Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. В. Козлов, О больших отклонениях строго докритических ветвящихся процессов в случайной среде с геометрическим распределением числа потомков, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2009, том 54, выпуск 3, 439–465

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp2804>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.174.149.18

26 апреля 2023 г., 02:52:47

© 2009 г.

КОЗЛОВ М. В.*

О БОЛЬШИХ УКЛОНЕНИЯХ СТРОГО ДОКРИТИЧЕСКИХ ВЕТВЯЩИХСЯ ПРОЦЕССОВ В СЛУЧАЙНОЙ СРЕДЕ С ГЕОМЕТРИЧЕСКИМ РАСПРЕДЕЛЕНИЕМ ЧИСЛА ПОТОМКОВ¹⁾

Для строго докритического ветвящегося процесса Z_n с геометрическим распределением числа непосредственных потомков в случайной среде X_n из независимых одинаково распределенных величин найдена асимптотика вероятностей больших уклонений $\mathbf{P}(\ln Z_n > tn)$ при $0 < t \leq \mu^*$ в предположении, что шаг X_i сопровождающего случайного блуждания $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ удовлетворяет правостороннему условию Крамера. Она экспоненциальна по n с множителем при n , линейно зависящим от t . Ранее автором было показано, что при $t > \mu^*$ отношение вероятностей $\mathbf{P}(\ln Z_n > tn)$ и $\mathbf{P}(S_n > tn)$ стремится при $n \rightarrow \infty$ к положительной постоянной. Критическое значение μ^* параметра t равняется производной преобразования Лапласа $\theta(\lambda) = \mathbf{E} e^{\lambda X_1}$ в точке $\lambda^* > 1$, для которой $\theta(\lambda^*) = \theta(1)$. Для $t > \mu^*$ большие уклонения процесса Z_n возникают за счет больших уклонений сопровождающего случайного блуждания. Для $t < \mu^*$ реализация больших уклонений протекает иначе: до случайного момента $T_n = n\hat{s}_t + O_p(1)\sqrt{n}$, $\hat{s}_t := 1 - t/\mu^*$, от процесса Z_n требуется лишь, чтобы он не вырождался, а на участке $[T_n, n]$ ему предписывается большое уклонение на величину порядка $\mu^*n(1 - \hat{s}_t) = tn$, которое реализуется так же, как и в случае $t > \mu^*$.

Ключевые слова и фразы: ветвящиеся процессы, случайная среда, большие уклонения, случайное блуждание, условие Крамера, экспоненциальный функционал.

1. Введение. Семейство производящих функций, отвечающих геометрическому распределению вероятностей, параметризуем следующим удобным для нас образом: $g_x(z) := 1 - (1 + e^{-x}(1 - z)^{-1})^{-1}$, $0 \leq z \leq 1$, где x пробегает множество действительных чисел. Для любой последовательности x_n , $n = 1, 2, \dots$, значений параметра определим ветвящийся процесс Гальтона–Ватсона в «изменяющейся среде» (x_n) как неоднородную марковскую цепь на множестве целых неотрицательных чисел с

*Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, механико-математический факультет, Ленинские горы, 119992 Москва, Россия; e-mail: kozlov_mikhail@mail.ru

¹⁾ Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект № 07-01-00077).

переходными вероятностями $p_{ij}(x_n)$ на n -м шаге, находящимися из соотношений: $\sum_{j=0}^{\infty} p_{ij}(x_n) z^j = (g_{x_n}(z))^i$, $i = 0, 1, 2, \dots$. Введем «случайную среду» как последовательность X_n , $n = 1, 2, \dots$, независимых одинаково распределенных случайных величин (н.о.р. сл.в.) и будем использовать X в качестве общего обозначения для сл.в. X_n .

Пусть функция распределения $F(x)$ сл.в. X невырождена, а математическое ожидание $\mathbf{E} X =: \mu_0$ конечно. Ветвящийся процесс Z_n в случайной среде X_n (ВПСС) определим как смесь процессов Гальтона–Ватсона в изменяющейся среде по мере, индуцируемой на последовательностях (x_n) случайной средой. Положим $Z_0 = 1$. Процесс Z_n является марковской цепью с переходными вероятностями $p_{ij} := \mathbf{E} p_{ij}(X)$. Случайное блуждание $S_n := \sum_{i=1}^n X_i$, $n = 1, 2, \dots$, $S_0 = 0$, называют *сопровождающим*.

Положив $s_j := x_1 + \dots + x_j$, $j \geq 1$, $s_0 = 0$, имеем [1]:

$$g_{x_1}(\dots(g_{x_n}(z)\dots)) = 1 - \left((1-z)^{-1} e^{-s_n} + \sum_{j=0}^{n-1} e^{-s_j} \right)^{-1}.$$

Учитывая, что хвосты распределения вероятностей с производящей функцией $g(z)$ имеют производящую функцию $(1-g(z))/(1-z)$, находим для любого натурального N :

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(Z_n > N) &= \mathbf{E} \left\{ \left(\sum_{j=0}^n e^{-S_j} \right)^{-1} \left(1 + e^{-S_n} \left(\sum_{j=0}^{n-1} e^{-S_j} \right)^{-1} \right)^{-N} \right\} \\ &= \int \dots \int \left(\sum_{j=0}^n e^{-s_j} \right)^{-1} \left(1 + e^{-s_n} \left(\sum_{j=0}^{n-1} e^{-s_j} \right)^{-1} \right)^{-N} \prod_{i=1}^n dF(x_i). \end{aligned} \quad (1.1)$$

Исследование вероятностей больших отклонений процесса Z_n сводится к изучению асимптотики интегрального функционала (1.1) от траектории сопровождающего случайного блуждания при $n, N \rightarrow \infty$.

Предположим, что выполнено правостороннее условие Крамера:

$$(A1) \quad \mathbf{E} e^{\lambda X} =: \theta(\lambda) < \infty \quad \text{при } 0 < \lambda \leq \lambda^+, \quad \lambda^+ > 0,$$

и $-\infty < \mu_0 < \infty$. Тогда, как известно [2], в некотором интервале значений $t > \mu_0$ имеет место следующая асимптотика вероятностей больших отклонений:

$$\mathbf{P}(S_n > tn) \sim c(t) n^{-1/2} e^{-\psi(t)n}, \quad n \rightarrow \infty, \quad (1.2)$$

где $c(t) > 0$, а $\psi(t) > 0$ — так называемая функция отклонений (см. ниже пп. 2а, 2с), символ $\sim$ означает, что отношение соединенных им выражений стремится к 1. Асимптотика (1.2) лежит в основе исследований вероятностей больших отклонений типа $\ln Z_n > tn$. В работе автора [3] показано, что вероятности больших отклонений $\mathbf{P}(\ln Z_n > tn)$ имеют с

точностью до постоянного множителя такую же асимптотику (1.2), что и сопровождающее случайное блуждание, в случаях ВПСС *надкритических*: $\mu_0 > 0$, *критических*: $\mu_0 = 0$, *слабо и промежуточно докритических*: $\mu_0 < 0$ и, соответственно, $\theta'(1) > 0$ или $\theta'(1) = 0$. ВПСС называется *строго докритическим*, если $\theta'(1) < 0$ ($\mu_0 < 0$). В предположении

$$(A2) \quad \begin{aligned} &\theta'(1) < 0 \text{ и существует } \lambda^* \in (1, \lambda^+) \text{ такое,} \\ &\text{что } \theta(\lambda^*) = \theta(1), \mu_0 > -\infty, \end{aligned}$$

асимптотика вероятностей $\mathbf{P}(\ln Z_n > tn)$ сохраняет вид (1.2) для $t > \mu^* := (d/d\lambda)\theta(\lambda)|_{\lambda=\lambda^*}$ [3]. Далее исследуются вероятности больших отклонений строго докритических ВПСС в промежутке $(0, \mu^*]$ изменения t . Ввиду ограничений на объем статьи исследование проводится в предположении

$$(A0) \quad \text{распределение сл.в. } X \text{ нерешетчатое.}$$

Изменения, которые следует внести в случае решетчатого распределения, не существенны.

Предположим, что выполнены условия (A0), (A1), $-\infty < \mu_0 < 0$ и существует $\kappa > 0$ такое, что $\theta(\kappa) = 1$, $\mathbf{E}(|X|e^{\kappa X}) < \infty$. Введем сл.в. $U_n := \sum_{j=0}^n e^{S_j}$, $n \leq \infty$. В [4] найдена асимптотика $\mathbf{P}(U_\infty > x) \sim C_1 x^{-\kappa}$, $x \rightarrow \infty$, из которой следует, что $\mathbf{E}U_\infty^\lambda < \infty$ при $\lambda < \kappa$ и $\mathbf{E}U_\infty^\kappa = \infty$. В этой связи может представлять независимый интерес соотношение $\mathbf{E}U_n^\kappa \sim C_3 n$, $n \rightarrow \infty$ ($\mathbf{E}U_n^\kappa < \infty$, поскольку $\theta(\kappa) < \infty$). Его доказательство (теорема 3) служит введением в более трудоемкое доказательство основного результата работы (теоремы 4, 5). Отметим, что совсем просто выводится соотношение $\mathbf{E}e^{\kappa M_n} \sim C_2 n$, $n \rightarrow \infty$, $M_n := \max_{0 \leq j \leq n} S_j$ (теорема 2).

При ссылаках на подпункты внутри пункта, занумерованного арабской цифрой, указывается только буква: **a**, **b**, **c**, ..., а за его пределами — также и цифра: **2a**, **4b**, ...

2. Обозначения и предварительные сведения.

a. Положим $\theta(\lambda) := \mathbf{E}e^{\lambda X}$, $\lambda \in [0, \lambda^+]$, $\mu(\lambda) \equiv \mu_\lambda := (d/d\lambda) \ln \theta(\lambda) = \theta'(\lambda)/\theta(\lambda)$. Так как $(d/d\lambda)\mu(\lambda) =: \sigma^2(\lambda) > 0$, то функция $\mu(\lambda) \equiv \mu_\lambda$ строго возрастает и существует обратная к ней $\lambda(\mu) \equiv \lambda_\mu$, определенная на $[\mu_0, \mu^+)$, $\mu^+ := \lim_{\lambda \rightarrow \lambda^+} \mu(\lambda) \leq \infty$, $\mu_0 = \mathbf{E}X$. Предположим для определенности, что $\mu^+ < \infty$. Случай $\mu^+ = \infty$ не приводит к дополнительным осложнениям. Положим для краткости $\mu^* := \mu(\lambda^*)$ (см. (A2)). Введем для сл.в. X *функцию отклонений*

$$\psi(t) := t\lambda_t - \ln \theta(\lambda_t) = \sup_{\lambda} \{t\lambda - \ln \theta(\lambda)\}, \quad t \in (\mu_0, \mu^+).$$

Легко видеть, что $(d/dt)\psi(t) = \lambda(t)$, $(d^2/dt^2)\psi(t) = (\sigma^2(\lambda_t))^{-1}$. Положим

$$\psi(t; \lambda) := \psi(\mu_\lambda) + \lambda(t - \mu_\lambda) \equiv \lambda t - \ln \theta(\lambda), \quad \widehat{\psi}(t) := \psi(t; \lambda^*).$$

Функция $\psi(t; \lambda)$ представляет касательную к графику $\psi(t)$ в точке μ_λ .

б. Введем вспомогательную переменную $\nu \in (\mu_0, \mu^+)$ и при фиксированном ν — последовательность $X^{(\nu)}, X_1^{(\nu)}, X_2^{(\nu)}, \dots$ н.о.р. сл.в. с функцией распределения $F^{(\nu)}(x) := \theta(\lambda_\nu)^{-1} \int_{-\infty}^x e^{\lambda_\nu y} dF(y)$. Заметим, что

$$\begin{aligned} \theta^{(\nu)}(\lambda) &:= \mathbf{E} e^{\lambda X^{(\nu)}} = \frac{\theta(\lambda_\nu + \lambda)}{\theta(\lambda_\nu)}, \quad \lambda \in [-\lambda_\nu, \lambda^+ - \lambda_\nu], \\ \mu^{(\nu)}(\lambda) &:= \frac{d}{d\lambda} \theta^{(\nu)}(\lambda) = \mu(\lambda_\nu + \lambda), \quad \mathbf{E} X^{(\nu)} = \nu, \quad \mathbf{D} X^{(\nu)} = \sigma^2(\lambda_\nu). \end{aligned}$$

Функция $\lambda^{(\nu)}(\mu) \equiv \lambda_\mu^{(\nu)}$, обратная к $\mu^{(\nu)}(\lambda)$, равна $\lambda(\mu) - \lambda(\nu)$, функция отклонений для сл.в. $X^{(\nu)}$ равна

$$\psi^{(\nu)}(t) = t\lambda_t^{(\nu)} - \ln \theta^{(\nu)}(\lambda_t^{(\nu)}) = \psi(t) - \psi(\nu) - (t - \nu)\lambda_\nu, \quad t \in (\mu_0, \mu^+).$$

Положим

$$\begin{aligned} \overline{X}^{(\nu)} &:= -X^{(\nu)}, \quad \overline{\theta}^{(\nu)}(\lambda) = \theta^{(\nu)}(-\lambda), \quad \overline{\mu}^{(\nu)}(\lambda) = -\mu^{(\nu)}(-\lambda), \\ \overline{\lambda}^{(\nu)}(\mu) &= -\lambda^{(\nu)}(-\mu), \quad \overline{\psi}^{(\nu)}(t) = \psi^{(\nu)}(-t), \\ \lambda &\in (-\lambda^+ + \lambda_\nu, \lambda_\nu], \quad \mu \in (-\mu^+, -\mu_0), \quad t \in (-\mu^+, -\mu_0). \end{aligned}$$

с. Положим

$$S_n^{(\nu)} := \sum_{i=1}^n X_i^{(\nu)}, \quad \overline{S}_n^{(\nu)} := \sum_{i=1}^n \overline{X}_i^{(\nu)}, \quad S_0^{(\nu)} = \overline{S}_0^{(\nu)} = 0$$

и выпишем оценки для хвостов распределений вероятностей:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(S_n > x) &= \mathbf{P}(e^{\lambda S_n} > e^{\lambda x}) \leq e^{-\lambda x} \theta(\lambda)^n \text{ при } x > 0, \lambda \in (0, \lambda^+), \\ \mathbf{P}(S_n > tn) &= \mathbf{P}(e^{\lambda(t_1) S_n} > e^{\lambda(t_1) tn}) \leq e^{-\psi(t; \lambda(t_1))n} \text{ при } t \geq t_1 \in (\mu_0, \mu^+), \\ \mathbf{P}(S_n > tn) &\leq e^{-\psi(t)n}, \quad t \in (\mu_0, \mu^+), \\ \mathbf{P}(S_n^{(\nu)} > tn) &\leq e^{-\psi^{(\nu)}(t)n}, \quad t \in (\nu, \mu^+), \\ \mathbf{P}(S_n^{(\nu)} > tn) &\leq e^{-\psi^{(\nu)}(t; \lambda^{(\nu)}(t_1))n}, \quad t \geq t_1 \in (\nu, \mu^+), \\ \mathbf{P}(S_n^{(\nu)} < tn) &\leq e^{-\psi^{(\nu)}(t)n}, \quad t \in (\mu_0, \nu), \\ \mathbf{P}(S_n^{(\nu)} < tn) &\leq e^{-\psi^{(\nu)}(t; \lambda^{(\nu)}(t_1))n}, \quad t \leq t_1 \in (\mu_0, \nu), \end{aligned}$$

где $\psi^{(\nu)}(t; \lambda) := \lambda t - \ln \theta^{(\nu)}(\lambda)$.

Соотношение (1.2) выполняется равномерно по t из любого отрезка, содержащегося в (μ_0, μ^+) , а $c(t) = (\sqrt{2\pi} \lambda_t \sigma(\lambda_t))^{-1}$ в предположении (A0).

d. Для хвостов распределений максимума и минимума случайных блужданий имеют место следующие оценки (см. [5, § 22] или [3, лемма 1]):

$$\begin{aligned}\mathbf{P}\left(\max_{j \geq 0} S_j \geq y\right) &\leq e^{-qy}, \quad q := \sup\{\lambda: \theta(\lambda) \leq 1\}, \quad \mu_0 < 0; \\ \mathbf{P}\left(\max_{j \geq 0} S_j^{(\nu)} \geq y\right) &\leq e^{-q^{(\nu)}y}, \quad q^{(\nu)} := \sup\{\lambda: \theta^{(\nu)}(\lambda) \leq 1\}, \quad \nu \in (\mu_0, 0); \\ \mathbf{P}\left(\min_{j \geq 1} S_j^{(\nu)} \leq -y\right) &\leq e^{-\bar{q}^{(\nu)}y}, \quad \bar{q}^{(\nu)} := \inf\{\lambda: \theta^{(\nu)}(\lambda) \leq 1\}, \quad \nu \in (0, \mu^+).\end{aligned}$$

e. Функционал $\mathbf{E} h_n(S_1, \dots, S_n) = \int \dots \int h_n(s_1, \dots, s_n) \prod_{i=1}^n dF(x_i)$ для измеримой функции h_n от случайного блуждания после замены меры $\prod_{i=1}^n dF(x_i) = \theta(\lambda_\nu)^n e^{-\lambda_\nu s_n} \prod_{i=1}^n dF^{(\nu)}(x_i)$ преобразуется к виду

$$\begin{aligned}\theta(\lambda_\nu)^n \int \dots \int e^{-\lambda_\nu s_n} h_n(s_1, \dots, s_n) \prod_{i=1}^n dF^{(\nu)}(x_i) \\ = e^{-\psi(\nu)n} \mathbf{E} \{e^{-\lambda_\nu(S_n^{(\nu)} - \nu n)} h_n(S_1^{(\nu)}, \dots, S_n^{(\nu)})\}.\end{aligned}$$

f. Для нерешетчатого распределения F выпишем асимптотическое разложение функции распределения $F_n^{(\nu)}(\cdot)$ нормированной суммы $(S_n^{(\nu)} - \nu n)/(\sigma(\lambda_\nu)\sqrt{n})$ [6]:

$$F_n^{(\nu)}(x) = \Phi(x) + \frac{a_3^{(\nu)}}{6\sigma(\lambda_\nu)^3\sqrt{n}}(1-x^2)\varphi(x) + \frac{\varepsilon_n^{(\nu)}(x)}{\sqrt{n}},$$

где $\Phi(x)$ и $\varphi(x)$ — функция распределения и плотность распределения стандартного нормального закона, $a_3^{(\nu)} = \mathbf{E}(X^{(\nu)} - \nu)^3$, $\sup_x |\varepsilon_n^{(\nu)}(x)| = \varepsilon_n^{(\nu)} \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. В работе [2] указано, что $\sup_{\alpha \leq \nu \leq \beta} \varepsilon_n^{(\nu)} = \varepsilon_n \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$, при любых $\mu_0 < \alpha < \beta < \mu^+$. Это утверждение легко проверить, дополнив вывод, приведенный в [6, гл. XVI, §§ 2–4], либо воспользовавшись доказательством теоремы 3.3.1 из [7].

g. Воспользовавшись асимптотическим разложением из предыдущего пункта, получаем для вероятности $\mathbf{P}(S_n^{(\nu)} - \nu n \in [x, x + \Delta])$, $\Delta > 0$, выражение

$$\Phi\left(\frac{y}{\sigma(\lambda_\nu)\sqrt{n}}\right)\Big|_x^{x+\Delta} + \frac{a_3^{(\nu)}}{6\sigma(\lambda_\nu)^3\sqrt{n}} \left(\left(1 - \frac{y^2}{\sigma(\lambda_\nu)^2 n}\right) \varphi\left(\frac{y}{\sigma(\lambda_\nu)\sqrt{n}}\right) \right)\Big|_x^{x+\Delta}$$

плюс член $o(n^{-1/2})$, равномерно малый по $\nu \in [\alpha, \beta] \subseteq (\mu_0, \mu^+)$ и по x . Поскольку производная функции $(1-x^2)\varphi(x)$ ограничена, то второе слагаемое в указанном выражении есть $O(n^{-1})$ равномерно по ν и по x , а первое представимо в виде:

$$\frac{\Delta}{\sqrt{2\pi}\sigma(\lambda_\nu)\sqrt{n}} \exp\left\{-\frac{x^2}{2\sigma(\lambda_\nu)^2 n} - \frac{x \cdot \theta \Delta}{\sigma(\lambda_\nu)^2 n} - \frac{(\theta \Delta)^2}{2\sigma(\lambda_\nu)^2 n}\right\},$$

где $\theta \equiv \theta(x, \Delta, \nu) \in [0, 1]$. В итоге для рассматриваемой вероятности получаем асимптотическую формулу

$$\Delta(\sigma(\lambda_\nu)\sqrt{2\pi n})^{-1} \exp\left\{-\frac{x^2}{2\sigma(\lambda_\nu)^2 n}\right\} + \delta_n^{(\nu)}(x) n^{-1/2},$$

где $\delta_n^{(\nu)}(x) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$ равномерно по $\nu \in [\alpha, \beta] \subseteq (\mu_0, \mu^+)$ и по $x = o(n)$ (т.е. $|x| \leq b_n = o(n)$). Аналогично получаем, что для $\nu \in [\alpha, \beta]$ и всех x

$$\mathbf{P}(S_n^{(\nu)} - \nu n \in [x, x + \Delta]) \leq (\Delta + \delta_n)(\sigma(\lambda_\nu)\sqrt{2\pi n})^{-1},$$

где последовательность $\delta_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$ мы выберем убывающей.

3. Основные результаты. Чтобы облегчить знакомство с работой, вывод точной асимптотики вероятностей больших отклонений $\mathbf{P}(\ln Z_n > tn)$ разбивается на несколько этапов, из которых первый — получение логарифмической асимптотики этих вероятностей.

Теорема 1. В предположениях (A0)–(A2) для любого $0 < \varepsilon < \mu^*$ и $t \in [\varepsilon, \mu^*]$ выполнены неравенства

$$c_\varepsilon n^{-1} \leq e^{\hat{\psi}(t)n} \mathbf{P}(\ln Z_n > tn) \leq C_\varepsilon n^{\lambda_t} \quad (3.1)$$

для некоторых $0 < c_\varepsilon < C_\varepsilon < \infty$ (задаваемых конструктивно, причем $c_\varepsilon, C_\varepsilon \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$), где $\hat{\psi}(t) = \lambda^* t - \ln \theta(\lambda^*)$ (см. п. 2а).

Теорема 2. Пусть выполнено (A1), $-\infty < \mu_0 < 0$ и существует $\kappa > 0$ такое, что $\theta(\kappa) = 1$. Тогда при $n \rightarrow \infty$ $\mathbf{E} e^{\kappa M_n} \sim C_2 n$, $M_n = \max_{0 \leq j \leq n} S_j$, где постоянная $C_2 > 0$ определена в конце п. 5.

Теорема 3. В условиях теоремы 2 при $n \rightarrow \infty$ имеет место соотношение; $\mathbf{E} U_n^\kappa \sim C_3 n$, $U_n = \sum_{j=0}^n e^{S_j}$, выражение для C_3 приводится в (6.10).

Теорема 4. Пусть выполнены условия (A0)–(A2) и $-\infty < \mu_0 < 0$. Тогда

$$\mathbf{P}(\ln Z_n > \mu^* n) \sim (2\mu^*)^{-1} H e^{-\psi(\mu^*)n}, \quad n \rightarrow \infty. \quad (3.2)$$

Теорема 5. В предположениях теоремы 4

$$\mathbf{P}(\ln Z_n > tn) \sim \Phi\left(\sqrt{n} \frac{\mu^* - t}{\sigma(\lambda^*)} \sqrt{\frac{\mu^*}{t}}\right) (\mu^*)^{-1} H e^{-\hat{\psi}(t)n}, \quad n \rightarrow \infty, \quad (3.3)$$

равномерно по $t \in [\varepsilon, \mu^*]$, где $0 < \varepsilon < \mu^*$ — произвольное.

Выражение для постоянной H приведено в (7.30). Первый множитель в правой части (3.3) лежит в промежутке от $1/2$ до 1 и может быть заменен на 1 при $t = t_n$ таких, что $(\mu^* - t_n)\sqrt{n} \rightarrow \infty$, $n \rightarrow \infty$, и на $1/2$ при $\mu^* - t_n = o(1/\sqrt{n})$. Таким образом, теорема 4 является частным случаем теоремы 5. В п. 7 доказывается теорема 4 и делаются необходимые замечания относительно доказательства теоремы 5.

4. Доказательство теоремы 1.

а. Введем обозначения $l_n := \min_{0 \leq i \leq n} s_i$, $k_n := \min(k \leq n: s_k = l_n)$, $L_n := \min_{0 \leq i \leq n} S_i$, $K_n := \min(k \leq n: S_k = L_n)$. Оценивая суммы $\sum_{j=0}^n e^{-s_j}$, $\sum_{j=0}^{n-1} e^{-s_j}$ снизу максимальным слагаемым, а сверху — его произведением на число слагаемых в сумме, получим для подынтегральной функции в (1.1) с учетом неравенства $\sum_{j=0}^{n-1} e^{-s_j} \leq \sum_{j=0}^n e^{-s_j}$ оценки соответственно сверху и снизу:

$$e^{l_n}(1 + n^{-1}e^{l_n - s_n})^{-N} \quad \text{и} \quad (n+1)^{-1}e^{l_n}(1 + e^{l_{n-1} - s_n})^{-N}. \quad (4.1)$$

Для $t \in (0, \mu^+)$ положим $N_t := [e^{tn}]$, где $[\cdot]$ обозначает целую часть заключенного в скобки числа. В основе доказательства теоремы 1 лежит исследование интеграла (1.1), в котором подынтегральная функция заменяется на $e^{l_n}(1 + e^{l_n - s_n})^{-N_t}$. Этот интеграл запишем в виде следующей суммы математических ожиданий:

$$\sum_{m=0}^n \mathbf{E}(e^{L_n}(1 + e^{L_n - S_n})^{-N_t}; K_n = m). \quad (4.2)$$

Ее слагаемые представим в виде произведения:

$$\mathbf{E}(e^{L_m}; K_m = m) \cdot \mathbf{E}((1 + e^{-S_{n-m}})^{-N_t}; L_{n-m} = 0). \quad (4.3)$$

б. Покажем, что разность между математическими ожиданиями

$$\mathbf{E}(e^{L_n}(1 + e^{L_{n-1} - S_n})^{-N_t}) \quad \text{и} \quad \mathbf{E}(e^{L_n}(1 + e^{L_n - S_n})^{-N_t}) \quad (4.4)$$

убывает при $t \in [\alpha, \beta] \subseteq (0, \mu^+)$ быстрее, чем $\exp(-e^{\gamma n})$ при некотором $\gamma > 0$; в таких случаях будем далее говорить, что скорость убывания двойная экспоненциальная по n . Первое из выражений (4.4) разложим в сумму математических ожиданий, суженных на события $\{L_{n-1} = L_n\}$ и $\{L_{n-1} > L_n\}$. Во втором случае имеем $L_n = S_n$, $L_{n-1} > S_n$, $e^{L_{n-1} - S_n} > 1$, а соответствующее математическое ожидание не превосходит тем самым 2^{-N_t} . В первом случае представим математическое ожидание в виде разности

$$\mathbf{E}(e^{L_n}(1 + e^{L_n - S_n})^{-N_t}) - \mathbf{E}(e^{L_n}(1 + e^{L_n - S_n})^{-N_t}; L_{n-1} > L_n).$$

Так как $\{L_{n-1} > L_n\} \subseteq \{L_n = S_n\}$, $L_n < 0$, то вычитаемое не превосходит 2^{-N_t} , и утверждение установлено.

с. Проверим, что при $\theta'(1) < 0$ ($\mu_0 < 0$)

$$\mathbf{E}(e^{L_m}; K_m = m) \sim c_1 \theta(1)^m, \quad m \rightarrow \infty, \quad c_1 > 0. \quad (4.5)$$

Запишем математическое ожидание (4.5) в интегральной форме:

$$\begin{aligned} \int \cdots \int_{\{k_m=m\}} e^{s_m} \prod_{i=1}^m dF(x_i) &= \theta(1)^m \int \cdots \int_{\{s_j > s_m, j < m\}} \prod_{i=1}^m dF^{(\mu_1)}(x_i) \\ &= \theta(1)^m \mathbf{P}(S_j^{(\mu_1)} > S_m^{(\mu_1)}, j < m) = \theta(1)^m \mathbf{P}(S_j^{(\mu_1)} < 0, 1 \leq j \leq m). \end{aligned}$$

Так как $\mu_1 < 0$, имеем $\mathbf{P}(S_j^{(\mu_1)} < 0, 1 \leq j \leq m) \rightarrow \mathbf{P}(S_j^{(\mu_1)} < 0, j \geq 1) =: c_1 > 0$, $m \rightarrow \infty$, и приходим к соотношению (4.5).

д. При $\mu_0 < 0$ для любого $\nu \in (0, \mu^+)$ положим $L_n^{(\nu)} := \min_{0 \leq i \leq n} S_i^{(\nu)}$, $L_\infty^{(\nu)} := \min_{n \geq 0} S_n^{(\nu)}$. Проверим, что $\mathbf{P}(L_n^{(\nu)} = 0) \rightarrow \mathbf{P}(L_\infty^{(\nu)} = 0)$, $n \rightarrow \infty$, равномерно по ν из любого отрезка, содержащегося в $(0, \mu^+)$. Разность $\mathbf{P}(L_n^{(\nu)} = 0) - \mathbf{P}(L_\infty^{(\nu)} = 0) = \mathbf{P}(L_n^{(\nu)} = 0, \bigcup_{k=n+1}^\infty \{S_k^{(\nu)} < 0\})$ оценим сверху суммой $\sum_{k=n+1}^\infty \mathbf{P}(S_k^{(\nu)} < 0)$. Применяя неравенство $\mathbf{P}(S_k^{(\nu)} < 0) \leq e^{-\psi^{(\nu)}(0)k}$ (см. п. 2с) и используя непрерывность $\psi^{(\nu)}(t)$ по ν (см. п. 2б), приходим к требуемому заключению.

е. Покажем, что при $\mu_0 < 0$ для любого $\Delta > 0$

$$\mathbf{P}(S_n^{(\nu)} - \nu n \in [x, x + \Delta], L_n^{(\nu)} = 0) \sim \Delta c_2^{(\nu)} n^{-1/2}, \quad n \rightarrow \infty, \quad (4.6)$$

равномерно по $x = o(\sqrt{n})$ (т.е. $|x| \leq b_n = o(\sqrt{n})$) и по ν из любого отрезка $[\alpha, \beta]$, содержащегося в $(0, \mu^+)$; $c_2^{(\nu)} := (\sigma(\lambda_\nu) \sqrt{2\pi})^{-1} \mathbf{P}(L_\infty^{(\nu)} = 0)$.

Положим $m_n = \lfloor \sqrt[4]{n} \rfloor$ и представим вероятность (4.6) в виде

$$\mathbf{P}\left(S_n^{(\nu)} - \nu n \in [x, x + \Delta], \{L_{m_n}^{(\nu)} = 0\} \setminus \left\{ \bigcup_{j=m_n+1}^n \{S_j^{(\nu)} < 0\} \right\}\right).$$

Оценим ее снизу разностью вероятностей

$$\mathbf{P}(S_n^{(\nu)} - \nu n \in [x, x + \Delta], L_{m_n}^{(\nu)} = 0) - \mathbf{P}\left(\bigcup_{j=m_n+1}^n \{S_j^{(\nu)} < 0\}\right), \quad (4.7)$$

а сверху — первым членом в (4.7). Второй член в (4.7) не превосходит

$$\mathbf{P}\left(S_{m_n}^{(\nu)} \geq \frac{\nu m_n}{2}\right) \cdot \mathbf{P}\left(\min_{1 \leq j \leq n-m_n} S_j^{(\nu)} < \frac{\nu m_n}{2}\right) + \mathbf{P}\left(S_{m_n}^{(\nu)} < \frac{\nu m_n}{2}\right). \quad (4.8)$$

Второе слагаемое в (4.8) не превосходит величины $\exp(-\psi^{(\nu)}(\nu/2)m_n) = o(n^{-1/2})$ равномерно по указанным выше ν (см. пп. 2с, 2б). Второй множитель первого слагаемого в (4.8) не превосходит $\exp(\bar{q}^{(\nu)}\nu m_n/2)$, что также есть $o(n^{-1/2})$ равномерно по ν (см. п. 2д).

Первую вероятность в (4.7) запишем в интегральной форме:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{P}(S_{n-m_n}^{(\nu)} - \nu(n - m_n) + y \in [x, x + \Delta]) \mathbf{P}(S_{m_n}^{(\nu)} - \nu m_n \in dy; L_{m_n}^{(\nu)} = 0) \quad (4.9)$$

и разобьем область интегрирования в (4.9) на части $|y| \leq \delta m_n$ и $|y| > \delta m_n$, $\delta > 0$. В интеграле (4.9) по области $|y| \leq \delta m_n$ заменим подынтегральную функцию на равномерно по $\nu \in [\alpha, \beta] \subseteq (0, \mu^+)$ эквивалентное выражение $\Delta(\sigma(\lambda_\nu)\sqrt{2\pi n})^{-1}$ (см. п. 2g) и вынесем его за знак интеграла. Остающийся интеграл равен $\mathbf{P}(L_{m_n}^{(\nu)} = 0) + o(1)$ и при $n \rightarrow \infty$ стремится к $\mathbf{P}(L_\infty^{(\nu)} = 0)$ также равномерно по ν . Интеграл (4.9) по области $|y| > \delta m_n$ оценим сверху вероятностью

$$\mathbf{P}(|S_{m_n}^{(\nu)} - \nu m_n| > \delta m_n) \leq \exp\{-(\psi^{(\nu)}(\nu + \delta) + \psi^{(\nu)}(\nu - \delta))m_n\},$$

предполагая, что $\nu \pm \delta \in (\mu_0, \mu^+)$ (см. п. 2c). Минимизируя выражения (см. п. 2b) $\psi^{(\nu)}(\nu + \delta) = \psi(\nu + \delta) - \psi(\nu) - \delta\lambda_\nu$ и $\psi^{(\nu)}(\nu - \delta) = \psi(\nu - \delta) - \psi(\nu) + \delta\lambda_\nu$ по $\nu \in [\alpha, \beta] \subseteq (0, \mu^+)$ при $\delta < \min(\alpha, \mu^+ - \beta)$, получаем для рассматриваемого интеграла равномерную по ν оценку $o(n^{-1/2})$. Таким образом, соотношение (4.6) установлено.

f. Пусть $\mu_0 < 0$, функция $h(x) \geq 0$ непосредственно интегрируема по Риману, $c_2^{(\nu)} := (\sigma(\lambda_\nu)\sqrt{2\pi})^{-1} \mathbf{P}(L_\infty^{(\nu)} = 0)$. Покажем, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} h(x) d\mathbf{P}(S_n^{(\nu)} - \nu n \leq x, L_n^{(\nu)} = 0) \sim \frac{c_2^{(\nu)}}{\sqrt{n}} \int_{-\infty}^{\infty} h(x) dx, \quad n \rightarrow \infty, \quad (4.10)$$

равномерно по $\nu \in [\alpha, \beta] \subseteq (0, \mu^+)$. Докажем вариант соотношения (4.10), сократив область интегрирования до $[0, \infty]$. Возьмем $B > 0$ сколь угодно большим и разобьем соответствующий интеграл в сумму двух: $J_1^{(\nu)}$ по отрезку $[0, B]$ и $J_2^{(\nu)}$ по интервалу (B, ∞) . Возьмем разбиение $x_0 = 0 < x_1 < x_2 < \dots$ положительной полупрямой с шагом Δ и будем считать, что B кратно Δ . Обозначим через $\bar{m}_k$ и $\underline{m}_k$ супремум и инфимум функции $h(x)$ по отрезку $[x_{k-1}, x_k]$. Применяя (4.6), получим для верхней суммы Дарбу–Стилтьеса по отрезку $[0, B]$ равномерную по $\nu \in [\alpha, \beta]$ оценку:

$$\sum_{x_k \leq B} \bar{m}_k \mathbf{P}(S_n^{(\nu)} - \nu n \in [x_{k-1}, x_k], L_n^{(\nu)} = 0) \sim \frac{c_2^{(\nu)}}{\sqrt{n}} \sum_{x_k \leq B} \bar{m}_k \Delta, \quad n \rightarrow \infty.$$

Аналогичную оценку получим для нижней суммы. Выбирая $\Delta > 0$ достаточно малым, получим, что разность $\sum_{x_k \leq B} (\bar{m}_k - \underline{m}_k) \Delta$ между нижней и верхней суммами будет сколь угодно мала. Отсюда следует, что для всех достаточно больших n и $\nu \in [\alpha, \beta]$ интеграл $J_1^{(\nu)}$ лежит в границах $(c_2^{(\nu)} \pm \varepsilon)n^{-1/2} \int_0^B h(x) dx$. Для оценивания интеграла $J_2^{(\nu)}$ также переходим к суммам Дарбу–Стилтьеса и используем неравенства (см. п. 2g)

$$\mathbf{P}(S_n^{(\nu)} - \nu n \in [x_k, x_{k+1}]) \leq (\Delta + \delta_n)(\sigma(\lambda_\nu)\sqrt{2\pi n})^{-1}.$$

В результате для достаточно малых $\Delta > 0$, достаточно большого B и всех достаточно больших n модуль интеграла $J_2^{(\nu)}$ оценивается сверху

равномерно по ν величиной $\varepsilon/\sqrt{n}$ для любого заранее заданного $\varepsilon > 0$. Повторяя проведенные рассуждения для интеграла, взятого по области $(-\infty, 0)$, получаем (4.10).

g. Покажем, что при $\theta'(1) < 0$ равномерно по $\nu \in [\alpha, \beta] \subseteq (0, \mu^+)$

$$\mathbf{E}((1 + e^{-S_n})^{-N_\nu}; L_n = 0) \sim c_3^{(\nu)} n^{-1/2} e^{-\psi(\nu)n}, \quad n \rightarrow \infty, \quad (4.11)$$

где $c_3^{(\nu)} := (\sigma(\lambda_\nu)\sqrt{2\pi})^{-1} \mathbf{P}(L_\infty^{(\nu)} = 0)\Gamma(\lambda_\nu)$ и $\Gamma(\cdot)$ есть гамма-функция.

Математическое ожидание в (4.11) запишем в интегральной форме; сделав замену меры (см. п. 2е), получаем для него выражение

$$\begin{aligned} & e^{-\psi(\nu)n} \mathbf{E}\{e^{-\lambda_\nu(S_n^{(\nu)} - \nu n)}(1 + e^{-S_n^{(\nu)}})^{-N_\nu}; L_n^{(\nu)} = 0\} \\ &= e^{-\psi(\nu)n} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda_\nu(x - \nu n)}(1 + e^{-x})^{-N_\nu} \mathbf{P}(S_n^{(\nu)} \in dx; L_n^{(\nu)} = 0). \end{aligned} \quad (4.12)$$

В интеграле (4.12) перейдем к переменной $y = x - \nu n$. Заметим, что

$$(1 + e^{-\nu n} e^{-y})^{-N_\nu} \sim \exp(-e^{-y}), \quad n \rightarrow \infty, \quad (4.13)$$

равномерно по $\nu \geq \alpha > 0$, $y \geq -\delta n$, $0 < \delta < \alpha/2$, а при $y \leq -\delta n$ выражение в левой части (4.13) убывает как двойная экспонента от n . Следовательно, для получения асимптотики (4.11) достаточно рассмотреть интеграл в (4.12) по области $x - \nu n \geq -\delta n$. Воспользовавшись эквивалентностью (4.13), приходим к интегралу

$$\int_{-\delta n}^{\infty} \exp(-\lambda_\nu y - e^{-y}) \mathbf{P}(S_n^{(\nu)} - \nu n \in dy; L_n^{(\nu)} = 0). \quad (4.14)$$

Подынтегральная функция в (4.14) при $y \leq -\delta n$ оценивается для достаточно больших n сверху величиной $\exp(-e^{\gamma n})$, $\gamma > 0$. Поэтому расширение области интегрирования в (4.14) до всей прямой не повлияет на асимптотику. Применяя соотношение (4.10) к интегралу (4.14), взятому по всей прямой, приходим к результату (4.11). При этом $c_3^{(\nu)} = c_2^{(\nu)} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-\lambda_\nu y - e^{-y}) dy$. Замена переменной $x = e^{-y}$ показывает, что последний интеграл есть гамма-функция $\Gamma(\lambda_\nu)$.

h. При $\theta'(1) < 0$ равномерно по $\nu \in [\alpha, \beta] \subseteq (0, \mu^+)$

$$\mathbf{E}((1 + n^{-1} e^{-S_n})^{-N_\nu}; L_n = 0) \sim c_3^{(\nu)} n^{\lambda_\nu - 1/2} e^{-\psi(\nu)n}, \quad n \rightarrow \infty. \quad (4.15)$$

Вывод аналогичен (4.11), только вместо интеграла (4.14) получаем интеграл

$$\int_{-\delta n}^{\infty} \exp(-\lambda_\nu y - n^{-1} e^{-y}) \mathbf{P}(S_n^{(\nu)} - \nu n \in dy; L_n^{(\nu)} = 0).$$

Далее делаем замену переменной $y = x - \ln n$, в результате чего к асимптотике (4.11) добавляется множитель $e^{\lambda_\nu \ln n} = n^{\lambda_\nu}$.

и. Используем асимптотики (4.5) и (4.11) для сомножителей (4.3) при $m \rightarrow \infty$, $m \leq (1 - t/\mu^+ - \varepsilon)n$ и $\varepsilon > 0$ сколь угодно малом. Границы изменения m выделяют зону действия соотношения (4.11). Положив

$$\Lambda(t, s) := -s \ln \theta(1) + (1 - s)\psi(t(1 - s)^{-1}), \quad s \in [0, 1 - t(\mu^+)^{-1}], \quad (4.16)$$

получаем, что слагаемые (4.3) суммы (4.2) эквивалентны выражению:

$$c_4(t, s)(n - ns)^{-1/2} e^{-\Lambda(t, s)n}, \quad s := mn^{-1}, \quad c_4(t, s) := c_1 c_3^{t/(1-s)}, \quad (4.17)$$

равномерно по $a_n \leq m \leq (1 - t/\mu^+ - \varepsilon)n$, где $a_n \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$.

ж. Дифференцируем функцию $\Lambda(t, s)$ по переменной s :

$$\frac{\partial \Lambda(t, s)}{\partial s} = \ln \frac{\theta(\lambda(t(1 - s)^{-1}))}{\theta(1)}, \quad \frac{\partial^2 \Lambda(t, s)}{\partial s^2} = \frac{t^2}{(1 - t)^3 \sigma^2(\lambda(t(1 - s)^{-1}))}. \quad (4.18)$$

Ввиду монотонности функции $\lambda(\cdot)$ и неравенства $\lambda(t(1 - s)^{-1}) > \lambda(0) > 1$ условие $\theta(\lambda(t(1 - s)^{-1})) = \theta(1)$ обращения в нуль первой производной приводит к уравнению $t(1 - s)^{-1} = \mu^*$, решение которого мы обозначим $\hat{s}_t := 1 - t/\mu^*$. Поскольку вторая производная положительна, то функция $\Lambda(t, s)$ по переменной s имеет единственный минимум в точке $s = \hat{s}_t$, равный $\Lambda(t, \hat{s}_t) = \hat{\psi}(t)$ (см. п. 2а). В окрестности точки $s = \hat{s}_t$ запишем разложение Тейлора:

$$\Lambda(t, \hat{s}_t + \Delta s) = \hat{\psi}(t) + \frac{1}{2b_t^2} \Delta s^2 + O(\Delta s^3), \quad b_t^2 := \frac{t\sigma^2(\lambda^*)}{(\mu^*)^3}. \quad (4.19)$$

к. Пусть $t \in (0, \mu^*)$, так что $\hat{s}_t > 0$. Слагаемые суммы (4.2) при $|m/n - \hat{s}_t| \leq n^{-3/8}$ заменим их асимптотическими выражениями (4.17), к которым применим разложение Тейлора (4.19), и получим:

$$\frac{c_4(t, \hat{s}_t) e^{-\hat{\psi}(t)n}}{\sqrt{n(1 - \hat{s}_t)}} \cdot \exp \left\{ -\frac{1}{2b_t^2} \left(\frac{m}{n} - \hat{s}_t \right)^2 n + O(1) \left(\frac{m}{n} - \hat{s}_t \right)^3 n \right\}, \quad (4.20)$$

где член $O(1)$ равномерно ограничен в указанном диапазоне m . Заметив, что $|m/n - \hat{s}_t|^3 n \leq n^{-1/8}$, перейдем к интегральной сумме и получим

$$\sum_{\{|m/n - \hat{s}_t| \leq n^{-3/8}\}} \exp \left\{ -\frac{(m - n\hat{s}_t)^2}{2b_t^2 n} \right\} \sim \sqrt{2\pi} b_t \sqrt{n}, \quad n \rightarrow \infty.$$

Таким образом, для суммы членов (4.20) имеем асимптотику

$$c_5 e^{-\hat{\psi}(t)n}, \quad c_5 := c_4(t, \hat{s}_t) (1 - \hat{s}_t)^{-1/2} \sqrt{2\pi} b_t = c_1 \mathbf{P}(L_\infty^{(\mu^*)} = 0) \Gamma(\lambda^*) (\mu^*)^{-1}. \quad (4.21)$$

Далее мы покажем, что слагаемыми суммы (4.2) за пределами отрезка $|m/n - \hat{s}_t| \leq n^{-3/8}$ можно пренебречь, так что асимптотика суммы (4.2) дается выражением (4.21).

1. На концах отрезка $|m/n - \hat{s}_t| \leq n^{-3/8}$, $t > 0$, второй сомножитель в выражении (4.20) эквивалентен величине $\exp\{-(2b_t^2)^{-1}n^{1/4}\}$. Поэтому, ввиду (4.17) и свойств функции $\Lambda(t, s)$ (см. п. j), слагаемые суммы (4.2) при $|m/n - \hat{s}_t| > n^{-3/8}$, $0 < \varepsilon < m/n < 1 - t/\mu^+ - \varepsilon$, получают по сравнению с центральными членами дополнительный множитель, экспоненциально малый по $n^{1/4}$. Остается рассмотреть области $m \leq \varepsilon n$ и $m \geq (1 - t/\mu^+ - \varepsilon)n$ для сколь угодно малого $\varepsilon > 0$. При $m \leq \varepsilon n$ слагаемые (4.3) оценим сверху, отбросив в (4.3) первый сомножитель, и получим границу:

$$\mathbf{E}((1 + e^{-S_{n-m}})^{-N_t}; L_{n-m} = 0) \leq \mathbf{E}((1 + e^{-S_{n-m}})^{[e^{t(n-m)}]}; L_{n-m} = 0). \quad (4.22)$$

Далее используем (4.11) при $\nu = t$ и получим, что экспоненциальный член асимптотики правой части (4.22) равен $\exp(-\psi(t)(n-m)) \leq \exp(-\psi(t)(1-\varepsilon)n)$. Напомним, что $\hat{\psi}(t)$ представляет касательную к выпуклой вниз функции $\psi(t)$ в точке $t = \mu^*$, так что $\psi(t) > \hat{\psi}(t)$ при $t \neq \mu^*$. Полагая, что $\psi(t)(1-\varepsilon) > \hat{\psi}(t)$, приходим к выводу, что рассматриваемые слагаемые суммы (4.2) пренебрежимо малы.

м. Пусть $\varepsilon > 0$ настолько мало, что выполнено неравенство $1 - \mu^*/\mu^+ - \varepsilon > 0$. При $n-1 \geq m \geq (1-t/\mu^+ - \varepsilon)n$ используем оценку (4.5) для первого сомножителя в (4.3), а второй сомножитель оценим сверху выражением:

$$\mathbf{E}((1 + e^{-S_{n-m}})^{-N_t}; S_{n-m} \leq (t-\varepsilon)n) + \mathbf{P}(S_{n-m} > (t-\varepsilon)n). \quad (4.23)$$

Первым слагаемым в (4.23) мы пренебрегаем, так как оно убывает, как двойная экспонента по n (см. (4.13) и далее). Ко второму слагаемому применим неравенство из п. 2с:

$$\mathbf{P}(S_{(1-s)n} > (t-\varepsilon)n) \leq \exp\left\{-\psi\left(\frac{t-\varepsilon}{1-s}; \lambda\right)(1-s)n\right\}, \quad s := \frac{m}{n}, \quad \lambda > \lambda^*.$$

Оценка сверху для рассматриваемых слагаемых суммы (4.2) получается умножением правой части неравенства на $c_1\theta(1)^m$ (см. (4.5)). Множитель при n в экспоненте будет равен

$$\begin{aligned} & s \ln \theta(1) - \psi((t-\varepsilon)(1-s)^{-1}; \lambda)(1-s) \\ &= s \ln \theta(1) + (1-s) \ln \theta(\lambda) - \lambda(t-\varepsilon) \\ &= s(\ln \theta(1) - \ln \theta(\lambda)) + \ln \theta(\lambda) - \lambda \cdot (t-\varepsilon). \end{aligned}$$

Так как $\theta(\lambda) > \theta(1) = \theta(\lambda^*)$, то этот множитель убывает по s , а его наибольшее значение для $s \geq 1 - t/\mu^+ - \varepsilon$ равно

$$(1 - t(\mu^+)^{-1}) \ln \theta(1) + t(\mu^+)^{-1} \ln \theta(\lambda) + \varepsilon(\ln \theta(\lambda) - \ln \theta(1) + \lambda) - \lambda t.$$

Вычтем отсюда $(-\hat{\psi}(t))$ и проведем элементарные преобразования:

$$t(\mu^+)^{-1}[(\ln \theta(\lambda) - \ln \theta(1)) - \mu^+ \cdot (\lambda - \lambda^*)] + \varepsilon(\ln \theta(\lambda) - \ln \theta(1) + \lambda). \quad (4.24)$$

Ввиду выпуклости функции $\ln \theta(\lambda)$ имеем неравенство

$$\ln \theta(\lambda) - \ln \theta(\lambda^*) < \mu^* \cdot (\lambda - \lambda^*) < \mu^+ \cdot (\lambda - \lambda^*),$$

так что выражение в квадратных скобках в (4.24) отрицательно. Для $t \in [\alpha, \beta] \subseteq (0, \mu^+)$ все выражение (4.24) будет отрицательным при достаточно малом $\varepsilon > 0$, откуда следует, что рассматриваемые слагаемые не вносят вклада в асимптотику суммы (4.2). Остается заметить, что слагаемое суммы (4.2), соответствующее $m = n$, меньше 2^{-N_t} .

п. Из оценок пп. **k**, **l**, **m**, **b** следует, что

$$\mathbf{E}(e^{L_n}(1 + e^{L_{n-1}-S_n})^{-N_t}) \sim \mathbf{E}(e^{L_n}(1 + e^{L_n-S_n})^{-N_t}) \sim c_5 e^{-\hat{\psi}(t)n} \quad (4.25)$$

при $n \rightarrow \infty$ равномерно по $t \in [\alpha, \beta] \subseteq (0, \mu^*)$. Незначительная модификация проведенных рассуждений приводит к равномерному по t соотношению:

$$\mathbf{E}(e^{L_n}(1 + n^{-1}e^{L_n-S_n})^{-N_t}) \sim c_5 n^{\lambda_t} e^{-\hat{\psi}(t)n}, \quad n \rightarrow \infty. \quad (4.26)$$

Именно, математическое ожидание в (4.26) разлагаем в сумму вида (4.2). Второй сомножитель в представлении типа (4.3) оцениваем с помощью асимптотики (4.15). В результате, суммируя по m таким, что $|m/n - \hat{s}_t| \leq n^{-3/8}$ (см. п. **k**), вместо (4.21) получаем правую часть (4.26). К оценке п. **k** добавляется степенной множитель $(n-m)^{\lambda_t}$. Оценки пп. **l**, **m** сохраняются.

Заключение теоремы 1 для $t \in [\varepsilon, \mu^ - \varepsilon]$ следует из соотношений (4.1), (4.25), (4.26).*

о. При $t = \mu^*$ функция $\Lambda(t, s)$ достигает максимума $\hat{\psi}(\mu^*) \equiv \psi(\mu^*)$ в точке $s = 0$ (см. п. **j**). Соответственно, область суммирования в п. (4.2) разбиваем на части $m/n \leq n^{-3/8}$ и $m/n > n^{-3/8}$. Ввиду (4.11) имеем при $n \rightarrow \infty$:

$$\mathbf{E}((1 + e^{-S_{n-m}})^{-N_{\mu^*}}; L_{n-m} = 0) \sim \frac{c_3^{(\mu^*)}}{\sqrt{n-m}} \exp \left\{ -\psi\left(\frac{\mu^* n}{n-m}\right)(n-m) \right\} \quad (4.27)$$

равномерно по $m \leq (1 - \mu^*/\mu^+ - \varepsilon)n$, $\varepsilon > 0$. По формуле Тейлора имеем:

$$\psi\left(\frac{\mu^* n}{n-m}\right) = \psi(\mu^*) + \lambda^* \mu^* \frac{m}{n-m} + \frac{1}{2b_{\mu^*}^2} \left(\frac{m}{n-m}\right)^2 + O(1) \left(\frac{m}{n}\right)^3 \quad (4.28)$$

при $m \leq n^{5/8}$, $b_{\mu^*}^2 = \sigma^2(\lambda^*)/(\mu^*)^2$ (см. определение b_t^2 в (4.19)). После подстановки (4.28) в (4.27) получаем для суммы по $m \leq n^{5/8}$ эквивалентное

выражение:

$$\frac{c_3^{(\mu^*)}}{\sqrt{n}} e^{-\psi(\mu^*)n} \sum_{m=0}^{[n^{5/8}]} \mathbf{E}(e^{L_m}; K_m = m) \exp \left\{ -m \ln \theta(1) - \frac{1}{2b_{\mu^*}^2} \frac{m^2}{n-m} \right\}. \quad (4.29)$$

Используя соотношение (4.5), выводим, что сумма в (4.29) эквивалентна $c_1 \sqrt{\pi/2} b_{\mu^*} \sqrt{n}$. Таким образом, все выражение (4.29) эквивалентно выражению

$$c_6 \exp(-\psi(\mu^*)n), \quad c_6 := c_1 (2\mu^*)^{-1} \mathbf{P}(L_\infty^{(\mu^*)} = 0) \Gamma(\lambda^*) = c_5 2^{-1}. \quad (4.30)$$

р. Проверим, что при $t = \mu^*$ часть суммы (4.2) по $m/n > n^{-3/8}$ пренебрежимо мала, так что выражение (4.2) при $t = \mu^*$ имеет асимптотику (4.30). Члены этой суммы при $m/n \leq 1 - \mu^*/\mu^+ - \varepsilon$, $\varepsilon > 0$, эквивалентны при $n \rightarrow \infty$ следующему выражению (см. (4.27), (4.5)):

$$c_1 c_3^{(\mu^*)} (n-m)^{-1/2} \exp \left\{ \left(\frac{m}{n} \ln \theta(1) - \psi \left(\frac{\mu^* n}{n-m} \right) \frac{n-m}{n} \right) n \right\} \quad (4.31)$$

равномерно по указанным m . Под знаком экспоненты в (4.31) стоит величина $-\Lambda(\mu^*, m/n)n$ (см. (4.16)). Поскольку функция $\Lambda(\mu^*, s)$, $s \geq 0$, строго возрастает, то $\Lambda(\mu^*, m/n) \geq \Lambda(\mu^*, [n^{5/8}]/n)$ при $m > n^{5/8}$. По формуле Тейлора (см. (4.19)) получаем, что $\Lambda(\mu^*, n^{-3/8}) = \psi(\mu^*) + (1 + o(1))(2b_{\mu^*}^2)^{-1} n^{-3/4}$ и, следовательно, экспонента в (4.31) мажорируется величиной (4.30), умноженной на $se^{-\gamma n^{1/4}}$ при некоторых $s, \gamma > 0$. Следовательно, часть второй суммы при $n^{5/8} < m \leq (1 - \mu^*/\mu^+ - \varepsilon)n$ пренебрежимо мала. Для остатка суммы по $m > (1 - \mu^*/\mu^+ - \varepsilon)n$ сохраняется оценка п. **м**.

г. Рассуждения пп. **о**, **р** приводят к асимптотике (4.25) при $t = \mu^*$, в которой c_5 заменяется на c_6 (см. (4.30)). Это дает нижнюю оценку для вероятностей больших отклонений. Элементарная модификация рассуждений п. **н** приводит к соотношению (4.26) при $t = \mu^*$ и $c_5^{(t)}$, замененном на c_6 . Отсюда следует утверждение теоремы 1 при $t = \mu^*$.

с. Пусть последовательность $t_n \in [\mu^* - \varepsilon, \mu^*(1 - n^{-3/8})]$ произвольна. Покажем, что неравенства (3.1) с заменой t на t_n остаются верными. Во-первых, отметим, что асимптотика (4.11) остается справедливой и в случае замены t на t_n , при этом сохраняется равномерность по всем таким последовательностям t_n . В сумме (4.2) выделяем часть $|m/n - \hat{s}_{t_n}| \leq n^{-3/8}$. Записав разложение Тейлора, находим (ср. (4.28), (4.20)):

$$\psi \left(\frac{t_n n}{n-m} \right) = \psi(\mu^*) + \lambda \cdot \left(\frac{t_n n}{n-m} - \mu^* \right) + \frac{1}{2b_{\mu^*}^2} \frac{(m - \hat{s}_{t_n} n)^2}{(n-m)^2} + \frac{O(1)}{n^{9/8}}. \quad (4.32)$$

После элементарных выкладок, как и в п. **к**, приходим к асимптотике (4.21) при $t = t_n$. Дальнейший анализ подобен проведенному выше

для случая $t \in [\alpha, \mu^* - \varepsilon]$ и приводит к заключению теоремы 1 для указанных t .

т. Пусть $t_n \in [\mu^*(1 - n^{-3/8}), \mu^*]$. В этом случае также выпишем разложение Тейлора (4.32) для $m \leq \hat{s}_{t_n} n + n^{5/8}$. Далее имеем (см. пп. **к**, **о**):

$$\sum_{m \leq \hat{s}_{t_n} n + n^{5/8}} \exp \left\{ -\frac{(m - n\hat{s}_{t_n})^2}{2b_{\mu^*}^2 n} \right\} \sim c_5 \Phi \left(\frac{\sqrt{n}\hat{s}_{t_n}}{b_{\mu^*}} \right) e^{-\hat{\psi}(t_n)}, \quad n \rightarrow \infty, \quad (4.33)$$

где $\Phi(\cdot)$ — функция распределения стандартного нормального закона. Как и выше, устанавливается, что правая часть в (4.33) дает главный член асимптотики всей суммы. Асимптотика нижней оценки вероятностей больших отклонений выводится тем же способом, что и для $t \in [\alpha, \mu^* - \varepsilon]$.

5. Доказательство теоремы 2. Положим $M_n := \max_{0 \leq j \leq n} S_j$, $M_\infty := \max_{j \geq 0} S_j$, $T_n := \min(j \leq n: S_j = M_n)$, $L_{1m} := \min_{1 \leq j \leq m} S_j$ и при $t \in (0, \mu^+]$ введем сл.в. $L_{1n}^{(t)} := \min_{1 \leq j \leq n} S_j^{(t)}$, $L_{1\infty}^{(t)} := \min_{j \geq 1} S_j^{(t)}$. Представим математическое ожидание $\mathbf{E} e^{\kappa M_n}$ в виде суммы по разбиению $\{T_n = m\}$, $m = 0, 1, \dots, n$. Замечая, что $\{T_n = m\} = \{T_m = m, S_j - S_m \leq 0 \text{ при } m \leq j \leq n\}$, получаем:

$$\mathbf{E} e^{\kappa M_n} = \sum_{m=0}^n \mathbf{E} (e^{\kappa M_m}; T_m = m) \mathbf{P}(M_{n-m} = 0). \quad (5.1)$$

Переходя к обращенному случайному блужданию, находим:

$$\begin{aligned} \mathbf{E} (e^{\kappa M_m}; T_m = m) &= \mathbf{E} (e^{\kappa S_m}; T_m = m) = \mathbf{E} (e^{\kappa S_m}; L_{1m} > 0) \\ &= \int \cdots \int_{\{l_{1m} > 0\}} e^{\kappa s_m} \prod_{i=1}^m dF(x_i) \\ &= \int \cdots \int_{\{l_{1m} > 0\}} \prod_{i=1}^m dF^{(\mu_\kappa)}(x_i) = \mathbf{P}(L_{1m}^{(\mu_\kappa)} > 0), \end{aligned} \quad (5.2)$$

где $l_{1m} := \min_{1 \leq j \leq m} s_j$, $s_j = \sum_{i=1}^j x_i$. Подставляя (5.2) в (5.1) и учитывая, что

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(L_{1m}^{(\mu_\kappa)} > 0) &\rightarrow \mathbf{P}(L_{1\infty}^{(\mu_\kappa)} > 0) \quad \text{при } m \rightarrow \infty, \\ \mathbf{P}(M_{n-m} = 0) &\rightarrow \mathbf{P}(M_\infty = 0) \quad \text{при } n - m \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

приходим к заключению теоремы с $C_2 = \mathbf{P}(L_{1\infty}^{(\mu_\kappa)} > 0) \mathbf{P}(M_\infty = 0)$.

6. Доказательство теоремы 3.

а. Используя обозначения из п. 5, представим математическое ожидание $\mathbf{E} U_n^\kappa$ в следующем виде:

$$\sum_{m=0}^n \mathbf{E} \left\{ e^{\kappa M_m} \left(\sum_{j=1}^{m-1} e^{S_j - M_m} + \sum_{j=m}^n e^{S_j - M_m} \right)^\kappa; T_n = m \right\}. \quad (6.1)$$

Введем экземпляр $\tilde{S}_j$ случайного блуждания S_j , независимый от S_j . Для обозначения функционалов от блуждания $\tilde{S}_j$ будем употреблять те же буквы, что и в случае блуждания S_j , снабжая их «волной».

Представим слагаемые суммы (6.1) в виде

$$\mathbf{E} \{ e^{\kappa S_m} (V_m + \tilde{U}_{n-m})^\kappa; L_{1m} > 0, \tilde{M}_{n-m} = 0 \}, \quad (6.2)$$

$$L_{1m} = \min_{1 \leq j \leq m} S_j, \quad V_m := \sum_{j=1}^m e^{-S_j}, \quad \tilde{U}_k := \sum_{j=0}^k e^{\tilde{S}_j}, \quad \tilde{M}_k := \max_{0 \leq j \leq k} \tilde{S}_j.$$

Положим $v_m := \sum_{j=1}^m e^{-s_j}$, $u_k := \sum_{j=0}^k e^{s_j}$, $\bar{s}_k := \max_{1 \leq j \leq k} s_j$,

$$J_k(v) := \int \cdots \int_{\{\bar{s}_k \leq 0\}} (v + u_k)^\kappa \prod_{i=1}^k dF(x_i) = \mathbf{E} ((v + U_k)^\kappa; M_k = 0), \quad v \geq 0,$$

и представим математическое ожидание (6.2) в виде

$$\mathbf{E} (e^{\kappa S_m} J_{n-m}(V_m); L_{1m} > 0) = \int \cdots \int_{\{l_{1m} > 0\}} J_{n-m}(v_m) \prod_{i=1}^m dF^{(\mu_\kappa)}(x_i), \quad (6.3)$$

где использованы обозначения $s_j = \sum_{i=1}^j x_i$, $l_{1m} = \min_{1 \leq i \leq m} s_i$ и учтено, что $e^{\kappa x} dF(x) = \theta(\kappa) dF^{(\mu_\kappa)}(x)$, $\theta(\kappa) = 1$.

б. Покажем, что при $k \rightarrow \infty$

$$J_k(v) \rightarrow J_\infty(v) := \mathbf{E} ((v + U_\infty)^\kappa; M_\infty = 0), \quad U_\infty := \sum_{j=0}^{\infty} e^{S_j}, \quad (6.4)$$

равномерно на ограниченных множествах, функции $J_k(v)$ непрерывны.

Пусть $0 < \delta < 1$, $\mu_0 < \gamma < 0$, и предположим для упрощения записи, что число δx целое. Представим вероятность $\mathbf{P}(U_k > x, M_k = 0)$, $x \geq 1$, в виде суммы по разбиению из трех событий

$$\{S_{\delta x} > 2^{-1} \mu_0 \delta x\}, \quad \{S_{\delta x} \leq 2^{-1} \mu_0 \delta x, \mathcal{B}\}, \quad \{S_{\delta x} \leq 2^{-1} \mu_0 \delta x, \overline{\mathcal{B}}\}, \quad (6.5)$$

где $\mathcal{B} := \{S_j \leq \gamma(j - \delta x), \delta x \leq j \leq k\}$. На множестве $\mathcal{B} \cap \{M_k = 0\}$ выполняется неравенство

$$U_k \leq \delta x + \sum_{j=\delta x}^k e^{\gamma(j-\delta x)} \leq \delta x + (1 - e^\gamma)^{-1}.$$

Тем самым, пересечение $\{U_k > x\} \cap \mathcal{B} \cap \{M_k = 0\}$ пусто для достаточно больших x . Далее, имеем:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(S_{\delta x} > 2^{-1}\mu_0\delta x) &\leq \exp(-\psi(2^{-1}\mu_0)\delta x), \\ \mathbf{P}(S_{\delta x} \leq 2^{-1}\mu_0\delta x, \overline{\mathcal{B}}) &= \mathbf{P}\left(\bigcup_{j=\delta x}^k \left\{S_j > \gamma(j - \delta x), S_{\delta x} \leq \frac{1}{2}\pi\mu_0\delta x\right\}\right) \\ &\leq \mathbf{P}\left(\max_{i \geq 1}(S_i - \gamma i) > -\frac{1}{2}\mu_0\delta x\right), \end{aligned}$$

где учтено, что на множестве $\{S_{\delta x} \leq \mu_0\delta x/2\}$ имеет место включение

$$\{S_j > \gamma(j - \delta x)\} \subseteq \{S_j - S_{\delta x} > \gamma(j - \delta x) - 2^{-1}\mu_0\delta x\}.$$

Используя оценку из п. 2d, в итоге получаем для достаточно больших x и всех k :

$$\mathbf{P}(U_k > x, M_k = 0) \leq \exp(-\psi(2^{-1}\mu_0)\delta x) + \exp(-2^{-1}\mu_0 q_\gamma \delta x), \quad (6.6)$$

где $q_\gamma > 0$ есть решение уравнения $e^{-\lambda\gamma}\theta(\lambda) = 1$.

Из монотонной сходимости $U_k \rightarrow U_\infty$ п.н., $M_k \rightarrow M_\infty$ п.н. при $k \rightarrow \infty$ следует, что последовательность функций распределения $\mathbf{P}(U_k \leq x, M_k = 0)$ слабо сходится к функции распределения $\mathbf{P}(U_\infty \leq x, M_\infty = 0)$. С учетом неравенства (6.6) получаем, что меры $x^\kappa \mathbf{P}(U_k \leq x, M_k = 0)$ слабо сходятся к конечной мере $x^\kappa \mathbf{P}(U_\infty \leq x, M_\infty = 0)$.

Представим функцию $J_k(v)$ в виде

$$\int_1^A (v+x)^\kappa d\mathbf{P}(U_k \leq x, M_k = 0) + \int_{A+}^\infty (v+x)^\kappa d\mathbf{P}(U_k \leq x, M_k = 0). \quad (6.7)$$

Для $\kappa > 1$ производная $\kappa(v+x)^{\kappa-1}$ при $x \in [1, A]$, $v \in [0, B]$ не превосходит $\kappa(A+B)^{\kappa-1}$. Отсюда легко следует, что первый интеграл в (6.7) непрерывен по v , а его сходимость к $\int_1^A (v+x)^\kappa d\mathbf{P}(U_\infty \leq x, M_\infty = 0)$ в случае, когда A есть точка непрерывности предельной меры, равномерна по $v \in [0, B]$. Второй интеграл в (6.7) может быть сделан ввиду (6.6) сколь угодно малым за счет выбора A . Это верно также для интеграла по мере $\mathbf{P}(U_\infty \leq x, M_\infty = 0)$, и соотношение (6.4) установлено.

с. Интеграл (6.3) перепишем в виде

$$\mathbf{E}(J_{n-m}(V_m^{(\mu_\kappa)}); L_{1m}^{(\mu_\kappa)} > 0) = \int_0^\infty J_{n-m}(v) d\mathbf{P}(V_m^{(\mu_\kappa)} \leq v, L_{1m}^{(\mu_\kappa)} > 0), \quad (6.8)$$

где $V_m^{(\nu)} := \sum_{j=1}^m e^{-S_j^{(\nu)}}$, $L_{1m}^{(\nu)} = \min_{1 \leq j \leq m} S_j^{(\nu)}$. Рассуждения, подобные проведенным в предыдущем пункте, приводят к оценке (ср. (6.6))

$$\mathbf{P}(V_m^{(\mu_\kappa)} > v; L_{1m}^{(\mu_\kappa)} > 0) \leq \exp(-\psi^{(\mu_\kappa)}(2^{-1}\mu_\kappa)\delta v) + \exp(-2^{-1}\mu_\kappa q^{(\mu_\kappa)}\delta v). \quad (6.9)$$

Область интегрирования в (6.8) разобьем на части $[0, B]$ и (B, ∞) . Из элементарного неравенства $(v + u)^\kappa \leq 2^\kappa(v^\kappa + u^\kappa)$, $u, v \geq 0$, получаем: $J_k(v) \leq 2^\kappa v^\kappa + 2^\kappa J_k(0)$. Отсюда и из оценки (6.9) вытекает, что интеграл (6.8) по области (B, ∞) может быть сделан за счет выбора B сколь угодно малым равномерно по n и $m \leq n$. В интеграле (6.8) по области $[0, B]$ перейдем к пределу при $n \rightarrow \infty$, $b_n \leq m \leq n - b_n$, $b_n \rightarrow \infty$, $b_n = o(n)$. Принимая во внимание равномерную на $[0, B]$ сходимост $J_k(v) \rightarrow J_\infty(v)$ и слабую сходимост функций распределения $\mathbf{P}(V_m^{(\mu_\kappa)} \leq v, L_{1m}^{(\mu_\kappa)} > 0)$ к функции распределения $\mathbf{P}(V_\infty^{(\mu_\kappa)} \leq v, L_{1\infty}^{(\mu_\kappa)} > 0)$, приходим к заключению, что математическое ожидание (6.8) (а вместе с ним и (6.2)) сходится при $n \rightarrow \infty$ равномерно по $b_n \leq m \leq n - b_n$, $b_n \rightarrow \infty$, $b_n = o(n)$ к математическому ожиданию

$$\mathbf{E}(J_\infty(V_\infty^{(\mu_\kappa)}); L_{1\infty}^{(\mu_\kappa)} > 0) = \mathbf{E}((V_\infty^{(\mu_\kappa)} + \tilde{U}_\infty)^\kappa; L_{1\infty}^{(\mu_\kappa)} > 0, \tilde{M}_\infty = 0) =: C_3. \quad (6.10)$$

Отсюда следует заключение теоремы 3.

7. Доказательство теорем 4, 5.

а. Положим $\check{U}_k := \sum_{j=0}^k e^{S_n - S_j}$. В математическом ожидании (ср. (1.1))

$$\mathbf{E}\{(1 + V_n)^{-1}(1 + \check{U}_{n-1}^{-1})^{-N_t}\} \equiv \mathbf{P}(\ln Z_n > tn), \quad V_n = \sum_{j=1}^n e^{-S_j},$$

заменяем $\check{U}_{n-1}^{-1}$ на $\check{U}_n^{-1}$ и покажем, что происходящее при этом увеличение пренебрежимо мало при $n \rightarrow \infty$ по сравнению с асимптотикой (3.2). В случае $\check{U}_n \leq e^{3nt/4}$ выражения $(1 + \check{U}_{n-1}^{-1})^{-N_t}$ и $(1 + \check{U}_n^{-1})^{-N_t}$ убывают как двойная экспонента по n , а потому, ввиду теоремы 1, достаточно провести сравнение математических ожиданий, суженных на область $\check{U}_n > e^{3nt/4}$. Представим значения сл.в. $\check{U}_n$ в форме e^{x_n} , $x > 3t/4$, учтем, что $\check{U}_n = 1 + \check{U}_{n-1}$, и, переходя к логарифмам, получим:

$$\begin{aligned} -N_t \ln(1 + (-1 + e^{x_n})^{-1}) &= -N_t(e^{-x_n}(1 - e^{-x_n})^{-1} + O(e^{-3nt/2})) \\ &= -N_t e^{-x_n} + O(e^{-nt/2}), \\ -N_t \ln(1 + e^{-x_n}) &= -N_t e^{-x_n} + O(e^{-nt/2}). \end{aligned}$$

Отсюда следует, что различие математических ожиданий, суженных на область $\check{U}_n > e^{3nt/4}$, сводится к дополнительному множителю $e^{O(e^{-nt/2})} = 1 + O(e^{-nt/2})$, которым можно пренебречь. Таким образом, для доказательства теорем 4, 5 достаточно исследовать асимптотику математического ожидания

$$\mathbf{E}\{(1 + V_n)^{-1}(1 + \check{U}_n^{-1})^{-N_t}\} \equiv \mathbf{E}\{(1 + V_n)^{-1}(1 + e^{-S_n}(1 + V_n)^{-1})^{-N_t}\}. \quad (7.1)$$

Как и в п. 4, мы представим (7.1) в виде суммы математических ожиданий по разбиению $\{K_n = m\}$, $m = 0, 1, \dots, n$ (ср. (4.2)). Сумма по $|m - n\hat{s}_t| > n^{5/8}$, как следует из п. 4, пренебрежимо мала по сравнению с $e^{-\hat{\psi}(t)n}$. Поэтому далее исследуется сумма по $|m - n\hat{s}_t| \leq n^{5/8}$.

Воспользуемся тем, что в области $\{(x, v): e^{-x}(1+v)^{-1} \leq e^{\delta n}, -\infty < x < \infty, v \geq 0\}$ для $\delta \in (0, t/2)$ соотношение

$$(1 + e^{-x-tn}(1+v)^{-1})^{-N_t} \sim \exp(-e^{-x}(1+v)^{-1}), \quad n \rightarrow \infty, \quad (7.2)$$

выполняется равномерно по x, v , а на дополнении к указанной области обе стороны соотношения (7.2) убывают как двойная экспонента от n (см. (4.13)). С учетом теоремы 1 отсюда следует, что математическое ожидание (7.1) имеет ту же асимптотику, что и математическое ожидание

$$\sum_{|m - n\hat{s}_t| \leq n^{5/8}} \{(1 + V_n)^{-1} \exp(-e^{-(S_n - tn)}(1 + V_n)^{-1}); K_n = m\} =: J_n^{(t)}. \quad (7.3)$$

б. Переходим к исследованию вероятностей больших уклонений $\mathbf{P}(\ln Z_n > \mu^* n)$ и заменим их суммой (7.3) при $t = \mu^*$. При заданном m воспользуемся представлением

$$1 + V_n \stackrel{d}{=} e^{-S_m}(U_m + \tilde{V}_{n-m}), \quad U_n = \sum_{j=0}^n e^{S_j}, \quad \tilde{V}_k := \sum_{j=1}^k e^{-\tilde{S}_j}, \quad \tilde{V}_0 := 0,$$

где $\tilde{S}_j$ — экземпляр случайного блуждания S_j , от него не зависящий; символ $\stackrel{d}{=}$ означает равенство случайных величин по распределению. В результате $J_n^{(\mu^*)}$ представляется в виде

$$\sum_{m \leq n^{5/8}} \mathbf{E} \{e^{S_m}(U_m + \tilde{V}_{n-m})^{-1} \exp(-e^{-\tilde{S}_{n-m} + \mu^* n}(U_m + \tilde{V}_{n-m})^{-1}); K_n = m\}. \quad (7.4)$$

При $u > 1, v > 0, m < n$ рассмотрим интеграл

$$\iint \frac{1}{u+v} \exp\left(-\frac{e^{-x}}{u+v}\right) \mathbf{P}(S_{n-m} - \mu^* n \in dx, V_{n-m} \in dv; L_{n-m} = 0). \quad (7.5)$$

Сделаем в (7.5) замену меры из п. 2е при $\nu = \mu^*$ и запишем результат в виде произведения $\exp(-\psi(\mu^*)(n-m) - \lambda^* \mu^* m)$ на интеграл (см. п. 2е)

$$\begin{aligned} J_{n,m}(u) &:= \iint (u+v)^{-1} \exp(-\lambda^* x - e^{-x}(u+v)^{-1}) \\ &\quad \times \mathbf{P}(S_{n-m}^{(\mu^*)} - \mu^* n \in dx, V_{n-m}^{(\mu^*)} \in dv; L_{n-m}^{(\mu^*)} = 0), \quad (7.6) \\ V_k^{(\nu)} &= \sum_{j=1}^k e^{-S_j^{(\nu)}}, \quad L_k^{(\nu)} = \min_{0 \leq j \leq k} S_j^{(\nu)}. \end{aligned}$$

Заметив, что $\{K_n = m\} = \{K_m = m\} \cap \{\tilde{L}_{n-m} = 0\}$, $\tilde{L}_k := \min_{0 \leq i \leq k} \tilde{S}_i$, запишем математическое ожидание в (7.4) при $1 \leq m \leq n$ в виде

$$e^{-\psi(\mu^*)n} \theta(\lambda^*)^{-m} \iint e^y J_{n,m}(u) \mathbf{P}(S_m \in dy, U_m \in du; S_j < 0, 1 \leq j \leq m). \quad (7.7)$$

с. Мы докажем, что для любого $\Delta > 0$

$$\begin{aligned} & \mathbf{P}(S_n^{(\nu)} - \nu(n+k) \in [x, x+\Delta], V_n^{(\nu)} \leq v, L_n^{(\nu)} = 0) \\ & \sim \Delta(\sigma(\lambda_\nu)\sqrt{2\pi n})^{-1} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{\nu k}{\sigma(\lambda_\nu)\sqrt{n}}\right)^2\right\} \mathbf{P}(V_\infty^{(\nu)} \leq v, L_\infty^{(\nu)} = 0) \end{aligned} \quad (7.8)$$

в каждой точке непрерывности функции распределения $\mathbf{P}(V_\infty^{(\nu)} \leq v, L_\infty^{(\nu)} = 0)$ равномерно по $x = O(n^{1/4})$, $k = O(n^{5/8})$, $n \rightarrow \infty$. Соотношение (7.8) потребуется для перехода к пределу под знаком интеграла (7.6). Положим для краткости

$$\mu_n^{(\nu)}(dx, dv) := \mathbf{P}(S_n^{(\nu)} - \nu n \in dx, V_n^{(\nu)} \in dv; L_n^{(\nu)} = 0).$$

Оценку сверху в (7.8) получим, заменив событие $\{V_n^{(\nu)} \leq v\}$ на $\{V_{l_n}^{(\nu)} \leq v\}$ при $l_n := \lfloor \sqrt[3]{n} \rfloor$, а событие $\{L_n^{(\nu)} = 0\}$ — на $\{L_{l_n}^{(\nu)} = 0\}$ и разбивая блуждание $S_j^{(\nu)}$ на участки $j \leq l_n$ и $j \in [l_n + 1, n]$. Результат представим в виде

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{P}(S_{m_n}^{(\nu)} - \nu(m_n + k) + y \in [x, x+\Delta]) \mu_{l_n}^{(\nu)}(dy; [0, v]) =: I_n, \quad (7.9)$$

где $m_n := n - l_n$. Разобьем область интегрирования в (7.9) на части $|y| \leq \sqrt[3]{n}$ и $|y| > \sqrt[3]{n}$ и обозначим соответствующие интегралы I_{1n} и I_{2n} . Подынтегральную вероятность в (7.9) заменим асимптотически эквивалентным выражением из п. 2г. Учитывая, что $x = O(n^{1/4})$, $k = O(n^{5/8})$, получим при $|y| \leq \sqrt[3]{n}$:

$$\left(\frac{x + \nu k - y}{\sigma(\lambda_\nu)\sqrt{m_n}}\right)^2 = \left(\frac{\nu k}{\sigma(\lambda_\nu)\sqrt{n}}\right)^2 + O(n^{-1/24}),$$

$$\begin{aligned} I_{1n} &= \Delta(\sigma(\lambda_\nu)\sqrt{2\pi n})^{-1} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{\nu k}{\sigma(\lambda_\nu)\sqrt{m_n}}\right)^2\right\} \mu_{l_n}^{(\nu)}([- \sqrt[3]{n}, \sqrt[3]{n}], [0, v]) \\ &+ o(n^{-1/2}), \end{aligned}$$

где член $o(n^{-1/2})$ равномерно мал по k . Устремляя n к ∞ и учитывая, что последовательность событий $\{V_n^{(\nu)} \leq v, L_n^{(\nu)} = 0\}$ убывает, получаем (при всех v):

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma(\lambda_\nu)\sqrt{2\pi n} \exp\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{\nu k}{\sigma(\lambda_\nu)\sqrt{n}}\right)^2\right\} I_{1n} = \Delta \mathbf{P}(V_\infty^{(\nu)} \leq v, L_\infty^{(\nu)} = 0). \quad (7.10)$$

Заметим, что $I_{2n} \leq \mu_{l_n}^{(\nu)}(\overline{[-\sqrt[3]{n}, \sqrt[3]{n}], [1, \infty)}) = \mathbf{P}(|S_{l_n}^{(\nu)} - \nu l_n| > \sqrt[3]{n})$. Так как сл.в. $X^{(\nu)}$ при $\nu \in (0, \mu^+)$ удовлетворяет двустороннему условию Крамера, то (см. п. 2с):

$$\mathbf{P}(S_{l_n}^{(\nu)} - \nu l_n > \sqrt[3]{n}) \leq \mathbf{P}(S_{l_n}^{(\nu)} > (\nu + 1)l_n) \leq \exp(-\psi^{(\nu)}(\nu + 1; 2^{-1}(\nu + \mu^+))l_n).$$

Аналогичная оценка верна для вероятностей $\mathbf{P}(S_{l_n}^{(\nu)} - \nu l_n < -\sqrt[3]{n})$. Тем самым, интеграл I_{2n} убывает экспоненциально по переменной $l_n = [\sqrt[3]{n}]$, а соотношение (7.10) остается справедливым после замены в нем I_{1n} на I_n . Итак, получена правильная верхняя граница в (7.8).

d. Для вывода нижней границы в (7.8) воспользуемся разложением

$$V_n^{(\nu)} = V_{l_n}^{(\nu)} + e^{-(S_{l_n}^{(\nu)} - \nu l_n) - \nu l_n} \sum_{j=l_n+1}^n e^{-(S_j^{(\nu)} - S_{l_n}^{(\nu)})}, \quad l_n = [\sqrt[3]{n}], \quad m_n = n - l_n.$$

Разбивая блуждание $S_j^{(\nu)}$ на участки $j \leq l_n$ и $j \in [l_n + 1, n]$, представим вероятность в левой части (7.8) в виде двойного интеграла по мере $\mu_{l_n}^{(\nu)}(dy, dz)$ от выражения

$$\mathbf{P}(S_{m_n}^{(\nu)} - \nu(m_n + k) + y \in [x, x + \Delta], z + e^{-y - \nu l_n} V_{m_n}^{(\nu)} \leq v, L_{m_n}^{(\nu)} > -y - \nu l_n). \quad (7.11)$$

Выведем для него оценку снизу, ограничив интегрирование областью $\{|y| \leq \nu l_n/2, z \leq v - \delta\}$, где $\delta > 0$ будет выбираться сколь угодно малым. В указанной области имеем: $\{z + e^{-y - \nu l_n} V_{m_n}^{(\nu)} \leq v\} \supseteq \{V_{m_n}^{(\nu)} \leq \delta e^{\nu l_n/2}\}$, $\{L_{m_n}^{(\nu)} > -y - \nu l_n\} \supseteq \{L_{m_n}^{(\nu)} > -\nu l_n/2\}$, так что для вероятности (7.11) получаем следующую границу снизу:

$$\mathbf{P}(S_{m_n}^{(\nu)} - \nu(m_n + k) + y \in [x, x + \Delta]) - \mathbf{P}(V_{m_n}^{(\nu)} > \delta e^{\nu l_n/2}) - \mathbf{P}(L_{m_n}^{(\nu)} \leq -\nu l_n/2). \quad (7.12)$$

Интеграл от первого слагаемого в (7.12) равен

$$\int_{-\nu l_n/2}^{\nu l_n/2} \mathbf{P}(S_{m_n}^{(\nu)} - \nu(m_n + k) + y \in [x, x + \Delta]) \mu_{l_n}^{(\nu)}(dy; (0, v - \delta]) =: I'_{1n}.$$

Он оценивается тем же способом, что и интеграл I_{1n} . В результате приходим к соотношению (7.10), в котором I_{1n} заменяется на I'_{1n} , а событие $\{V_{\infty}^{(\nu)} \leq v\}$ — на событие $\{V_{\infty}^{(\nu)} \leq v - \delta\}$. Таким образом, для получения правильной нижней границы в (7.8) остается убедиться, что двумя другими слагаемыми в (7.12) можно пренебречь. Последнее слагаемое в (7.12) убывает экспоненциально по переменному l_n в силу, например, неравенства из п. 2d. Аналогичное заключение для среднего члена в (7.12) вытекает из нижеследующей оценки.

e. Положим для краткости $\gamma := \nu/2$ и заметим, что

$$\left\{ \min_{0 \leq j \leq n} (S_j^{(\nu)} - \gamma j) > -y \right\} \subseteq \left\{ V_n^{(\nu)} \leq \sum_{j=0}^n e^{-\gamma j + y} \leq (1 - e^{-\gamma})e^y \right\}.$$

Следовательно, событие $\{V_n^{(\nu)} > (1 - e^{-\gamma})e^y\}$ влечет $\{\min_{0 \leq j \leq n} (S_j^{(\nu)} - \gamma j) \leq -y\}$. Вероятность последнего события оценивается сверху по неравенству из п. 2d величиной $e^{p_\gamma^{(\nu)} y}$, где $p_\gamma^{(\nu)} := \inf\{\lambda: \theta^{(\nu)}(\lambda)e^{-\lambda\gamma} \leq 1\} < 0$. Таким образом, средняя вероятность в (7.12) убывает экспоненциально по переменному l_n , и соотношение (7.8) полностью доказано.

Выведем аналогичную оценку для $\mathbf{P}(V_n^{(\nu)} > v, L_n^{(\nu)} = 0)$. Имеем:

$$\left\{ \min_{0 \leq j \leq n} (S_j^{(\nu)} - \gamma j) > -v, L_n^{(\nu)} = 0 \right\} \subseteq \left\{ V_n^{(\nu)} \leq \frac{v}{\gamma} + 1 + \sum_{j > v/\gamma} e^{v-\gamma j} \right\},$$

так что событие $\{V_n^{(\nu)} > v/\gamma + a_\gamma\}$, $a_\gamma := 1 + e^{-\gamma}(1 + e^{-\gamma})^{-1}$, влечет событие $\{\min_{0 \leq j \leq n} (S_j^{(\nu)} - \gamma j) \leq -v\}$. Таким образом, для указанной вероятности получаем верхнюю границу $\exp(p_\gamma^{(\nu)}\gamma(v - a_\gamma))$, экспоненциально убывающую по v .

f. Введем обозначение $J_{n,m}(A \times B; u)$ для интеграла $J_{n,m}(u) \equiv J_{n,m}((-\infty, \infty) \times (0, \infty); u)$, суженного на область $A \times B$ (см. (7.6)), и положим

$$\hat{J}(A \times B; u) := \iint_{A \times B} \frac{1}{u + v} \exp\left(-\lambda^* x - \frac{e^{-x}}{u + v}\right) dx d\mathbf{P}(V_\infty^{(\mu^*)} \leq v, L_\infty^{(\mu^*)} = 0).$$

Приступим к доказательству того, что при $n \rightarrow \infty$

$$J_{n,m}(u) \sim (\sigma(\lambda^*)\sqrt{2\pi n})^{-1} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{\mu^* m}{\sigma(\lambda^*)\sqrt{n}}\right)^2\right\} \hat{J}(u), \quad (7.13)$$

$\hat{J}(u) := \hat{J}((-\infty, \infty) \times (0, \infty); u)$, равномерно по $m = O(n^{5/8})$, $u > 1$. Соотношение (7.13) получается формальной заменой меры в интеграле (7.6) ее асимптотическим выражением, получаемым из (7.8). Поскольку эквивалентность (7.8) справедлива не во всей области изменения переменной x , то мы сузим область интегрирования в обоих интегралах $J_{n,m}$ и $\hat{J}$, а затем докажем, что остатками можно пренебречь.

Заметим, что соотношение (7.13) выполняется, если заменить в нем $J_{n,m}(u)$ на $J_{n,m}([-a, a] \times (0, b]; u)$ и аналогичную замену провести с $\hat{J}(u)$, где $b > 0$ — произвольная точка непрерывности функции распределения $\mathbf{P}(V_\infty^{(\mu^*)} \leq v, L_\infty^{(\mu^*)} = 0)$, $a > 0$ — любое. Действительно, из (7.8) следует, что меры

$$\sqrt{2\pi n} \exp\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{m}{\sigma(\lambda^*)\sqrt{n}}\right)^2\right\} \mathbf{P}(S_{n-m}^{(\mu^*)} - \mu^* n \in dx, V_{n-m}^{(\mu^*)} \in dv; L_{n-m}^{(\mu^*)} = 0)$$

на $[-a, a] \times (0, b]$ слабо сходятся при $n \rightarrow \infty$ к мере $\sigma(\lambda^*)^{-1} dx \times \mathbf{P}(V_\infty^{(\mu^*)} \in dv; L_\infty^{(\mu^*)} = 0)$ равномерно по $m \leq n^{5/8}$, а семейство подынтегральных функций в (7.6) на $[-a, a] \times (0, b]$ равностепенно непрерывно по u .

Далее заметим, что в области $[-a, a] \times (b, \infty)$ подынтегральная функция в (7.6) ограничена сверху величиной $b^{-1}e^{\lambda^* a}$. Вынесем эту оценку за знак интеграла, а то, что останется, равно

$$\mathbf{P}(S_{n-m}^{(\mu^*)} - \mu^* n \in [-a, a], V_{n-m}^{(\mu^*)} > b, L_{n-m}^{(\mu^*)} = 0) \leq \mathbf{P}(S_{n-m}^{(\mu^*)} - \mu^* n \in [-a, a]).$$

Применяя неравенство из п. 2g, получаем оценку:

$$J_{n,m}([-a, a] \times (b, \infty); u) \leq b^{-1}e^{\lambda^* a}(2a + \delta_{n-m})(\sigma(\lambda^*)\sqrt{2\pi(n-m)})^{-1},$$

меньшую $\varepsilon/\sqrt{n}$ для любых $a, \varepsilon > 0$, достаточно большого b , $m \leq n^{5/8}$.

В области $(a, \infty) \times (0, \infty)$ подынтегральную функцию в (7.6) ограничим сверху (при $u > 1$) функцией $e^{-\lambda^* x}$ и отбросим событие $\{L_{n-m}^{(\mu^*)} = 0\}$:

$$J_{n,m}((a, \infty) \times (0, \infty); u) \leq \int_a^\infty e^{-\lambda^* x} \mathbf{P}(S_{n-m}^{(\mu^*)} - \mu^* n \in dx). \quad (7.14)$$

Интеграл в правой части (7.14) оценим, переходя к интегральным суммам, как это делается в п. 4f, и используя неравенство (см. п. 2g)

$$\mathbf{P}(S_{n-m}^{(\mu^*)} - \mu^* n \in [x, x + \Delta]) \leq (\Delta + \delta_{n-m})(\sigma(\lambda^*)\sqrt{2\pi(n-m)})^{-1}.$$

В результате получим для интеграла (7.14) при $m \leq n^{5/8}$ и достаточно большом a границу сверху $\varepsilon/\sqrt{n}$.

Область $(-\infty, -a) \times (0, \infty)$ пересечем с множеством $\{(x, v): v \leq |x|^{-2}e^{-x}\}$ и обозначим полученное подмножество через D . Подынтегральную функцию в $J_{n,m}(D; u)$ оценим сверху величиной $\exp(-\lambda^* x - x^2)$ и получим:

$$J_{n,m}(D; u) \leq \int_{-\infty}^{-a} \exp(-\lambda^* x - x^2) \mathbf{P}(S_{n-m}^{(\mu^*)} - \mu^* n \in dx). \quad (7.15)$$

Интеграл (7.15) оценивается сверху подобно (7.14) величиной $\varepsilon/\sqrt{n}$ для любого $\varepsilon > 0$ и достаточно большого a . Остается оценить $J_{n,m}(\bar{D}; u)$.

g. Выведем оценку сверху для вероятности

$$\mathbf{P}(S_n^{(\nu)} - \nu n \in [x, x + \Delta], V_n^{(\nu)} > v, L_n^{(\nu)} = 0). \quad (7.16)$$

Используя подход и обозначения п. e, имеем:

$$\begin{aligned} \left\{ \min_{0 \leq j \leq n} (S_j^{(\nu)} - \gamma j) > -y, L_n^{(\nu)} = 0 \right\} &\subseteq \left\{ V_n^{(\nu)} \leq \frac{y}{\gamma} + 1 + \sum_{j > y/\gamma} e^{y - \gamma j} \right\}, \\ \mathbf{P}(S_n^{(\nu)} - \nu n \in [x, x + \Delta], V_n^{(\nu)} > y\gamma^{-1} + a_\gamma, L_n^{(\nu)} = 0) &\leq \mathbf{P}\left(S_n^{(\nu)} - \nu n \in [x, x + \Delta], \min_{0 \leq j \leq n} (S_j^{(\nu)} - \gamma j) \leq -y\right), \quad y > 0. \end{aligned} \quad (7.17)$$

Введем случайный момент $\tau_y \leq \infty$ первого пересечения блужданием $S_j^{(\nu)} - \gamma j$ границы $-y$ и представим вероятность (7.17) в виде

$$\sum_{k=1}^n \mathbf{E} \{ \mathbb{I}_{\{\tau_y=k\}} \mathbf{P}(S_n^{(\nu)} - \nu n \in [x, x + \Delta] | S_k^{(\nu)}) \}, \quad (7.18)$$

где $\mathbb{I}_{\{\cdot\}}$ обозначает индикатор события, заключенного в скобки. Ограничим в (7.16), (7.18) значения x неравенством $x > -(\nu - \alpha)n$, $\nu > \alpha > \gamma$. При $k \leq (1 - \varepsilon)n$, $\varepsilon > 0$, условную вероятность в (7.18) оценим сверху с помощью неравенства из п. 2g:

$$\mathbf{P}(S_n^{(\nu)} - S_k^{(\nu)} - \nu n \in [-S_k^{(\nu)} + x, -S_k^{(\nu)} + x + \Delta] | S_k^{(\nu)}) \leq \frac{\Delta + \delta_{n-k}}{\sigma(\lambda_\nu) \sqrt{2\pi(n-k)}}. \quad (7.19)$$

При $\tau_y = k$, $(1 - \varepsilon)n < k \leq n - 1$, имеем: $S_k^{(\nu)} \leq \gamma k - y < \gamma k$, так что при $x > -(\nu - \alpha)n$ условная вероятность в (7.18) не превосходит

$$\mathbf{P}(S_{n-k}^{(\nu)} - \nu n > -\gamma k - (\nu - \alpha)n) \leq \mathbf{P}(S_{n-k}^{(\nu)} > (\alpha - \gamma)n). \quad (7.20)$$

К правой вероятности в (7.20) применим первое из неравенств п. 2с и получим для нее следующую границу сверху:

$$\exp\{-\lambda(\alpha - \gamma)n\} \theta^{(\nu)}(\lambda)^{n-k} \leq \exp\{-(\lambda(\alpha - \gamma) + \varepsilon \ln \theta^{(\nu)}(\lambda))n\} \quad (7.21)$$

для $\lambda \in (0, \lambda^+ - \lambda_\nu)$. Фиксируя λ , возьмем ε достаточно малым и получим, что граница (7.21) убывает экспоненциально быстро по n .

Заметим, что событие $\{\tau_y = n\}$ влечет $\{S_n^{(\nu)} < \gamma n\}$ и несовместно с событием $\{S_n^{(\nu)} - \nu n \in [x, x + \Delta]\}$ при $x \geq -(\nu - \alpha)n$. Таким образом, из оценок (7.19), (7.21) вытекает, что вероятность (7.17) при $x \geq -(\nu - \alpha)n$ не превосходит

$$c_\nu \Delta n^{-1/2} \mathbf{P}(\tau_y \leq n) = c_\nu \Delta n^{-1/2} \mathbf{P}\left(\min_{0 \leq j \leq n} (S_j^{(\nu)} - \gamma j) \leq -y\right) \quad (7.22)$$

при некотором $c_\nu > 0$. Вероятность в (7.22) в силу неравенства из п. 2d (ср. п. e) не превосходит $\exp(p_\gamma^{(\nu)} y)$, $p_\gamma^{(\nu)} < 0$. В итоге вероятность (7.16) оценивается сверху при $x \geq -(\nu - \alpha)n$ величиной $b_\nu \Delta n^{-1/2} \exp(-d_\gamma^{(\nu)} y)$, $d_\gamma^{(\nu)} > 0$.

h. Подынтегральную функцию в $J_{n,m}(\bar{D}; u)$ оценим сверху функцией $e^{-\lambda^* x}$, а область интегрирования по x , с учетом того, что $S_{n-m}^{(\mu^*)} \geq 0$ при условии события $\{L_{n-m}^{(\mu^*)} = 0\}$, разобьем на две части: $[-\mu^* n, -(\mu^* - \alpha)n]$, $0 < \alpha < \mu^*$, и $-(\mu^* - \alpha)n, -a$. Интеграл по первой части не превосходит

$$\alpha n e^{\lambda^* \mu^* n} \mathbf{P}(V_{n-m}^{(\mu^*)} > ((\mu^* - \alpha)n)^{-2} e^{(\mu^* - \alpha)n}, L_{n-m}^{(\mu^*)} = 0). \quad (7.23)$$

В п. e показано, что вероятность в (7.23) убывает как двойная экспонента по n , так что этим интегралом можно пренебречь. Интеграл по второй

части заменим верхней суммой Дарбу–Стилтьеса по разбиению $x_k = -a - k\Delta$, $v_l = a^{-2}e^a + l\Delta$, $k, l = 0, 1, 2, \dots$. В результате получим для него следующую оценку сверху при $a \geq 2$:

$$\sum_k e^{-\lambda^* x_k} \mathbf{P}\left(S_{n-m}^{(\mu^*)} - \mu^* n \in (x_k, x_{k-1}], V_{n-m}^{(\mu^*)} > \frac{1}{x_k^2} e^{-x_k}, L_{n-m}^{(\mu^*)} = 0\right), \quad (7.24)$$

суммирование в (7.24) ведется по k таким, что $x_k \geq -(\mu^* - \alpha)n - \Delta$. Так как при этом $\mu^* m + x_k \geq -(\mu^* - \alpha)(n - m) - \Delta$, то к вероятностям в (7.24) применима оценка п. **г**, подставляя которую, получим:

$$b_{\mu^*} e^{\lambda^* \Delta} \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_k e^{-\lambda^* x_{k-1}} \exp\left(-d_{\gamma}^{(\mu^*)} \frac{1}{x_k^2} e^{-x_k}\right) \Delta. \quad (7.25)$$

Сумма в (7.25) является нижней суммой Дарбу (при $a \geq 2$) для интеграла Римана от функции $\exp(-\lambda^* x - d_{\gamma}^{(\mu^*)} |x|^{-2} e^{-x})$, который, очевидно, конечен и за счет выбора достаточно большого $a > 0$ может быть сделан меньше любого $\varepsilon > 0$. Таким образом, для интеграла $J_{n,m}(\bar{D}; u)$ получена оценка сверху $\varepsilon/\sqrt{n}$.

Для доказательства соотношения (7.13) осталось убедиться, что $\hat{J}(u) < \infty$. Проводя замену $y = e^{-x}(u + v)^{-1}$, получаем:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-\lambda^* x - e^{-x}(u + v)^{-1}) dx = (u + v)^{\lambda^*} \Gamma(\lambda^*),$$

где $\Gamma(\lambda) := \int_0^{\infty} y^{\lambda-1} e^{-y} dy$,

$$\hat{J}(u) = \Gamma(\lambda^*) \int_0^{\infty} (u + v)^{\lambda^*-1} d\mathbf{P}(V_{\infty}^{(\mu^*)} \leq v, L_{\infty}^{(\mu^*)} = 0) < \infty, \quad (7.26)$$

поскольку хвосты $\mathbf{P}(V_{\infty}^{(\mu^*)} > v, L_{\infty}^{(\mu^*)} = 0)$ убывают экспоненциально по v (см. п. **е**). Отметим, что функция $\hat{J}(u)$ непрерывна и ограничена, в чем легко убедиться, интегрируя (7.26) по частям.

и. Заменим $J_{n,m}(u)$ под интегралом (7.7) при $m \leq n^{5/8}$ на равномерно по m эквивалентное выражение (7.13) и запишем результат в виде

$$e^{-\psi(\mu^*)n} \theta(\lambda^*)^{-m} (\sigma(\lambda^*) \sqrt{2\pi n})^{-1} \exp\{-(\mu^* m)^2 (2\sigma(\lambda^*)^2 n)^{-1}\} \\ \times \int \int e^y \hat{J}(u) \mathbf{P}(S_m \in dy, U_m \in du; S_j < 0, 1 \leq j \leq m). \quad (7.27)$$

Перепишем интеграл в (7.27) как m -кратный и сделаем в нем замену меры $\prod_{i=1}^m dF^{(\mu_1)}(x_i) = \theta(1)^{-m} e^{-s_m} \prod_{i=1}^m dF(x_i)$:

$$\theta(1)^m \int \cdots \int_{\{s_j < 0, 1 \leq j \leq m\}} \hat{J}\left(\sum_{j=0}^m e^{s_j}\right) \prod_{i=1}^m dF^{(\mu_1)}(x_i) = \theta(1)^m \int_0^{\infty} \hat{J}(u) \mathbf{P}(U_m^{(\mu_1)} \in du; \\ S_j^{(\mu_1)} < 0, 1 \leq j \leq m), \quad U_m^{(\nu)} := \sum_{j=0}^m e^{S_j^{(\nu)}}. \quad (7.28)$$

Интеграл в (7.28) сходится к $\mathbf{E}(\hat{J}(U_\infty^{(\mu_1)}); S_j^{(\mu_1)} < 0, j \geq 1) =: H$ при $m \rightarrow \infty$. В самом деле, так как $\mathbf{E} X^{(\mu_1)} = \mu_1 < 0$, то $U_m^{(\mu_1)} \rightarrow U_\infty^{(\mu_1)}$ п.н., $\max_{1 \leq j \leq m} S_j^{(\mu_1)} \rightarrow \max_{j \geq 1} S_j^{(\mu_1)}$ п.н., $m \rightarrow \infty$, причем обе последовательности неубывающие. Следовательно, функции распределения $\mathbf{P}(U_m^{(\mu_1)} \leq u, \max_{1 \leq j \leq m} S_j^{(\mu_1)} \leq z)$ сходятся к предельной при *всех* u, z . Остается напомнить, что функция $\hat{J}(u)$ непрерывна и ограничена.

Выберем $b_n \rightarrow \infty$, $b_n = o(\sqrt{n})$, $n \rightarrow \infty$. Члены суммы (7.4) эквивалентны

$$H e^{-\psi(\mu^*)n} (\sigma(\lambda^*) \sqrt{2\pi n})^{-1} \exp\{-(\mu^* m)^2 (2\sigma(\lambda^*)^2 n)^{-1}\} \quad (7.29)$$

при $m \geq b_n$, а при $m < b_n$ выражения (7.29), домноженные на подходящую константу, дают верхнюю границу для соответствующих членов (7.4). Суммируя (7.29) по $m < b_n$, получаем $O(b_n/\sqrt{n})e^{-\psi(\mu^*)n} = o(1)e^{-\psi(\mu^*)n}$. Сумма выражений (7.29) по $m \in [b_n, n^{5/8}]$ эквивалентна $(2\mu^*)^{-1} H e^{-\psi(\mu^*)n}$. Доказательство теоремы 4 завершено. Заметим, что ввиду формулы (7.26)

$$H = \Gamma(\lambda^*) \mathbf{E} \{(\tilde{U}_\infty^{(\mu_1)} + V_\infty^{(\mu^*)})^{\lambda^*-1}; \tilde{S}_j^{(\mu_1)} < 0, j \geq 1, L_\infty^{(\mu^*)} = 0\}, \quad (7.30)$$

где случайные блуждания $S_j^{(\mu_1)}$ и $S_j^{(\mu^*)}$ считаются независимыми.

ж. Доказательство теоремы 5 почти дословно следует доказательству теоремы 4. Оценки пп. **а, с, d, е** вообще не связаны со значением $t = \mu^*$ и годятся для $t \in (0, \mu^*]$, причем они равномерны по $t \in [\varepsilon, \mu^*]$, $\varepsilon > 0$. Построения пп. **b, f, h** сохраняются с заменой μ^* на $t \in (0, \mu^*)$ и заменой области суммирования в (7.4) на $|m - n\hat{s}_t| \leq n^{5/8}$. Для $t \in [\varepsilon, \mu^*(1 - n^{-3/8})]$ это приводит к удвоению постоянного множителя в асимптотике (3.3) по сравнению с (3.2). Для $t_n \in [\mu^*(1 - n^{-3/8}), \mu^*]$ соответствующая асимптотика дается правой частью соотношения (3.3) при $t = t_n$ с дополнительным множителем $\Phi(\sqrt{n}\hat{s}_{t_n}/b_{\mu^*})$ (см. (4.33)).

8. Заключительные замечания. Техника настоящей работы позволяет уточнить асимптотическую картину поведения ВПСС при условии больших уклонений $\ln Z_n > tn$ в форме условных функциональных предельных теорем (см. [8] и цитированную там литературу). Различие в асимптотиках вероятностей больших уклонений при $t \leq \mu^*$ и $t > \mu^*$ проявляется при рассмотрении типичных траекторий, приводящих в каждом из этих случаев к большому уклонению. При $t > \mu^*$ большое уклонение обеспечивается за счет реализации среды, которая приводит к большому уклонению $S_n = tn + O_p(1)$. При условии $\ln Z_n > tn$, $t < \mu^*$, среда на участке $[0, T_n]$, где случайный момент T_n асимптотически нормален со средним $\hat{s}_t n$ и дисперсией $\sigma(\lambda_t)^2 n$, благоприятствует невырождению ВПСС, а на участке $[T_n, n]$ она способствует большому уклонению по тому же типу, что и в случае $t > \mu^*$.

Распространение результатов на случай произвольной дробно-линейной производящей функции $g(z)$ не представляет принципиальных затруднений. Теорема 1 о грубой асимптотике вероятностей больших отклонений переносится на случай производящей функции $g(z)$ общего вида. Точная асимптотика требует более детального анализа.

Пользуюсь возможностью выразить благодарность В. А. Ватутину за ценные обсуждения. Я также благодарен Г. Керстингу и Й. Гейгеру за внимание к работе и приглашение в свое время на рабочее совещание во Франкфурте, которое побудило меня заняться исследованием вероятностей больших отклонений для ВПСС.

Я чрезвычайно благодарен анонимному рецензенту за внимательное прочтение рукописи, выявление многих неточностей, как формального, так и содержательного характера, и советы по внесению в текст статьи соответствующих изменений. Большим отклонениям случайных блужданий и близких к ним марковских цепей уделялось в последнее десятилетие большое внимание в статьях и монографиях (в том числе и в соавторстве) А. А. Боровковым, К. А. Боровковым, А. А. Могульским, Д. А. Коршуновым, в которых были получены глубокие результаты. Рассматриваемый нами ВПСС попадает в класс асимптотически однородных марковских цепей в терминологии А. А. Боровкова. Однако, как это нередко бывает, специфика конкретной модели позволяет прийти к более точным выводам.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Agresti A. On the extinction times of varying and random environment branching processes. — J. Appl. Probab., 1975, v. 12, № 1, p. 39–46.
2. Петров В. В. О вероятностях больших отклонений сумм независимых случайных величин. — Теория вероятн. и ее примен., 1965, т. 10, в. 2, с. 310–322.
3. Козлов М. В. О больших отклонениях ветвящихся процессов в случайной среде: геометрическое распределение числа потомков. — Дискретн. матем., 2006, т. 18, № 2, с. 29–47.
4. Kesten H. Random difference equations and renewal theory for products of random matrices. — Acta Math., 1973, v. 131, p. 207–248.
5. Боровков А. А. Вероятностные процессы в теории массового обслуживания. М: Наука, 1972, 368 с.
6. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения, т. 2. М: Мир, 1984.
7. Ибрагимов И. А., Линник Ю. В. Независимые и стационарно связанные величины. М: Наука, 1965, 524 с.
8. Afanasyev V. I., Geiger J., Kersting G., Vatutin V. A. Criticality for branching processes in random environment. — Ann. Probab., 2005, v. 33, № 2, с. 645–673.

Поступила в редакцию
5.VI.2008

Исправленный вариант
4.XII.2008