum_{k=l}^n \mathbf{E}[e^{S_k}; \mu_k = k] \mathbf{P}(T^- = n - k) \\ \leq \max_{n\delta \leq j \leq n} \mathbf{P}(T^- = j) \sum_{l \leq k \leq n(1-\delta)} \mathbf{E}[e^{S_k}; \mu_k = k] \\ + \frac{C}{n(1-\delta)c_{n(1-\delta)}} \sum_{k \leq n\delta} \mathbf{P}(T^- = k). \end{aligned} \quad (44)$$

Опираясь на (38) еще раз, получаем

$$\max_{n\delta \leq j \leq n} \mathbf{P}(T^- = j) \leq C\delta^{\rho-2} \frac{l(n)}{n^{2-\rho}} \leq C_1\delta^{\rho-2} \mathbf{P}(T^- = n). \quad (45)$$

Используя равенство (6), нетрудно проверить, что если выполнено условие A , то $1 - \rho < \alpha^{-1}$. Принимая во внимание эту оценку и обращаясь к (18) и (38), находим

$$\frac{1}{nc_{n(1-\delta)}} \leq \frac{C}{(1-\delta)^{1/\alpha} n^{1+1/\alpha} l_1(n)} \leq \frac{C_1}{(1-\delta)^{1/\alpha} n^{1/\alpha+\rho-1}} \mathbf{P}(T^- = n). \quad (46)$$

Подставив (45) и (46) в (44), получим, что

$$\begin{aligned} \sum_{k=l}^n \mathbf{E}[e^{S_k}; \mu_k = k] \mathbf{P}(T^- = n - k) \\ \leq C_3 \mathbf{P}(T^- = n) \left(\delta^{\rho-2} \sum_{k=l}^{\infty} \mathbf{E}[e^{S_k}; \mu_k = k] + \frac{1}{(1-\delta)^{1+1/\alpha} n^{1/\alpha+\rho-1}} \right) \end{aligned}$$

для всех достаточно больших значений константы C_3 . Вспоминая теперь (42), нетрудно завершить доказательство леммы, выбрав соответствующим образом значения величин δ и l .

3. Доказательство теоремы 1. Положим

$$F_{m,n}(s) := f_m(f_{m+1}(\dots(f_{n-1}(s))\dots)), \quad m < n, \quad F_{n,n}(s) := s.$$

Переписывая (7) в виде

$$\frac{1}{1 - f_{n-1}(s)} = 1 + e^{-X_n} \frac{1}{1 - s} \quad \text{для всех } n \geq 1,$$

легко проверить, что

$$\frac{1}{1 - F_{0,n}(s)} = 1 + e^{-S_1} + e^{-S_2} + \dots + e^{-S_{n-1}} + e^{-S_n} \frac{1}{1 - s} \quad (47)$$

для всех $n \geq 1$. Из этого равенства, полагая

$$H_n := \left(\sum_{k=0}^n e^{-S_k} \right)^{-1}, \quad H_\infty := \lim_{n \rightarrow \infty} H_n,$$

получаем

$$\mathbf{P}_f(Z_n > 0) := \mathbf{P}(Z_n > 0 \mid f_0, f_1, \dots, f_{n-1}) = 1 - F_{0,n}(0) = H_n$$

и

$$\mathbf{P}_f(T = n) := \mathbf{P}_f(Z_{n-1} > 0) - \mathbf{P}_f(Z_n > 0) = H_{n-1}H_n e^{-S_n}. \quad (48)$$

Разобьем математическое ожидание $\mathbf{E}[\mathbf{P}_f(T = n)] = \mathbf{P}(T = n)$ на две части:

$$\mathbf{P}(T = n) = \mathbf{E}[\mathbf{P}_f(T = n); \mu_n < n] + \mathbf{E}[\mathbf{P}_f(T = n); \mu_n = n]. \quad (49)$$

Легко проверить, что $H_{n-1}H_n e^{-S_n} \leq e^{2L_n - S_n}$ на событии $\{\mu_n < n\}$. Из этой оценки и леммы 5 выводим

$$\mathbf{E}[\mathbf{P}_f(T = n); \mu_n < n] \leq \mathbf{E}e^{2L_n - S_n} \leq \frac{C}{nc_n} \quad \text{для всех } n \geq 1. \quad (50)$$

Используя неравенство (46) с $\delta = 0$, заключаем, что

$$\mathbf{E}[\mathbf{P}_f(T = n); \mu_n < n] = o(\mathbf{P}(T^- = n)). \quad (51)$$

Рассмотрим теперь математическое ожидание $\mathbf{E}[\mathbf{P}_f(T = n); \mu_n = n]$. Применяя лемму 5 еще раз, мы видим, что

$$\begin{aligned} \mathbf{E}[\mathbf{P}_f(Z_n > 0); \mu_n = n] &\leq \mathbf{E}[e^{S_n}; \mu_n = n] \\ &\leq \frac{C}{nc_n} = o(\mathbf{P}(T^- = n)). \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\mathbf{E}[\mathbf{P}_f(T = n); \mu_n = n] = \mathbf{E}[\mathbf{P}_f(Z_{n-1} > 0); \mu_n = n] + o(\mathbf{P}(T^- = n)). \quad (52)$$

Поскольку $\mathbf{P}_f(Z_{n-1} > 0) \leq e^{\min_{0 \leq j \leq n-1} S_j}$, то в соответствии с леммой 6 для любого $\varepsilon > 0$ существует число l такое, что

$$\begin{aligned} &\mathbf{E}[\mathbf{P}_f(Z_{n-1} > 0); \mu_{n-1} \geq l, \mu_n = n] \\ &= \sum_{k=l}^{n-1} \mathbf{E}[\mathbf{P}_f(Z_{n-1} > 0); \mu_{n-1} = k, \mu_n = n] \\ &\leq \sum_{k=l}^{n-1} \mathbf{E}[e^{S_k}; \mu_{n-1} = k, \mu_n = n] \leq \varepsilon \mathbf{P}(T^- = n) \end{aligned} \quad (53)$$

для всех $n \geq l$. Обозначая $\{\tilde{f}_n, n \geq 0\}$ независимую копию последовательности $\{f_n, n \geq 0\}$, мы видим, что для любого фиксированного значения $k < l$

$$\begin{aligned} & \mathbf{E}[\mathbf{P}_f(Z_{n-1} > 0); \mu_{n-1} = k, \mu_n = n] \\ &= \mathbf{E}[1 - F_{0,n-2}(0); \mu_{n-1} = k, \mu_n = n] \\ &= \mathbf{E}[1 - F_{0,k}(F_{k,n-2}(0)); \mu_{n-1} = k, \mu_n = n] \\ &= \mathbf{E}[1 - F_{0,k}(\tilde{F}_{0,n-k-2}(0)); \mu_k = k, \tilde{T}^- = n - k] \\ &= \mathbf{E}[1 - F_{0,k}(\tilde{F}_{0,n-k-2}(0)) 1\{\mu_k = k\} | \tilde{T}^- = n - k] \mathbf{P}(T^- = n - k). \end{aligned}$$

В силу монотонности вероятности вырождения и леммы 2.7 работы [1]

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{F}_{0,n}(0) =: Q^+ < 1 \quad \mathbf{P}^+\text{-п.н.}$$

Отсюда и из (34) заключаем, что для любого фиксированного $k < l$

$$\begin{aligned} & \mathbf{E}[(1 - F_{0,k}(\tilde{F}_{0,n-k-2}(0))) 1\{\mu_k = k\} | \tilde{T}^- = n - k] \\ & \sim \mathbf{E}[\mathbf{E}^+(1 - F_{0,k}(Q^+)); \mu_k = k] > 0. \end{aligned}$$

Используя это соотношение и оценки (38) и (53), нетрудно показать, что

$$\mathbf{E}[\mathbf{P}_f(Z_{n-1} > 0); \mu_n = n] \sim \theta \mathbf{P}(T^- = n), \quad (54)$$

где

$$\theta = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{E}[\mathbf{E}^+(1 - F_{0,k}(Q^+)); \mu_k = k] > 0. \quad (55)$$

Из (49), (51), (52) и (54) следует, что

$$\mathbf{P}(T = n) \sim \theta \mathbf{P}(T^- = n).$$

Легко проверить, что выражение для величины θ , указанное в (55), находится в полном соответствии с формулой (4.10) работы [1]. Это завершает доказательство теоремы 1.

4. Доказательства для общего случая.

Доказательство теоремы 2. Сначала мы выведем оценки снизу и сверху для вероятности $\mathbf{P}(Z_1 = 0 | Z_0 = k)$. Вспоминая определение (1), легко видеть, что

$$f_{00} = \mathbf{P}(Z_1 = 0 | Z_0 = 1; f_0) \geq \max \left\{ 0, 1 - \sum_{k=1}^{\infty} k f_{0k} \right\}.$$

Следовательно, для любого фиксированного $\varepsilon \in (0, 1/2)$

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(Z_1 = 0 | Z_0 = k) & \geq \mathbf{E}[(1 - e^{X_1})^k; X_1 < 0] \\ & \geq (1 - k^{-1-\varepsilon})^k \mathbf{P}(X_1 \leq -(1 + \varepsilon) \ln k). \end{aligned} \quad (56)$$

Для нахождения оценки сверху воспользуемся неравенством $\mathbf{P}(Y > 0) \geq (\mathbf{E} Y)^2 / \mathbf{E} Y^2$, справедливым для неотрицательных случайных величин с $\mathbf{E} Y > 0$. В результате мы получим

$$f_{00} \leq 1 - \left(\frac{\sum_{k=1}^{\infty} k^2 f_{0k}}{(\sum_{k=1}^{\infty} k f_{0k})^2} \right)^{-1}.$$

Замечая, что

$$\frac{\sum_{k=1}^{\infty} k^2 f_{0k}}{(\sum_{k=1}^{\infty} k f_{0k})^2} \leq \frac{b}{\sum_{k=1}^{\infty} k f_{0k}} + \zeta(b),$$

выводим

$$f_{00} \leq 1 - (be^{-X_1} + \zeta(b))^{-1} \leq \exp \left\{ -\frac{1}{be^{-X_1} + \zeta(b)} \right\}.$$

Эта оценка влечет неравенство

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(Z_1 = 0 \mid Z_0 = k) &\leq \mathbf{E} \left[\exp \left\{ -\frac{1}{be^{-X_1} + \zeta(b)} \right\} \right] \\ &\leq \mathbf{P}(X_1 \leq -(1 - \varepsilon) \ln k) + \mathbf{P}(\zeta(b) > k^{1-\varepsilon}) + \exp \left\{ -\frac{k^\varepsilon}{b+1} \right\}. \end{aligned} \quad (57)$$

В силу условия $\mathbf{E} (\ln^+ \zeta(b))^{\alpha+\delta} < \infty$ и неравенства Маркова, получаем

$$\mathbf{P}(\zeta(b) > k^{1-\varepsilon}) \leq C \ln^{-\alpha-\delta} k. \quad (58)$$

Поскольку функция $\mathbf{P}(X_1 < -x)$ является правильно меняющейся на бесконечности с показателем $-\alpha$, оценки (56)–(58) влекут

$$\begin{aligned} \frac{1}{(1 + \varepsilon)^\alpha} &\leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \frac{\mathbf{P}(Z_1 = 0 \mid Z_0 = k)}{\mathbf{P}(X_1 < -\ln k)} \\ &\leq \limsup_{k \rightarrow \infty} \frac{\mathbf{P}(Z_1 = 0 \mid Z_0 = k)}{\mathbf{P}(X_1 < -\ln k)} \leq \frac{1}{(1 - \varepsilon)^\alpha}. \end{aligned}$$

Устремив ε к нулю, получим

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\mathbf{P}(Z_1 = 0 \mid Z_0 = k)}{\mathbf{P}(X_1 < -\ln k)} = 1.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(Z_{n-1} > e^{xc_n}; T = n) &= \sum_{k > e^{xc_n}} \mathbf{P}(Z_{n-1} = k) \mathbf{P}(Z_1 = 0 \mid Z_0 = k) \\ &\sim \sum_{k > e^{xc_n}} \mathbf{P}(Z_{n-1} = k) \mathbf{P}(X \leq -\ln k) \\ &\sim \mathbf{E} [\mathbf{P}(X \leq -\ln Z_{n-1}); \ln Z_n > xc_n]. \end{aligned} \quad (59)$$

Поскольку $\mathbf{P}(X \leq -yc_n)/\mathbf{P}(X \leq -c_n) \rightarrow y^{-\alpha}$ при $n \rightarrow \infty$ равномерно по $y \in [x, \infty)$, то

$$\begin{aligned} & \mathbf{E}[\mathbf{P}(X \leq -\ln Z_{n-1}); \ln Z_{n-1} > xc_n] \\ & \sim \mathbf{P}(X \leq -c_n) \mathbf{E}\left[\left(\frac{\ln Z_{n-1}}{c_n}\right)^{-\alpha}; \ln Z_{n-1} > xc_n\right] \\ & \sim \mathbf{P}(X \leq -c_n) \mathbf{P}(Z_{n-1} > 0) \\ & \quad \times \mathbf{E}\left[\left(\frac{\ln Z_{n-1}}{c_n}\right)^{-\alpha} 1\{\ln Z_{n-1} > xc_n\} \mid Z_{n-1} > 0\right]. \end{aligned} \quad (60)$$

Согласно следствию 1.6 статьи [1],

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}\left(\frac{\ln Z_{n-1}}{c_n} < x \mid Z_{n-1} > 0\right) = \mathbf{P}(\Lambda_1 < x), \quad x > 0.$$

Этот факт и теорема о мажорируемой сходимости дают

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{E}\left[\left(\frac{\ln Z_{n-1}}{c_n}\right)^{-\alpha} 1\{\ln Z_{n-1} > xc_n\} \mid Z_{n-1} > 0\right] = \mathbf{E}[\Lambda_1^{-\alpha} 1\{\Lambda_1 > x\}]. \quad (61)$$

Объединяя (59)–(61) и принимая во внимание соотношения (21) и (29), получаем

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(Z_{n-1} > e^{xc_n}; Z_n = 0) & \sim (1 - \rho) \frac{\mathbf{P}(Z_{n-1} > 0)}{n} \frac{\mathbf{E}[\Lambda_1^{-\alpha} 1\{\Lambda_1 > x\}]}{\mathbf{E}[\Lambda_1^{-\alpha}]} \\ & = (1 - \rho) \frac{\mathbf{P}(Z_{n-1} > 0)}{n} \mathbf{P}(\tilde{\Lambda}_1 > x). \end{aligned}$$

Для завершения доказательства теоремы 2 осталось заметить, что в силу (3) и (38)

$$(1 - \rho) \frac{\mathbf{P}(Z_{n-1} > 0)}{n} \sim (1 - \rho) \frac{\theta \mathbf{P}(T^- > n - 1)}{n} \sim \theta \mathbf{P}(T^- = n).$$

Доказательство теоремы 3. Пусть ϕ — произвольная ограниченная функция из $D[0, 1]$, и пусть

$$Z^{(n)} = \left\{ \frac{\ln Z_{[(n-1)t]}}{c_n}, 0 \leq t \leq 1 \right\}.$$

Аналогично доказательству теоремы 2 для любого $x > 0$

$$\begin{aligned} & \sum_{k > e^{xc_n}} \mathbf{E}[\phi(Z^{(n)}); Z_{n-1} = k] \mathbf{P}(Z_1 = 0 \mid Z_0 = k) \\ & \sim \mathbf{P}(X \leq -c_n) \mathbf{E}\left[\phi(Z^{(n)}) \left(\frac{\ln Z_{n-1}}{c_n}\right)^{-\alpha} 1\{Z_{n-1} > e^{xc_n}\}\right] \\ & \sim \theta \mathbf{P}(T^- = n) \mathbf{E}\left[\phi(Z^{(n)}) \left(\frac{\ln Z_{n-1}}{c_n}\right)^{-\alpha} 1\{Z_{n-1} > e^{xc_n}\} \mid Z_{n-1} > 0\right] \end{aligned}$$

$$\sim \mathbf{P}(T = n) \frac{\mathbf{E}[\phi(\Lambda) \Lambda_1^{-\alpha} 1\{\Lambda_1 > x\}]}{\mathbf{E}[\Lambda_1^{-\alpha}]} = \mathbf{P}(T = n) \mathbf{E}[\phi(\tilde{\Lambda}) 1\{\tilde{\Lambda}_1 > x\}], \quad (62)$$

где на последнем шаге мы воспользовались следствием 1.6 работы [1].

С другой стороны, согласно равенству (10),

$$\begin{aligned} & \sum_{0 < k \leq e^{xc_n}} \mathbf{E}[\phi(Z^{(n)}); Z_{n-1} = k] \mathbf{P}(Z_1 = 0 | Z_0 = k) \\ & \leq \sup |\phi| \mathbf{P}(0 < Z_{n-1} \leq e^{xc_n}; Z_n = 0) = o(\mathbf{P}(T = n)) \end{aligned} \quad (63)$$

при $x \downarrow 0$. Объединяя (62) и (63), получаем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{E}[\phi(Z^{(n)}) | T = n] = \lim_{x \downarrow 0} \mathbf{E}[\phi(\tilde{\Lambda}) 1\{\tilde{\Lambda}_1 > x\}] = \mathbf{E}[\phi(\tilde{\Lambda})],$$

что завершает доказательство теоремы 3.

Д о к а з а т е л ь с т в о т е о р е м ы 4. Из равенств (51) и (52) вытекает, что при $n \rightarrow \infty$

$$\mathbf{P}(\{T = n\} \Delta \{Z_{n-1} > 0, \mu_n = n\}) = o(\mathbf{P}(T^- = n)),$$

где Δ — символ взятия симметрической разности соответствующих событий. Отсюда, для произвольной ограниченной непрерывной функции $\phi: D[0, 1] \rightarrow \mathbf{R}$ имеем

$$\mathbf{E}[\phi(W^{r_n, n}); T = n] = \mathbf{E}[\phi(W^{r_n, n}); Z_{n-1} > 0, \mu_n = n] + o(\mathbf{P}(T^- = n)).$$

Более того, из формулы (53) следует, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется натуральное число l такое, что

$$|\mathbf{E}[\phi(W^{r_n, n}); Z_{n-1} > 0, \mu_{n-1} > l, \mu_n = n]| \leq \varepsilon \mathbf{P}(T^- = n).$$

Таким образом, для доказательства теоремы 4 достаточно для каждого фиксированного числа k найти асимптотику величины

$$\mathbf{E}[\phi(W^{r_n, n}); Z_{n-1} > 0, \mu_{n-1} = k, \mu_n = n]$$

при $n \rightarrow \infty$.

Пусть

$$\psi(z, s, r, n) := \mathbf{E}_z[\phi(e^{-s} W^{r, n}); Z_{n-1} > 0, T^- = n]$$

где $\mathbf{E}_z[\cdot]$ обозначает математическое ожидание для процесса, стартующего в момент нуль из z . Ясно, что

$$\begin{aligned} & \mathbf{E}[\phi(W^{r_n, n}); Z_{n-1} > 0, \mu_{n-1} = k, \mu_n = n | \mathcal{F}_k] \\ & = \psi(Z_k, S_k, r_n - k, n - k) 1(Z_k > 0) 1(\mu_k = k). \end{aligned} \quad (64)$$

Согласно утверждению 3.1 работы [1], существует случайная величина W^+ , удовлетворяющая условию $\mathbf{P}(0 < W^+ < \infty) = 1$, такая, что для любого $s \geq 0$

$$\phi(e^{-s}W^{r_n,n})1(Z_{n-1} > 0) \rightarrow \phi(e^{-s}W^+)1(W^+ > 0) \quad \mathbf{P}^+-\text{п.н.}$$

Этот факт и лемма 4 влекут при $n \rightarrow \infty$,

$$\psi(z, s, r, n) \sim \mathbf{E}_z^+[\phi(e^{-s}W^+)1(W^+ > 0)]\mathbf{P}(T^- = n).$$

Отсюда, используя (64), заключаем, что для фиксированного k

$$\begin{aligned} & \mathbf{E}[\phi(W^{r_n,n}); Z_{n-1} > 0, \mu_{n-1} = k, \mu_n = n] \\ & \sim \mathbf{E}[\mathbf{E}_{Z_k}^+[\phi(e^{-S_k}W^+)1(W^+ > 0)]; Z_k > 0, \mu_k = k]\mathbf{P}(T^- = n) \end{aligned}$$

при $n \rightarrow \infty$. В результате мы получаем

$$\begin{aligned} & \mathbf{E}[\phi(W^{r_n,n}); T = n] \sim \mathbf{P}(T^- = n) \\ & \times \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{E}[\mathbf{E}_{Z_k}^+[\phi(e^{-S_k}W^+)1(W^+ > 0)]; Z_k > 0, \mu_k = k] \end{aligned}$$

при $n \rightarrow \infty$. Отсюда

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{E}[\phi(W^{r_n,n}) | T = n] \\ & = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{E}[\mathbf{E}_{Z_k}^+[\phi(e^{-S_k}W^+)1(W^+ > 0)]; Z_k > 0, \mu_k = k]. \end{aligned}$$

Сравнивая найденное соотношение с аналогичным соотношением, установленным при доказательстве теоремы 3.1 в [1], мы видим, что распределение, задаваемое правой частью последнего равенства, совпадает с распределением, полученным в [1].

Теорема 4 доказана.

Д о к а з а т е л ь с т в о л е д с т в и я 1. Переходя к пределу при $x \rightarrow 0$ в (9), получаем

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{\mathbf{P}(T = n)}{\mathbf{P}(T^- = n)} \geq \theta.$$

Предположив, что найдется $\varepsilon > 0$ такое, что

$$\mathbf{P}(T = n) \geq (\theta + \varepsilon)\mathbf{P}(T^- = n)$$

для всех $n \geq N$, и просуммировав это неравенство по n от произвольного $n_0 > N$ до ∞ , заключаем, что

$$\mathbf{P}(T \geq n_0) \geq (\theta + \varepsilon)\mathbf{P}(T^- \geq n_0)$$

для всех $n_0 \geq N$, что противоречит асимптотическому соотношению (3).

Доказательство соотношения (13). Представление (47) влечет

$$\mathbf{P}(Z_{n-1} = j) = \mathbf{E}[H_{n-1}^2 e^{-S_{n-1}} (1 - H_{n-1} e^{-S_{n-1}})^{j-1}], \quad j \geq 1.$$

Отсюда и из леммы 5 вытекает, что

$$\sup_{j \geq 1} \mathbf{P}(Z_{n-1} = j) \leq \mathbf{E}[H_{n-1}^2 e^{-S_{n-1}}] \leq \mathbf{E}[e^{2L_{n-1} - S_{n-1}}] \leq \frac{C}{nc_n} \leq \frac{C_1}{\sigma n^{3/2}},$$

где на последнем шаге мы использовали соотношение $c_n \sim \sigma\sqrt{n}$. Таким образом,

$$\mathbf{P}(Z_{n-1} > N; T = n) = \sum_{j=N+1}^{\infty} \mathbf{P}(Z_{n-1} = j) \mathbf{E} f_{00}^j \leq \frac{C_1}{\sigma n^{3/2}} \sum_{j=N+1}^{\infty} \mathbf{E} f_{00}^j. \quad (65)$$

В силу [7, теоремы 1] условия $\sigma^2 < \infty$ и (12) влекут $\mathbf{P}(T = n) \sim Cn^{-3/2}$. Из этой оценки, первого условия в (12) и неравенства (65) следует (13).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Afanasyev V. I., Geiger J., Kersting G., Vatutin V. A. Criticality for branching processes in random environment. — Ann. Probab., 2005, v. 33, № 3, p. 645–673.
2. Bingham N. H., Goldie C. M., Teugels J. L. Regular Variation. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1987, 494 p.
3. Doney R. Conditional limit theorems for asymptotically stable random walks. — Z. Wahrscheinlichkeitstheor. verw. Geb., 1985, v. 70, № 3, p. 351–360.
4. Durrett R. Conditioned limit theorems for some null recurrent Markov processes. — Ann. Probab., 1978, v. 6, № 5, p. 798–827.
5. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее применения, т. 2. М.: Мир, 1984, 751 с.
6. Rogozin B. A. Асимптотическое поведение коэффициентов функций от степенных рядов и рядов Фурье. — Сиб. матем. журн., 1976, т. 17, № 3, с. 640–648.
7. Ватутин В. А., Дьяконова Е. Е. Ветвящиеся процессы в случайной среде: вероятность вырождения в данный момент. — Дискретн. матем., 1997, т. 9, № 4, с. 100–126.
8. Ватутин В. А., Дьяконова Е. Е. Ветвящиеся процессы в случайной среде и бутылочные горлышки в эволюции популяций. — Теория вероятн. и ее примен., 2006, т. 51, в. 1, с. 22–46.
9. Vatutin V. A., Kyprianou A. E. Branching processes in random environment die slowly. — Fifth Colloquium on Mathematics and Computer Science (September 22–26, Blaubeuren, Germany), DMTCS Proceedings Series, Volume AG, p. 379–400 (electronic: <http://www.dmtcs-ojs/index.php/proceedings/issue/view/dmAG>), 2008; arXiv: 0804.1155v1.
10. Vatutin V. A., Wachtel V. Local probabilities for random walks conditioned to stay positive. — Probab. Theory Related Fields, 2009, v. 143, № 1–2, p. 177–217.
11. Золотарев В. М. Преобразование Меллина–Стилтьеса в теории вероятностей. — Теория вероятн. и ее примен., 1957, т. 2, в. 4, с. 445–468.

Поступила в редакцию
7.X.2008