Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Л. А. Коновалов, Когерентные меры риска и предельный переход, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2009, том 54, выпуск 3, 466–491

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp2805>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.196.121.252

26 апреля 2023 г., 16:58:43

© 2009 г.

КОНОВАЛОВ Л. А.*

КОГЕРЕНТНЫЕ МЕРЫ РИСКА И ПРЕДЕЛЬНЫЙ ПЕРЕХОД

Настоящая работа посвящена предельным соотношениям для когерентных мер риска. Сначала рассматриваются теоремы о предельном переходе под знаком когерентной меры риска, а затем аналогии закона больших чисел и центральной предельной теоремы. Далее речь идет о двух задачах современной финансовой математики и предельном переходе в них.

Ключевые слова и фразы: когерентные меры риска, предельный переход, хвостовой $V@R$, взвешенный $V@R$, оптимизация, закон больших чисел, центральная предельная теорема, теорема Кусуки.

1. Введение. Пусть X — случайная величина, имеющая смысл приращения капитала некоторого портфеля ценных бумаг за единичный промежуток времени. Одной из главных задач финансовой математики является измерение риска, связанного с X .

Классическими мерами риска являются стандартное отклонение $\sqrt{DX}$ (этот метод восходит к работе Г. Марковица [21]) и Value at Risk ($V@R$), определяемый формулой $V@R_\lambda(X) = -q_\lambda^+(X)$, где $q_\lambda^+(X)$ — правая λ -квантиль распределения X , а $\lambda \in (0, 1)$ — некоторое число (на практике обычно полагают $\lambda = 0.01, 0.25$ или 0.05). Таким образом, $V@R_\lambda(X)$ — это наименьший неслучайный капитал m такой, что величина $X + m$ положительна с вероятностью $1 - \lambda$.

В 1997 г. в финансовом журнале «Risk» была опубликована статья «Thinking Coherently» [4], в которой ее авторы Ф. Артцнер, Ф. Делбаен, Ж.-М. Эбер и Д. Хис указали на серьезные недостатки обеих описанных выше мер риска, а также предложили новый способ измерения риска, который от этих недостатков избавлен. Эта статья и ее математическая версия [5] заложили основы новой ветви финансовой математики — теории когерентных мер риска. С тех пор популярность данной темы исследований растет столь стремительно, что уже сегодня некоторые авторы (см., например, [26]) говорят о «третьей революции в финансовой математике». Вместе с новым взглядом на риск теория когерентных

* Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, механико-математический факультет, кафедра теории вероятностей, Ленинские горы, 119992 Москва, Россия; e-mail: leonid.knv@gmail.com

мер риска открыла также и новые подходы к решению традиционных задач финансовой математики. Так, например, известно, что классический подход к нахождению справедливой цены платежного поручения через условие безарбитражности в большинстве неполных моделей дает в качестве ответа интервал, который является слишком широким. Использование же когерентных мер риска позволяет сузить интервал справедливых цен (см. [6], [9], [10], [12], [14], [16], [19], [20], [23], [25], [27]).

Настоящая статья посвящена предельным соотношениям, в которых участвуют когерентные меры риска. Она состоит из двух частей. В первой части будут получены условия, при которых для когерентной меры риска ρ и случайных величин $(X_n)_{n \in \mathbf{N}}$, X имеет место сходимость

$$\rho(X_n) \longrightarrow \rho(X), \quad n \rightarrow \infty.$$

Сначала это будет сделано для произвольных когерентных мер риска, а потом для важного частного случая — *взвешенного* $V@R$ (этот вопрос также рассматривается в работах [13, примеры 5.17–5.20] и [17, теорема 2.4]). Затем в качестве следствия будет получен аналог закона больших чисел — утверждение о том, что при некоторых предположениях справедливо следующее предельное соотношение:

$$\rho\left(\frac{S_n}{n}\right) \longrightarrow -\mathbf{E} X_1, \quad n \rightarrow \infty,$$

где $S_n = X_1 + \dots + X_n$. Далее будет рассмотрено уточнение этого результата — аналог центральной предельной теоремы, т.е. будут даны условия, достаточные для сходимости

$$\rho\left(\frac{S_n - \mathbf{E} S_n}{\sqrt{\mathbf{D} S_n}}\right) \longrightarrow \rho(\xi), \quad n \rightarrow \infty,$$

где ξ — стандартная нормальная величина. Во второй части статьи рассматриваются две задачи современной финансовой математики, в которых участвуют когерентные меры риска, формулируются и доказываются утверждения о предельном переходе в этих задачах. Изложение здесь напрямую не связано с результатами первой части и в значительной мере опирается на работы [9] и [10].

2. Предельный переход под знаком когерентной меры риска.

2.1. Необходимые понятия и результаты. Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ — некоторое вероятностное пространство.

О п р е д е л е н и е 2.1. Отображение $\rho: L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}) \rightarrow \mathbf{R}$ называется *когерентной мерой риска*, если оно удовлетворяет следующим пяти аксиомам:

- (a) $X, Y \in L^\infty \implies \rho(X + Y) \leq \rho(X) + \rho(Y)$,
 (b) $X, Y \in L^\infty, X \leq Y \implies \rho(X) \geq \rho(Y)$,
 (c) $X \in L^\infty, \lambda \in \mathbf{R}_+ \implies \rho(\lambda X) = \lambda \rho(X)$,
 (d) $X \in L^\infty, m \in \mathbf{R} \implies \rho(X + m) = \rho(X) - m$,
 (e) $X \in L^\infty, \forall n \in \mathbf{N} (X_n \in L^\infty, |X_n| \leq 1), X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathbf{P}} X \implies \rho(X) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \rho(X_n)$.

Соответствующей когерентной функцией полезности на L^∞ называется отображение $u = -\rho$.

Далее мы будем рассматривать в основном когерентные функции полезности, а не меры риска, что избавит нас от многочисленных знаков минус. В работе [13] была доказана следующая теорема о представлении когерентных функций полезности.

Теорема 2.1 (о представлении). *Отображение $u: L^\infty \rightarrow \mathbf{R}$ является когерентной функцией полезности тогда и только тогда, когда имеет место представление*

$$u(X) = \inf_{\mathbf{Q} \in \mathcal{D}} \mathbf{E}_{\mathbf{Q}} X, \quad X \in L^\infty,$$

где $\mathcal{D}$ — некоторое множество вероятностных мер, абсолютно непрерывных относительно меры $\mathbf{P}$.

Поскольку многие важные в финансовой математике распределения (например, гауссовское и логнормальное) имеют неограниченный носитель, то возникает необходимость в продолжении когерентных функций полезности на пространство всех случайных величин $L^0(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$. Дадим определение когерентной функции полезности на L^0 , следуя работе [10].

О п р е д е л е н и е 2.2. *Когерентной функцией полезности на L^0 называется отображение $u: L^0 \rightarrow [-\infty, +\infty]$, определенное формулой*

$$u(X) = \inf_{\mathbf{Q} \in \mathcal{D}} \mathbf{E}_{\mathbf{Q}} X, \quad X \in L^0, \quad (2.1)$$

где $\mathcal{D}$ — некоторое множество вероятностных мер, абсолютно непрерывных относительно меры $\mathbf{P}$. При этом $\mathbf{E}_{\mathbf{Q}} X$ полагается равным $-\infty$, если $\mathbf{E}_{\mathbf{Q}} X^+ = +\infty$ и $\mathbf{E}_{\mathbf{Q}} X^- = +\infty$.

О п р е д е л е н и е 2.3. *Определяющим множеством когерентной функции полезности u называется множество $\mathcal{D} = \{\mathbf{Q} \ll \mathbf{P}: \mathbf{E}_{\mathbf{Q}} X \geq u(X) \forall X \in L^0\}$.*

З а м е ч а н и я. (i) В теории когерентных мер риска не принято делать различия между вероятностными мерами и их плотностями. Поэтому под определяющим множеством мы будем понимать как множество вероятностных мер, так и множество их плотностей по мере $\mathbf{P}$, в зависимости от того, что будет удобнее. Так, например, мы будем

говорить, что множество $\mathcal{D}$ равномерно интегрируемо, имея в виду множество плотностей. При этом меры обычно будем обозначать буквой $\mathbf{Q}$, а их плотности — буквой Z .

(ii) Очевидно, что определяющее множество есть наибольшее среди всех множеств $\mathcal{D}$, задающих данную когерентную функцию полезности u по формуле (2.1). В общем случае оно выпукло, но не обязательно L^1 -замкнуто. Однако если множество $\mathcal{D}$ выпукло, L^1 -замкнуто и задает u по формуле (2.1), то оно является определяющим множеством для u (см. [10, п. 2]).

(iii) Если u — когерентная функция полезности на L^0 , то для $\rho = -u$ аксиомы (а)–(е) из определения когерентной меры риска на L^∞ выполнены для всех $X, Y \in L^0$ таких, что $u(X) \in (-\infty, +\infty)$ и $u(Y) \in (-\infty, +\infty)$.

Следующее определение подходит как для пространства L^∞ , так и для пространства L^0 .

О п р е д е л е н и е 2.4. *Хвостовой $V@R$* — это когерентная мера риска ρ_λ , соответствующая когерентной функции полезности

$$u_\lambda(X) = \inf_{\mathbf{Q} \in \mathcal{D}_\lambda} \mathbf{E}_{\mathbf{Q}} X,$$

где $\lambda \in (0, 1]$ и

$$\mathcal{D}_\lambda = \left\{ \mathbf{Q} \ll \mathbf{P}: \frac{d\mathbf{Q}}{d\mathbf{P}} \leq \lambda^{-1} \right\}.$$

Рис. 1. График $\rho_\lambda(\xi)$, где ξ — стандартная нормальная величина. Значение 2.66 соответствует $\rho_{0.01}(\xi)$

В англоязычной литературе для обозначения этой меры риска употребляются термины *Tail $V@R$* , *Average $V@R$* , *Expected Shortfall*, *Conditional $V@R$* , *Worst Conditional Expectation*. В [15, замечание 4.48] показано, что

$$\begin{aligned} u_\lambda(X) &= \mathbf{E}_{\mathbf{P}} X Z_\lambda^*(X) \\ &= \lambda^{-1} \int_{(-\infty, q_\lambda^+(X))} x \mathbf{Q}(dx) + c q_\lambda^+(X) \mathbf{Q}(q_\lambda^+(X)), \quad X \in L^0, \quad (2.2) \end{aligned}$$

где $Z_\lambda^*(X) = \lambda^{-1} \mathbf{1}\{X < q_\lambda^+(X)\} + c \mathbf{1}\{X = q_\lambda^+(X)\}$, $q_\lambda^+(X) = \inf\{x: \mathbf{P}(X \leq x) > \lambda\}$, $c = (\mathbf{Q}(q_\lambda^+(X)))^{-1}(1 - \lambda^{-1} \mathbf{Q}(-\infty, q_\lambda^+(X)))$ (используется соглашение $0/0 = 0$), а $\mathbf{Q} = \text{Law } X$. Если случайная величина X имеет непрерывное распределение, то $\rho_\lambda(X) = -\mathbf{E}(X | X \leq -V@R_\lambda(X))$, что объясняет термин *Expected Shortfall*.

О п р е д е л е н и е 2.5. *Взвешенный $V@R$* — это когерентная мера риска ρ_μ , соответствующая когерентной функции полезности

$$u_\mu(X) = \int_{(0,1]} u_\lambda(X) \mu(d\lambda), \quad (2.3)$$

где μ — некоторая вероятностная мера на полуинтервале $(0, 1]$. При этом $\int_{(0,1]} f(\lambda) \mu(d\lambda)$ полагается равным $-\infty$, если $\int_{(0,1]} f^+(\lambda) \mu(d\lambda) = +\infty$ и $\int_{(0,1]} f^-(\lambda) \mu(d\lambda) = +\infty$.

Термину *взвешенный $V@R$* в англоязычной литературе соответствует термин *Weighted $V@R$* . Как и в предыдущем случае, данное определение подходит для обоих пространств L^∞ и L^0 . Легко проверить, что формула (2.3) задает когерентную функцию полезности на L^∞ . Аналогичный факт для L^0 неочевиден и его доказательство можно найти в работе [11, теорема 3.2]. Рассмотрим еще один способ, которым можно задавать взвешенный $V@R$.

Пусть μ — вероятностная мера полуинтервале $(0, 1]$ и

$$\Psi_\mu(x) = \int_0^x \int_{(y,1]} \lambda^{-1} \mu(d\lambda) dy, \quad x \in [0, 1].$$

Функция Ψ_μ является возрастающей, вогнутой, $\Psi_\mu(0+) = \Psi_\mu(0) = 0$, $\Psi_\mu(1) = 1$. Отображение $\mu \mapsto \Psi_\mu$ есть взаимно однозначное соответствие между вероятностными мерами на $(0, 1]$ и функциями с этими свойствами (см. [24, лемма 1.50]). Отметим также, что $\Psi'_\mu(0) = \int_{(0,1]} \lambda^{-1} \mu(d\lambda)$. В [11, теорема 3.3] показано, что

$$u_\mu(X) = \int_{\mathbf{R}} x d\Psi_\mu(F(x)) = \mathbf{E}_{\mathbf{P}} Y, \quad X \in L^0,$$

где F — функция распределения случайной величины X , а Y — случайная величина с функцией распределения $\Psi_\mu \circ F$. Таким образом, всякая возрастающая вогнутая функция $\Psi: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ со свойствами $\Psi(0+) = \Psi(0) = 0$, $\Psi(1) = 1$ определяет взвешенный $V@R$.

П р и м е р 2.1. Пусть $N \in \mathbf{N}$. Тогда функция $\Psi(x) = 1 - (1 - x)^N$ задает когерентную функцию полезности

$$u_\mu(X) = \mathbf{E} \min(X_1, \dots, X_N), \quad X \in L^0,$$

где $X_1, \dots, X_N$ — независимые случайные величины, совпадающие по распределению с X (эта функция полезности впервые была предложена в работе [8]).

Определяющее множество когерентной функции полезности u_μ будем обозначать через $\mathcal{D}_\mu$. В работе [7] можно найти представление

$$\mathcal{D}_\mu = \{\mathbf{Q} \ll \mathbf{P}: \mathbf{Q}(A) \leq \Psi_\mu(\mathbf{P}(A)) \text{ для всех } A \in \mathcal{F}\},$$

из которого следует, что $\mathcal{D}_\mu$ является L^1 -замкнутым¹⁾ и равномерно интегрируемым²⁾. Кроме того, это представление показывает, что условие $\Psi'_\mu(0) < +\infty$ является необходимым и достаточным для равномерной ограниченности $\mathcal{D}_\mu$. Другие представления для $\mathcal{D}_\mu$ есть в [11, теоремы 4.4, 4.6].

Среди всех когерентных функций полезности важный класс образуют когерентные функции полезности, инвариантные по распределению.

О п р е д е л е н и е 2.6. Когерентная функция полезности u (и соответствующая ей когерентная мера риска) называется *инвариантной по распределению*, если из совпадения распределений случайных величин X и Y следует, что $u(X) = u(Y)$.

П р и м е р 2.2. Соотношение (2.2) показывает, что когерентная функция полезности u_λ инвариантна по распределению. Из определения когерентной функции полезности u_μ вытекает, что она также инвариантна по распределению.

П р и м е р 2.3. Рассмотрим вероятностное пространство $(\{0, 1\}, 2^{\{0,1\}}, \mathbf{P})$, где $\mathbf{P}(\{0\}) = \mathbf{P}(\{1\}) = \frac{1}{2}$. Пусть $X = \mathbf{1}\{0\}$, $Y = \mathbf{1}\{1\}$, $\mathbf{Q}(\{0\}) = 0$, $\mathbf{Q}(\{1\}) = 1$, $u = \mathbf{E}_\mathbf{Q}$. Тогда $u(X) = 0$, а $u(Y) = 1$, т.е. u не инвариантна по распределению.

Для инвариантных по распределению когерентных функций полезности на L^∞ имеет место еще одна теорема о представлении. Напомним, что *атомом* вероятностного пространства $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ называется событие A такое, что $\mathbf{P}(A) > 0$ и для всякого события $B \subset A$ выполнено $\mathbf{P}(B) = 0$ или $\mathbf{P}(B) = \mathbf{P}(A)$.

Теорема 2.2 (теорема Кусуоки). Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ не имеет атомов. Тогда для того, чтобы отображение $u: L^\infty \rightarrow \mathbf{R}$ являлось инвариантной по распределению когерентной функцией полезности, необходимо и достаточно, чтобы имело место представление

$$u(X) = \inf_{\mu \in \mathcal{M}} u_\mu(X), \quad X \in L^\infty,$$

где $\mathcal{M}$ — некоторое множество вероятностных мер на полуинтервале $(0, 1]$.

¹⁾ Легко видеть, что если последовательность $(Z_n)_{n \in \mathbf{N}}$ элементов $\mathcal{D}_\mu$ сходится к величине Z в пространстве L^1 , то $Z \in \mathcal{D}_\mu$.

²⁾ Действительно, $\sup_{Z \in \mathcal{D}_\mu} \mathbf{E} Z \mathbf{1}_A \rightarrow 0$, когда $\mathbf{P}(A) \rightarrow 0$, и поэтому равномерная интегрируемость $\mathcal{D}_\mu$ следует из леммы 2 в [3, гл. 2, § 6].

Достаточность здесь очевидна, а доказательство необходимости содержится в [18, теорема 4]. Благодаря теореме Кусуоки и ее L^0 -версии (см. теорему 2.6), взвешенный $V@R$ занимает особое место среди инвариантных по распределению когерентных мер риска.

2.2. Пространства L_w^1 , L_m^1 и L_s^1 . Основная цель первой части данной работы — получить обобщения классических теорем о предельном переходе под знаком математического ожидания на случай произвольной когерентной функции полезности. Для этого нам будет удобно использовать три аналога пространства L^1 .

Пусть $\mathcal{D}$ — некоторое множество вероятностных мер, абсолютно непрерывных относительно меры $\mathbf{P}$. Пространства

$$L_w^1(\mathcal{D}) = \left\{ X \in L^0 : \sup_{\mathbf{Q} \in \mathcal{D}} |\mathbf{E}_{\mathbf{Q}} X| < +\infty \right\},$$

$$L_m^1(\mathcal{D}) = \left\{ X \in L^0 : \sup_{\mathbf{Q} \in \mathcal{D}} \mathbf{E}_{\mathbf{Q}} |X| < +\infty \right\}$$

и

$$L_s^1(\mathcal{D}) = \left\{ X \in L^0 : \sup_{\mathbf{Q} \in \mathcal{D}} \mathbf{E}_{\mathbf{Q}} |X| \mathbf{1}\{|X| > c\} \rightarrow 0 \text{ при } c \rightarrow +\infty \right\}$$

будем называть соответственно *слабым*, *средним* и *сильным* L^1 -пространствами. Легко видеть, что $L_s^1(\mathcal{D}) \subseteq L_m^1(\mathcal{D}) \subseteq L_w^1(\mathcal{D})$ и если $\mathcal{D} = \{\mathbf{P}\}$, то $L_s^1(\mathcal{D}) = L_m^1(\mathcal{D}) = L_w^1(\mathcal{D}) = L^1$. Заметим также, что если $\mathcal{D}$ — определяющее множество когерентной функции полезности u , то $X \in L_w^1(\mathcal{D})$ тогда и только тогда, когда $u(X) > -\infty$ и $u(-X) > -\infty$. Следующий пример показывает, что в некоторых случаях все эти три пространства различны.

Пример 2.4. Рассмотрим вероятностное пространство $(\mathbf{N}, 2^{\mathbf{N}}, \mathbf{P})$, где $\mathbf{P}(\{n\}) = 1/2^n, n \in \mathbf{N}$, а также множество $\mathcal{D} = \{Z_m, m \geq 2\}$, где плотности Z_m задаются формулой

$$Z_m(n) = \begin{cases} n^{-1}2^n, & \text{если } n = m \text{ или } n = m + 1, \\ c_m, & \text{если } n = 1, \\ 0, & \text{иначе,} \end{cases}$$

и числа c_m подобраны так, чтобы выполнялись равенства $\mathbf{E} Z_m = 1$.

Пусть $X(n) = n/2, n \in \mathbf{N}$. Тогда $\mathbf{E}|X| \mathbf{1}\{|X| \geq m/2\} Z_m = 1$ и, следовательно, $\sup_{Z \in \mathcal{D}} \mathbf{E}|X| \mathbf{1}\{|X| \geq c\} \rightarrow 0$ при $c \rightarrow \infty$, в то время как $\sup_{Z \in \mathcal{D}} \mathbf{E}|X| Z < +\infty$.

Пусть $Y(n) = (-1)^n n \ln n, n \in \mathbf{N}$. Тогда $\sup_{Z \in \mathcal{D}} |\mathbf{E} Y Z| = \sup_{m \geq 2} \ln((m+1)/m) = \ln \frac{3}{2}$, а $\sup_{Z \in \mathcal{D}} \mathbf{E}|Y| Z = \sup_{m \geq 2} \ln m(m+1) = +\infty$.

Таким образом, $X \notin L_s^1(\mathcal{D})$, $X \in L_m^1(\mathcal{D})$, $X \in L_w^1(\mathcal{D})$ и $Y \notin L_s^1(\mathcal{D})$, $Y \notin L_m^1(\mathcal{D})$, $Y \in L_w^1(\mathcal{D})$.

Тем не менее, для определяющих множеств базовых когерентных функций полезности L^1 -пространства совпадают.

Предложение 2.1. (i) $L_s^1(\mathcal{D}_\lambda) = L_m^1(\mathcal{D}_\lambda) = L_w^1(\mathcal{D}_\lambda) = L^1$.
(ii) $L_s^1(\mathcal{D}_\mu) = L_m^1(\mathcal{D}_\mu) = L_w^1(\mathcal{D}_\mu) \subseteq L^1$

Доказательство предложения содержится в работе [10, предложение 2.6].

Формула

$$\|X\|_{L_m^1(\mathcal{D})} = \sup_{\mathbf{Q} \in \mathcal{D}} \mathbf{E}_{\mathbf{Q}}|X|$$

задает на $L_m^1(\mathcal{D})$ полунорму, которая является нормой, если $\mathbf{P} \in \mathcal{D}$ (в частности, если $\mathcal{D}$ — определяющее множество инвариантной по распределению когерентной функции полезности), и равна норме пространства L^1 при $\mathcal{D} = \{\mathbf{P}\}$. В случае совпадения L^1 -пространств будем обозначать их $L^1(\mathcal{D})$, а соответствующую норму $\|X\|_{L^1(\mathcal{D})}$. Если $\mathcal{D}$ — определяющее множество когерентной функции полезности u и $X, Y \in L_m^1(\mathcal{D})$, то, как нетрудно проверить, справедливы следующие соотношения:

$$\begin{aligned} \|X\|_{L_m^1(\mathcal{D})} &= -u(-|X|), \quad |u(X)| \leq \|X\|_{L_m^1(\mathcal{D})}, \\ |u(X) - u(Y)| &\leq \|X - Y\|_{L_m^1(\mathcal{D})}. \end{aligned}$$

Отметим, что пространства L_w^1 и L_s^1 были введены в статье [10], а пространство L_m^1 вводится в настоящей работе.

2.3. Теоремы о предельном переходе. Пусть u — когерентная функция полезности, а $X, X_1, X_2, \dots$ — случайные величины. Верно ли, что

$$X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathbf{P}} X \implies u(X_n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} u(X)? \quad (2.4)$$

Поскольку математическое ожидание есть когерентная функция полезности, то, как известно, без дополнительных предположений о последовательности $(X_n)_{n \in \mathbf{N}}$ импликация (2.4) не верна. С другой стороны, для некоторых когерентных функций полезности даже равномерная ограниченность $(X_n)_{n \in \mathbf{N}}$ не гарантирует справедливости (2.4).

Пример 2.5. Рассмотрим вероятностное пространство $([0, 1], \mathcal{F}, \mathbf{P})$, где $\mathcal{F}$ — борелевская σ -алгебра подмножеств отрезка $[0, 1]$, а $\mathbf{P}$ — мера Лебега, и когерентную функцию полезности u , определяющее множество которой есть множество всех вероятностных мер, абсолютно непрерывных относительно меры $\mathbf{P}$. Нетрудно показать, что $u(X) = \text{ess inf } X$, $X \in L^0$. Пусть $X_n = -\mathbf{1}_{[0, 1/n]}$, $n \in \mathbf{N}$. Тогда $X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathbf{P}} 0$ при $n \rightarrow \infty$, но $u(X_n) \not\rightarrow u(0)$ при $n \rightarrow \infty$.

Отсюда вытекает следующая структура теоремы о предельном переходе под знаком когерентной функции полезности (меры риска):

$$\text{условия на } u, \text{ условия на } (X_n)_{n \in \mathbf{N}}, X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathbf{P}} X \implies u(X_n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} u(X).$$

Будем действовать согласно этой схеме, используя в качестве условий на u равномерную интегрируемость или равномерную интегрируемость

и L^1 -замкнутость определяющего множества $\mathcal{U}$, а в качестве условий на последовательность $(X_n)_{n \in \mathbf{N}}$ — условия, аналогичные условиям в теоремах о предельном переходе под знаком математического ожидания.

Теорема 2.3 (о мажорируемой сходимости). Пусть определяющее множество $\mathcal{D}$ когерентной функции полезности и равномерно интегрируемо, $Y \in L_s^1(\mathcal{D})$, $|X_n| \leq Y$ для всех $n \in \mathbf{N}$ и $X_n \xrightarrow{P} X$ при $n \rightarrow \infty$. Тогда:

- (i) $X \in L_s^1(\mathcal{D})$;
- (ii) $u(X_n) \rightarrow u(X)$ при $n \rightarrow \infty$;
- (iii) $X_n \xrightarrow{L_m^1(\mathcal{D})} X$ при $n \rightarrow \infty$.

Доказательство. (i) Поскольку $|X_n| \leq Y$ для всех $n \in \mathbf{N}$ и, следовательно,

$$\|X_n \mathbf{1}\{|X_n| > c\}\|_{L_m^1(\mathcal{D})} \leq \|Y \mathbf{1}\{Y > c\}\|_{L_m^1(\mathcal{D})}, \quad c > 0, \quad n \in \mathbf{N},$$

то $\sup_{n \in \mathbf{N}} \|X_n \mathbf{1}\{|X_n| > c\}\|_{L_m^1(\mathcal{D})} \rightarrow 0$ при $c \rightarrow +\infty$.

(ii) Достаточно показать, что $\mathbf{E} X_n Z$ сходится к $\mathbf{E} X Z$ равномерно по $Z \in \mathcal{D}$ при $n \rightarrow \infty$. Пусть $M, C > 0$, $n \in \mathbf{N}$ и $Z \in \mathcal{D}$. Тогда поскольку

$$\begin{aligned} \mathbf{E} X_n Z - \mathbf{E} X Z &= \mathbf{E} (X_n - X) \mathbf{1}\{Y > M\} Z \\ &\quad + \mathbf{E} (X_n - X) \mathbf{1}\{Y \leq M\} Z \mathbf{1}\{Z \leq C\} \\ &\quad + \mathbf{E} (X_n - X) \mathbf{1}\{Y \leq M\} Z \mathbf{1}\{Z > C\}, \end{aligned}$$

то

$$\begin{aligned} |\mathbf{E} X_n Z - \mathbf{E} X Z| &\leq 2 \mathbf{E} Y \mathbf{1}\{Y > M\} Z + C \mathbf{E} |X_n - X| \mathbf{1}\{|Y| \leq M\} \\ &\quad + 2M \mathbf{E} Z \mathbf{1}\{Z > C\}. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Далее, для любого $\varepsilon > 0$ найдутся числа $M_0, C_0 > 0$ такие, что $\mathbf{E} Y \mathbf{1}\{Y > M_0\} Z \leq \varepsilon$ и $M_0 \mathbf{E} Z \mathbf{1}\{Z > C_0\} \leq \varepsilon$ для всех $Z \in \mathcal{D}$. По теореме Лебега о мажорируемой сходимости существует $n_0 \in \mathbf{N}$ такое, что $C_0 \mathbf{E} |X_n - X| \mathbf{1}\{Y \leq M_0\} \leq \varepsilon$ при $n \geq n_0$. Остается воспользоваться неравенством (2.5), согласно которому $|\mathbf{E} X_n Z - \mathbf{E} X Z| \leq 5\varepsilon$ для всех $Z \in \mathcal{D}$, $n \geq n_0$.

(iii) Так как $|X_n - X| \leq 2Y$ и $\|X_n - X\|_{L_m^1(\mathcal{D})} = -u(-|X_n - X|)$ для всех $n \in \mathbf{N}$, то, по доказанному, $\|X_n - X\|_{L_m^1(\mathcal{D})} \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.

Теорема 2.4 (о монотонной сходимости). Пусть u — когерентная функция полезности с определяющим множеством $\mathcal{D}$, а $Y, X_1, X_2, \dots$ — случайные величины. Тогда:

- (i) если $\mathbf{E} Y Z < +\infty$ для всех $Z \in \mathcal{D}$, $X_n \leq Y$ для всех $n \in \mathbf{N}$ и $X_n \downarrow X$ при $n \rightarrow \infty$, то $u(X_n) \downarrow u(X)$ при $n \rightarrow \infty$;
- (ii) если $\mathcal{D}$ равномерно интегрируемо и L^1 -замкнуто, $Y^- \in L_s^1(\mathcal{D})$, $X_n \geq Y$ для всех $n \in \mathbf{N}$ и $X_n \uparrow X$ при $n \rightarrow \infty$, то $u(X_n) \uparrow u(X)$ при $n \rightarrow \infty$.

Доказательство. (i) Пусть $u(X) > -\infty$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдется плотность $Z \in \mathcal{D}$ такая, что $\mathbf{E} XZ \leq u(X) + \varepsilon$. По теореме о монотонной сходимости для математического ожидания, $u(X_n) \leq \mathbf{E} X_n Z \leq u(X) + 2\varepsilon$ для достаточно больших $n \in \mathbf{N}$.

Пусть $u(X) = -\infty$. Тогда для любого $M < 0$ существует плотность $Z \in \mathcal{D}$ такая, что $\mathbf{E} XZ < M$ и, следовательно, $u(X_n) < M/2$ при достаточно больших $n \in \mathbf{N}$.

Итак, в обоих случаях $u(X_n) \downarrow u(X)$ при $n \rightarrow \infty$.

(ii) Если $u(X_{n_0}) = +\infty$ для некоторого $n_0 \in \mathbf{N}$, то, очевидно, $u(X_n) \uparrow u(X)$ при $n \rightarrow \infty$, поэтому будем считать, что $u(X_n) < +\infty$ для всех $n \in \mathbf{N}$.

Предположим сначала, что последовательность $(X_n)_{n \in \mathbf{N}}$ равномерно ограничена снизу. Пусть $\varepsilon > 0$. Тогда для любого $n \in \mathbf{N}$ существует плотность $Z_n^* \in \mathcal{D}$ такая, что

$$u(X_n) \geq \mathbf{E} X_n Z_n^* - \varepsilon. \quad (2.6)$$

Пользуясь теоремой Хана–Банаха об отделении выпуклых множеств, можно показать, что $\mathcal{D}$ замкнуто в слабой топологии пространства L^1 и, значит, по теореме Данфорда–Петтиса, $\mathcal{D}$ слабо секвенциально компактно. Следовательно, из последовательности $(Z_n^*)_{n \in \mathbf{N}}$ можно выбрать подпоследовательность $(Z_{n_k}^*)_{k \in \mathbf{N}}$, сходящуюся в слабой топологии к некоторой плотности $Z^* \in \mathcal{D}$ при $k \rightarrow \infty$.

Пусть $\mathbf{E} XZ^* < +\infty$. Тогда, по теореме о монотонной сходимости для математического ожидания, существует $d > 0$ такое, что

$$\mathbf{E} (X \wedge d) Z^* \geq \mathbf{E} XZ^* - \varepsilon. \quad (2.7)$$

Далее, в силу равномерной интегрируемости множества $\mathcal{D}$,

$$\mathbf{E} (X_{n_k} \wedge d) Z_{n_k}^* - \mathbf{E} (X \wedge d) Z_{n_k}^* \rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty,$$

а поскольку $X \wedge d \in L^\infty$, то

$$\mathbf{E} (X \wedge d) Z_{n_k}^* - \mathbf{E} (X \wedge d) Z^* \rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty.$$

Отсюда следует, что существует сколь угодно большое $n \in \mathbf{N}$, для которого

$$\mathbf{E} (X_n \wedge d) Z_n^* \geq \mathbf{E} (X \wedge d) Z^* - \varepsilon. \quad (2.8)$$

Сравнивая последовательно (2.6), (2.8) и (2.7), заключаем, что $u(X_n) \geq u(X) - 3\varepsilon$ для достаточно больших $n \in \mathbf{N}$.

Итак, если $\mathbf{E} XZ^* < +\infty$ для всех $\varepsilon > 0$, то $u(X_n) \uparrow u(X)$ при $n \rightarrow \infty$. Пусть $\mathbf{E} XZ^* = +\infty$ для некоторого $\varepsilon_0 > 0$. Тогда для всякого $M > 0$ существует $d > 0$ такое, что $\mathbf{E} (X \wedge d) Z^* \geq M$ и, значит, $u(X_n) \geq M - 2\varepsilon_0$

для достаточно больших $n \in \mathbf{N}$. Таким образом, снова $u(X_n) \uparrow u(X)$ при $n \rightarrow \infty$.

Предположим теперь, что последовательность $(X_n)_{n \in \mathbf{N}}$ не является равномерно ограниченной снизу. Случай, когда $u(X) < +\infty$, сводится к рассмотренному при помощи неравенств

$$\begin{aligned} |u(X_n) - u(X_n \mathbf{1}\{X_n \geq -c\})| &\leq \|X_n \mathbf{1}\{X_n < -c\}\|_{L^1_m(\mathcal{D})} \\ &\leq \|Y^- \mathbf{1}\{Y^- > c\}\|_{L^1_m(\mathcal{D})}, \end{aligned} \quad (2.9)$$

$$\begin{aligned} |u(X) - u(X \mathbf{1}\{X \geq -c\})| &\leq \|X \mathbf{1}\{X < -c\}\|_{L^1_m(\mathcal{D})} \\ &\leq \|Y^- \mathbf{1}\{Y^- > c\}\|_{L^1_m(\mathcal{D})}, \end{aligned} \quad (2.10)$$

где $c \geq 0$. Действительно, для произвольного $\varepsilon > 0$ найдется $c_0 > 0$ такое, что $\|Y^- \mathbf{1}\{Y^- > c_0\}\|_{L^1_m(\mathcal{D})} \leq \varepsilon$ и $\mathbf{P}(X = -c_0) = 0$. Из доказанного и неравенств (2.9), (2.10) вытекает, что $|u(X_n) - u(X)| \leq 3\varepsilon$ при достаточно больших $n \in \mathbf{N}$.

Пусть $u(X) = +\infty$. Тогда $u(X \mathbf{1}\{X \geq 0\}) = +\infty$ и, по доказанному, $u(X_n \mathbf{1}\{X_n \geq 0\}) \uparrow +\infty$ при $n \rightarrow \infty$. Остается воспользоваться неравенством (2.9) при $c = 0$.

Следствие 2.1 (лемма Фату). Пусть u — когерентная функция полезности с определяющим множеством $\mathcal{D}$, а $Y, X_1, X_2, \dots$ — случайные величины. Тогда:

(i) если $\mathbf{E}YZ < +\infty$ для всех $Z \in \mathcal{D}$ и $X_n \leq Y$ для всех $n \in \mathbf{N}$, то $\limsup_{n \rightarrow \infty} u(X_n) \leq u(\limsup_{n \rightarrow \infty} X_n)$;

(ii) если $\mathcal{D}$ равномерно интегрируемо и L^1 -замкнуто, $Y^- \in L^1_s(\mathcal{D})$ и $X_n \geq Y$ для всех $n \in \mathbf{N}$, то $u(\liminf_{n \rightarrow \infty} X_n) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} u(X_n)$.

Следующий пример показывает, что предположение L^1 -замкнутости определяющего множества u в теореме 2.4 является существенным, и поэтому теорему 2.3 нельзя доказать, пользуясь следствием 2.1.

Пример 2.6. Рассмотрим вероятностное пространство $([0, 1], \mathcal{F}, \mathbf{P})$, где $\mathcal{F}$ — борелевская σ -алгебра подмножеств отрезка $[0, 1]$, а $\mathbf{P}$ — мера Лебега. Зададим когерентную функцию полезности u формулой (2.1) с помощью множества $\mathcal{D} = \{2 \cdot \mathbf{1}_{[0, c) \cup (c+1/2, 1]}, c \in (0, \frac{1}{2}]\}$. Поскольку $\mathcal{D}$ равномерно интегрируемо, то определяющее множество u также равномерно интегрируемо согласно лемме 2 [3, гл. 2, § 6], равномерная интегрируемость любого множества, определяющего u по формуле (2.1), равносильна сходимости $u(-\mathbf{1}_A) \rightarrow 0$, когда $\mathbf{P}(A) \rightarrow 0$.

Пусть $X(\omega) = 1/\omega$, $\omega \in (0, 1]$, а $X_n = X \mathbf{1}_{[1/n+1, 1]}$, $n \in \mathbf{N}$. Тогда $u(X) = +\infty$, а $u(X_n) \leq 2\mathbf{E}X \mathbf{1}_{[1/2, 1]}$ для всех $n \in \mathbf{N}$. Таким образом, $X_n \uparrow X$ при $n \rightarrow \infty$, но $u(X_n) \nrightarrow u(X)$ при $n \rightarrow \infty$.

Условие « $|X_n| \leq Y$, $Y \in L^1_s(\mathcal{D})$ » в теореме 2.3 можно заменить более слабым условием $\mathcal{D}$ -равномерной интегрируемости последовательности $(X_n)_{n \in \mathbf{N}}$.

О п р е д е л е н и е 2.7. Последовательность случайных величин $(X_n)_{n \in \mathbf{N}}$ назовем $\mathcal{D}$ -равномерно интегрируемой, если

$$\sup_{n \in \mathbf{N}, \mathbf{Q} \in \mathcal{D}} \mathbf{E}_{\mathbf{Q}} |X_n| \mathbf{1}\{|X_n| > c\} \longrightarrow 0 \quad \text{при } c \rightarrow +\infty$$

или, что то же самое, $\sup_{n \in \mathbf{N}} \|X_n \mathbf{1}\{|X_n| > c\}\|_{L^1_{\mathbf{m}}(\mathcal{D})} \longrightarrow 0$ при $c \rightarrow +\infty$.

Следующая лемма дает удобный критерий $\mathcal{D}$ -равномерной интегрируемости. Она является аналогом известного критерия равномерной интегрируемости [3, гл. 2, § 6, лемма 2].

Лемма 2.1. *Последовательность случайных величин $(X_n)_{n \in \mathbf{N}}$ является $\mathcal{D}$ -равномерно интегрируемой, тогда и только тогда, когда она равномерно ограничена в $L^1_{\mathbf{m}}(\mathcal{D})$ и семейство полуноrm $\{\|X_n \mathbf{1}_A\|_{L^1_{\mathbf{m}}(\mathcal{D})}\}_{n \in \mathbf{N}, A \in \mathcal{F}}$ равномерно абсолютно непрерывно (т.е. $\sup_{n \in \mathbf{N}} \|X_n\|_{L^1_{\mathbf{m}}(\mathcal{D})} < +\infty$ и $\sup_{n \in \mathbf{N}} \|X_n \mathbf{1}_A\|_{L^1_{\mathbf{m}}(\mathcal{D})} \longrightarrow 0$, когда $\sup_{\mathbf{Q} \in \mathcal{D}} \mathbf{Q}(A) \rightarrow 0$).*

Доказательство леммы повторяет доказательство леммы 2 в [3, гл. 2, § 6] и не требует привлечения новых идей.

Теорема 2.5. *Пусть определяющее множество $\mathcal{D}$ когерентной функции полезности и равномерно интегрируемо, последовательность $(X_n)_{n \in \mathbf{N}}$ $\mathcal{D}$ -равномерно интегрируема и $X_n \xrightarrow{\mathbf{P}} X$ при $n \rightarrow \infty$. Тогда*

- (i) $X \in L^1_{\mathbf{s}}(\mathcal{D})$;
- (ii) $u(X_n) \longrightarrow u(X)$ при $n \rightarrow \infty$;
- (iii) $X_n \xrightarrow{L^1_{\mathbf{m}}(\mathcal{D})} X$ при $n \rightarrow \infty$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. (i) В силу того, что $\mathcal{D}$ -равномерная интегрируемость последовательности влечет равномерную интегрируемость в обычном смысле по каждой мере $\mathbf{Q} \in \mathcal{D}$, для любого $c > 0$ имеет место сходимость

$$\mathbf{E}_{\mathbf{Q}} |X_n| \mathbf{1}\{|X| > c\} \longrightarrow \mathbf{E}_{\mathbf{Q}} |X| \mathbf{1}\{|X| > c\}, \quad n \rightarrow \infty.$$

Отсюда

$$\|X \mathbf{1}\{|X| > c\}\|_{L^1_{\mathbf{m}}(\mathcal{D})} \leq \sup_{n \in \mathbf{N}} \|X_n \mathbf{1}\{|X| > c\}\|_{L^1_{\mathbf{m}}(\mathcal{D})}, \quad c > 0.$$

Осталось заметить, что из равномерной интегрируемости $\mathcal{D}$ следует, что $\sup_{\mathbf{Q} \in \mathcal{D}} \mathbf{Q}(A) \longrightarrow 0$ при $\mathbf{P}(A) \rightarrow 0$, а $\mathbf{P}(|X| > c) \longrightarrow 0$ при $c \rightarrow +\infty$, и воспользоваться леммой 2.1.

(ii) Достаточно доказать (iii).

(iii) Из леммы 2.1 вытекает, что последовательность $(X_n - X)_{n \in \mathbf{N}}$ также является $\mathcal{D}$ -равномерно интегрируемой. Поэтому для любого $\varepsilon > 0$ найдется $c > 0$ такое, что $\|(X_n - X) \mathbf{1}\{|X_n - X| > c\}\|_{L^1_{\mathbf{m}}(\mathcal{D})} \leq \varepsilon$

для всех $n \in \mathbf{N}$. По теореме 2.3 существует $n_0 \in \mathbf{N}$ такое, что выполнено неравенство $\|(X_n - X)\mathbf{1}\{|X_n - X| \leq c\}\|_{L_m^1(\mathcal{D})} \leq \varepsilon$ для всех $n \geq n_0$. Следовательно, $\|X_n - X\|_{L_m^1(\mathcal{D})} \leq 2\varepsilon$ при $n \geq n_0$.

Отметим, что теорема 2.5 частично обобщает известную теорему Витали–Лебега [1, теорема 4.5.4].

Рассмотрим ряд условий, достаточных для $\mathcal{D}$ -равномерной интегрируемости.

Предложение 2.2. Пусть множество $\mathcal{D}$ равномерно ограничено. Тогда если последовательность $(X_n)_{n \in \mathbf{N}}$ равномерно интегрируема, то она также $\mathcal{D}$ -равномерно интегрируема.

Предложение 2.3 (критерий Валле–Пуссена). Для того, чтобы последовательность случайных величин $(X_n)_{n \in \mathbf{N}}$ являлась $\mathcal{D}$ -равномерно интегрируемой, необходимо и достаточно, чтобы существовала борелевская функция $G: \mathbf{R}_+ \rightarrow \mathbf{R}_+$ такая, что

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{G(t)}{t} = +\infty \quad \text{и} \quad \sup_{n \in \mathbf{N}} \|G(|X_n|)\|_{L_m^1(\mathcal{D})} < +\infty.$$

Доказательство. **Достаточность.** Пусть $\varepsilon > 0$. Тогда для достаточно большого $c > 0$ при всех $t \geq c$ справедливо неравенство $t \leq \varepsilon G(t)$ и для всех $n \in \mathbf{N}$ имеет место оценка

$$\begin{aligned} \| |X_n| \mathbf{1}\{|X_n| > c\} \|_{L_m^1(\mathcal{D})} &\leq \| \varepsilon G(|X_n|) \mathbf{1}\{|X_n| > c\} \|_{L_m^1(\mathcal{D})} \\ &\leq \varepsilon \sup_{n \in \mathbf{N}} \|G(|X_n|)\|_{L_m^1(\mathcal{D})}. \end{aligned}$$

Таким образом, $\sup_{n \in \mathbf{N}} \|X_n \mathbf{1}\{|X_n| > c\}\|_{L_m^1(\mathcal{D})} \rightarrow 0$ при $c \rightarrow +\infty$.

Необходимость. Поскольку последовательность $(X_n)_{n \in \mathbf{N}}$ $\mathcal{D}$ -равномерно интегрируема, то найдется последовательность чисел $(c_k)_{k \in \mathbf{N}}$ такая, что $c_k \uparrow +\infty$ при $k \rightarrow \infty$ и $\sup_{n \in \mathbf{N}} \|X_n \mathbf{1}\{|X_n| > c_k\}\|_{L_m^1(\mathcal{D})} \leq 1/k^3$ для всех $k \in \mathbf{N}$. Определим функцию G формулой

$$G(t) = \sum_{k=1}^{\infty} k t \mathbf{1}_{(c_k, c_{k+1}]}(t), \quad t \in \mathbf{R}_+.$$

Очевидно, что $\lim_{t \rightarrow +\infty} G(t)/t = +\infty$. По теореме 2.4

$$\|G(|X_n|)\|_{L_m^1(\mathcal{D})} \leq \sum_{k=1}^{\infty} \|k X_n \mathbf{1}\{|X_n| \in (c_k, c_{k+1}]\}\|_{L_m^1(\mathcal{D})}, \quad n \in \mathbf{N},$$

и, следовательно,

$$\|G(|X_n|)\|_{L_m^1(\mathcal{D})} \leq \sum_{k=1}^{\infty} k \|X_n \mathbf{1}\{|X_n| > c_k\}\|_{L_m^1(\mathcal{D})} < +\infty, \quad n \in \mathbf{N}.$$

Предложение 2.3 доказано.

Для того, чтобы дать достаточное условие $\mathcal{D}_\mu$ -равномерной интегрируемости, нам потребуются базовые сведения о пространствах Орлича. Пусть $\Phi: \mathbf{R}_+ \rightarrow \mathbf{R}_+$ — непрерывная строго возрастающая выпуклая функция, удовлетворяющая условиям $\Phi(0) = 0$, $\Phi'(0) = 0$, $\lim_{t \rightarrow +\infty} \Phi(t)/t = +\infty$. Пространством Орлича называется следующее подпространство L^1 :

$$L^\Phi = \{X \in L^1: \exists a > 0: \mathbf{E} \Phi(a^{-1}|X|) \leq 1\}.$$

Формула

$$\|X\|_{L^\Phi} = \inf\{a > 0: \mathbf{E} \Phi(a^{-1}|X|) \leq 1\}$$

задает норму на L^Φ , относительно которой оно является банаховым пространством (подробнее о пространствах Орлича см. [22, А-2]). Легко видеть, что если $\Phi(t) = t^p$, $p > 1$, то $L^\Phi = L^p$ и $\|\cdot\|_{L^\Phi} = \|\cdot\|_{L^p}$.

Предложение 2.4. Пусть вероятностная мера μ на полуинтервале $(0, 1]$ удовлетворяет условию

$$\int_{(0,1]} \Phi^{-1}(\lambda^{-1}) \mu(d\lambda) < +\infty, \quad (*)$$

а последовательность случайных величин $(X_n)_{n \in \mathbf{N}}$ равномерно ограничена в L^Φ (т.е. существует $C > 0$ такое, что $\|X_n\|_{L^\Phi} \leq C$ для всех $n \in \mathbf{N}$). Тогда последовательность $(X_n)_{n \in \mathbf{N}}$ $\mathcal{D}_\mu$ -равномерно интегрируема.

Лемма 2.2. Пусть $X \in L^\Phi$, $\lambda \in (0, 1]$. Тогда справедливо неравенство $\|X\|_{L^1(\mathcal{D}_\lambda)} \leq \Phi^{-1}(\lambda^{-1})\|X\|_{L^\Phi}$.

Доказательство. Пусть $a > 0$ — такое число, что $\mathbf{E}_\mathbf{P} \Phi(a^{-1}|X|) \leq 1$ и $Z \in \mathcal{D}_\lambda$. Обозначим через $\mathbf{Q}$ меру $Z\mathbf{P}$. Согласно неравенству Иенсена, для выпуклой борелевской функции Φ и интегрируемой по мере $\mathbf{Q}$ величины $a^{-1}|X|$

$$\Phi(\mathbf{E}_\mathbf{Q}(a^{-1}|X|)) \leq \mathbf{E}_\mathbf{Q} \Phi(a^{-1}|X|),$$

откуда

$$\mathbf{E}_\mathbf{P}|X|Z \leq a\Phi^{-1}(\mathbf{E}_\mathbf{P} \Phi(a^{-1}|X|)Z) \leq a\Phi^{-1}(\lambda^{-1}).$$

Таким образом, $\mathbf{E}_\mathbf{Q}|X| \leq \Phi^{-1}(\lambda^{-1})\|X\|_{L^\Phi}$ для всех $\mathbf{Q} \in \mathcal{D}_\lambda$, что равносильно доказываемому утверждению.

Доказательство предложения 2.4. Заметим сначала, что для всякого $Y \in L^0$ имеет место равенство

$$\|Y\|_{L^1(\mathcal{D}_\mu)} = \int_{(0,1]} \|Y\|_{L^1(\mathcal{D}_\lambda)} \mu(d\lambda) \quad (2.11)$$

и поэтому для любого $c > 0$ справедливо неравенство

$$\sup_{n \in \mathbf{N}} \|X_n \mathbf{1}\{|X_n| > c\}\|_{L^1(\mathcal{D}_\mu)} \leq \int_{(0,1]} \sup_{n \in \mathbf{N}} \|X_n \mathbf{1}\{|X_n| > c\}\|_{L^1(\mathcal{D}_\lambda)} \mu(d\lambda). \quad (2.12)$$

Поскольку последовательность $(X_n)_{n \in \mathbf{N}}$ равномерно интегрируема, то, согласно предложению 2.2, она является $\mathcal{D}_\lambda$ -равномерно интегрируемой для всех $\lambda \in (0, 1]$. Таким образом, подынтегральные функции в правой части (2.12) всюду на $(0, 1]$ сходятся к нулю при $c \rightarrow +\infty$. По лемме 2.2

$$\sup_{n \in \mathbf{N}} \|X_n \mathbf{1}\{|X_n| > c\}\|_{L^1(\mathcal{D}_\lambda)} \leq \Phi^{-1}(\lambda^{-1}) \sup_{n \in \mathbf{N}} \|X_n\|_{L^\Phi}, \quad \lambda \in (0, 1],$$

и для завершения доказательства остается воспользоваться теоремой Лебега о мажорируемой сходимости.

З а м е ч а н и е. Из леммы 2.2 и соотношения (2.11) вытекает, что если выполнено условие (*), то $L^\Phi \subseteq L^1(\mathcal{D}_\mu) \subseteq L^1$.

2.4. Переход к другому вероятностному пространству. Покажем, что для инвариантной по распределению когерентной функции полезности сходимость по вероятности в теореме 2.5 можно заменить сходимостью по распределению, отбросив соотношение (iii).

Теорема 2.6 (L^0 -версия теоремы Кусуоки). Пусть исходное вероятностное пространство не имеет атомов. Тогда для того, чтобы отображение $u: L^0 \rightarrow [-\infty, +\infty]$ являлось инвариантной по распределению когерентной функцией полезности, необходимо и достаточно, чтобы имело место представление

$$u(X) = \inf_{\mu \in \mathcal{M}} u_\mu(X), \quad X \in L^0,$$

где $\mathcal{M}$ — некоторое множество вероятностных мер на полуинтервале $(0, 1]$.

Доказательство теоремы повторяет доказательство теоремы Кусуоки для пространства L^∞ , приводимое в [15, теорема 4.57].

Лемма 2.3. Множество распределений всех случайных величин (соответственно множество распределений всех ограниченных случайных величин) на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ совпадает с множеством всех вероятностных мер (соответственно с множеством всех вероятностных мер с ограниченным носителем) на действительной прямой тогда и только тогда, когда $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ не имеет атомов.

Доказательство леммы также можно найти в [15].

Лемма 2.4. Пусть вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ не имеет атомов, u — инвариантная по распределению когерентная функция полезности на $L^0(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ с определяющим множеством $\mathcal{D}$.

Тогда для другого вероятностного пространства $(\Omega', \mathcal{F}', \mathbf{P}')$ существует когерентная функция полезности u' , заданная на $L^0(\Omega', \mathcal{F}', \mathbf{P}')$ и такая, что $u'(X') = u(X)$ для всех $X' \in L^0(\Omega', \mathcal{F}', \mathbf{P}')$ и $X \in L^0(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ таких, что $X' \stackrel{\text{Law}}{=} X$. При этом если множество $\mathcal{D}$ равномерно интегрируемо, то определяющее множество $\mathcal{D}'$ когерентной функции полезности u' будет также равномерно интегрируемо.

Доказательство. Предположим сначала, что $u = u_\mu$. Определим на $L^0(\Omega', \mathcal{F}', \mathbf{P}')$ когерентную функцию полезности u'_μ стандартным образом, т.е. формулой

$$u'_\mu(X') = \int_{(0,1]} u'_\lambda(X') \mu(d\lambda), \quad X' \in L^0(\Omega', \mathcal{F}', \mathbf{P}'),$$

где $u'_\lambda(X') = \inf_{\mathbf{Q}' \in \mathcal{D}'_\lambda} \mathbf{E}_{\mathbf{Q}'} X'$ и $\mathcal{D}'_\lambda = \{\mathbf{Q}' \ll \mathbf{P}': \frac{d\mathbf{Q}'}{d\mathbf{P}'} \leq \lambda^{-1}\}$. Равенство $u'_\mu(X') = u_\mu(X)$ для всех случайных величин X' и X таких, что $X' \stackrel{\text{Law}}{=} X$, следует из соотношения (2.2).

Пусть теперь u произвольна. Согласно теореме 2.6, имеет место представление

$$u(X) = \inf_{\mu \in \mathcal{M}} u_\mu(X), \quad X \in L^0(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}).$$

Нетрудно проверить, что формула

$$u'(X') = \inf_{\mu \in \mathcal{M}} u'_\mu(X'), \quad X' \in L^0(\Omega', \mathcal{F}', \mathbf{P}'),$$

определяет когерентную функцию полезности с нужным свойством.

Для доказательства того, что из равномерной интегрируемости множества $\mathcal{D}$ вытекает равномерная интегрируемость множества $\mathcal{D}'$, достаточно заметить, что, как уже отмечалось ранее, равномерная интегрируемость определяющего множества когерентной функции полезности равносильна сходимости к нулю в полунорме соответствующего среднего L^1 -пространства величин $\mathbf{1}_A$, когда вероятность события A стремится к нулю, и воспользоваться леммой 2.3.

Теорема 2.7. Пусть исходное вероятностное пространство не имеет атомов, определяющее множество $\mathcal{D}$ инвариантной по распределению когерентной функции полезности u равномерно интегрируемо, последовательность случайных величин $(X_n)_{n \in \mathbf{N}}$ $\mathcal{D}$ -равномерно интегрируема и $X_n \xrightarrow{\text{Law}} X$ при $n \rightarrow \infty$. Тогда:

- (i) $X \in L^1_s(\mathcal{D})$;
- (ii) $u(X_n) \rightarrow u(X)$ при $n \rightarrow \infty$.

Доказательство. Согласно методу одного вероятностного пространства (см. [3, гл. III, § 8]), существуют вероятностное пространство $(\Omega', \mathcal{F}', \mathbf{P}')$ и случайные величины $X', X'_1, X'_2, \dots$ на нем такие, что

$X' \stackrel{\text{Law}}{=} X$, $X'_n \stackrel{\text{Law}}{=} X_n$ для всех $n \in \mathbf{N}$ и $X'_n \xrightarrow{\mathbf{P}'\text{-п.н.}} X'$ при $n \rightarrow \infty$. Остается построить на $L^0(\Omega', \mathcal{F}', \mathbf{P}')$ когерентную функцию полезности u' по лемме 2.4 и применить к ней и последовательности $(X'_n)_{n \in \mathbf{N}}$ теорему 2.5.

2.5. Аналоги закона больших чисел и центральной предельной теоремы. Пусть $X_1, X_2, \dots$ — последовательность независимых одинаково распределенных интегрируемых случайных величин, $u = -\rho$ — когерентная функция полезности с равномерно ограниченным определяющим множеством. Покажем, что в этом случае

$$u\left(\frac{S_n}{n}\right) = \mathbf{E} X_1 + o(1), \quad n \rightarrow \infty, \quad (2.13)$$

а если u инвариантна по распределению и случайные величины $X_1, X_2, \dots$ имеют конечный второй момент, то

$$u\left(\frac{S_n}{n}\right) = \mathbf{E} X_1 + u(\xi) \sqrt{\mathbf{D} X_1} \frac{1}{\sqrt{n}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right), \quad n \rightarrow \infty, \quad (2.14)$$

где ξ — стандартная нормальная величина. Рассмотрим пример, дающий финансовую интерпретацию соотношений (2.13) и (2.14).

Пример 2.6. Предположим, что некоторый банк выдает ссуды клиентам $1, \dots, N$. Пусть разность между суммой, которую вернет i -й клиент, и той, которая была ему выдана, есть X_i . Тогда чтобы снять риск, который несет выдача ссуды i -му клиенту, банку следует взять с него сумму $\rho(X_i)$, поскольку $\rho(X_i + \rho(X_i)) = 0$. Но если рассмотреть совокупный риск выдачи всех ссуд, то окажется, что для его снятия достаточно к величинам $X_1, \dots, X_N$ добавить по сумме $\rho(S_N/N)$. Действительно, $\rho(\sum_{i=1}^N (X_i + \rho(S_N/N))) = 0$. Таким образом, формула (2.13) показывает, что с ростом числа клиентов минимальная плата за риск, которую банк может брать с каждого отдельного клиента уменьшается, а формула (2.14) уточняет, с какой скоростью это происходит.

Следствие 2.2 (аналог закона больших чисел). Пусть множество $\mathcal{D}$ равномерно интегрируемо, а $X_1, X_2, \dots$ — $\mathcal{D}$ -равномерно интегрируемая последовательность независимых одинаково распределенных интегрируемых случайных величин. Тогда $S_n/n \xrightarrow{L_m^1(\mathcal{D})} \mathbf{E} X_1$ при $n \rightarrow \infty$.

Доказательство. Из леммы 2.1 вытекает, что последовательность $(S_n/n)_{n \in \mathbf{N}}$ также $\mathcal{D}$ -равномерно интегрируема. Согласно усиленному закону больших чисел Колмогорова, $S_n/n \rightarrow \mathbf{E} X_1$ $\mathbf{P}$ -п.н. при $n \rightarrow \infty$. По теореме 2.5 $S_n/n \rightarrow \mathbf{E} X_1$ в $L_m^1(\mathcal{D})$ при $n \rightarrow \infty$.

Следствие 2.3 (аналог центральной предельной теоремы). Пусть $X_1, X_2, \dots$ — последовательность случайных величин с конечным вторым моментом, для которой

$$\frac{S_n - \mathbf{E} S_n}{\sqrt{\mathbf{D} S_n}} \xrightarrow{\text{Law}} \xi, \quad n \rightarrow \infty,$$

где ξ — стандартная нормальная величина, а u — когерентная функция полезности, для которой выполнено одно из следующих условий:

(I) u инвариантна по распределению и ее определяющее множество равномерно ограничено;

(II) $u = u_\mu$, причем

$$\int_{(0,1]} \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \mu(d\lambda) < +\infty.$$

Тогда

$$u\left(\frac{S_n - \mathbf{E} S_n}{\sqrt{\mathbf{D} S_n}}\right) \rightarrow u(\xi), \quad n \rightarrow \infty.$$

З а м е ч а н и е. Из сходимости по распределению последовательности $((S_n - \mathbf{E} S_n)/\sqrt{\mathbf{D} S_n})_{n \in \mathbf{N}}$ к стандартному нормальному закону вытекает, что исходное вероятностное пространство не имеет атомов. Поэтому, по лемме 2.3, без ограничения общности можно считать, что случайная величина ξ задана на исходном вероятностном пространстве.

Д о к а з а т е л ь с т в о с л е д с т в и я 2.3. Введем обозначение $T_n = (\mathbf{D} S_n)^{-1/2}(S_n - \mathbf{E} S_n)$, $n \in \mathbf{N}$. Поскольку $\mathbf{E} T_n^2 = 1$ для всех $n \in \mathbf{N}$, то последовательность $(T_n)_{n \in \mathbf{N}}$ $\mathscr{D}$ -равномерно интегрируема (предложения 2.2 и 2.4 для условий (I) и (II) соответственно). Остается применить теорему 2.7.

3. Предельный переход в некоторых задачах современной финансовой математики.

3.1. Одношаговая модель с конечным числом активов. Одношаговой моделью с конечным числом активов будем называть пятерку $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbf{P}, S_0, S_1)$, где $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbf{P})$ — некоторое вероятностное пространство, $S_1 = (S_1^1, \dots, S_1^d)$ — d -мерный случайный вектор на нем, $S_0 = (S_0^1, \dots, S_0^d) \in \mathbf{R}^d$.

Рассмотрим ситуацию, которую можно описать такой моделью. Некоторый агент в момент времени 0 имеет возможность покупать активы 1, ..., d по ценам $S_0^1, \dots, S_0^d$ соответственно. Цены этих активов в момент времени 1 моделируются случайными величинами $S_1^1, \dots, S_1^d$. Составив портфель из $h^1, \dots, h^d \in \mathbf{R}$ активов 1, ..., d , в момент времени 1 инвестор получит сумму $\sum_{i=1}^d h^i S_1^i$. Учитывая, что на покупку активов в момент времени 0 он затратил сумму $\sum_{i=1}^d h^i S_0^i$, прибыль от этой финансовой операции составит $\sum_{i=1}^d h^i (S_1^i - S_0^i)$, или (в векторной записи) $\langle h, X \rangle$, где $h = (h^1, \dots, h^d)$, $X = (X^1, \dots, X^d) = (S_1^1 - S_0^1, \dots, S_1^d - S_0^d)$ — вектор приращений цен активов 1, ..., d , $\langle \cdot, \cdot \rangle$ — стандартное скалярное произведение в $\mathbf{R}^d$.

3.2. Первая оптимизационная задача. Рассмотрим ряд задач для одношаговой модели с конечным числом активов. *Классическая задача оптимизации Марковица* состоит в максимизации ожидаемой прибыли при условии, что риск (у Марковица это стандартное отклонение)

не превосходит некоторого порога $c > 0$, т.е. это задача

$$\begin{cases} \mathbf{E} \langle h, X \rangle \xrightarrow{h \in \mathbf{R}^d} \max, \\ \sigma(\langle h, X \rangle) \leq c. \end{cases}$$

Однако стандартное отклонение как мера риска обладает следующим серьезным недостатком: с точки зрения этой меры отклонения от среднего в положительную сторону так же плохи, как и в отрицательную. Так, при добавлении в портфель бесплатного лотерейного билета, который выплачивает сумму t с вероятностью $1/t$ независимо от уже содержащихся в нем активов, риск портфеля увеличивается на величину, эквивалентную $\sqrt{t}$ при $t \rightarrow +\infty$, что совершенно неестественно. Поэтому вместо стандартного отклонения мы будем использовать произвольную когерентную меру риска ρ и рассматривать задачу

$$\begin{cases} \mathbf{E} \langle h, X \rangle \xrightarrow{h \in \mathbf{R}^d} \max, \\ \rho(\langle h, X \rangle) \leq c, \end{cases}$$

которую будем называть *первой оптимизационной задачей* или *задачей оптимизации типа Марковица*. Нетрудно видеть, что эта задача эквивалентна³⁾ следующей:

$$\text{RAROC}(\langle h, X \rangle) \xrightarrow{h \in \mathbf{R}^d} \max,$$

где

$$\text{RAROC}(Y) = \begin{cases} +\infty, & \text{если } \mathbf{E}_{\mathbf{P}} Y > 0 \text{ и } u(Y) \geq 0, \\ \frac{\mathbf{E}_{\mathbf{P}} Y}{-u(Y)} & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

$u = -\rho$ и используются соглашения $0/0 = 0$, $\pm\infty/+\infty = -\infty$, $-\infty/-\infty = -\infty$, $+\infty/-\infty = +\infty$. Такую задачу, в свою очередь, мы будем называть *задачей максимизации RAROC*. Аббревиатура RAROC есть сокращение от «Risk-Adjusted Return on Capital» (риск-оцененная доходность). Далее будем считать выполненными следующие условия регулярности:

- (I) $X^i \in L_{\mathbf{w}}^1(\mathcal{D})$ для всех $i \in \{1, \dots, d\}$,
- (II) $\rho(\langle h, X \rangle) > 0$ для любого $h \in \mathbf{R}^d \setminus \{0\}$.

Переформулируем, следуя [10], задачу максимизации RAROC на геометрическом языке. *Генератором* для когерентной функции полезности u с определяющим множеством $\mathcal{D}$ и d -мерного случайного вектора X

³⁾ Под эквивалентностью задач здесь понимается совпадение множеств их решений с точностью до растяжения/сжатия векторов.

назовем множество $G = \text{cl}\{\mathbf{E}_{\mathbf{Q}}X, \mathbf{Q} \in \mathcal{D}\}$, где cl означает замыкание. Такое название объясняется цепочкой равенств

$$u(\langle h, X \rangle) = \inf_{\mathbf{Q} \in \mathcal{D}} \mathbf{E}_{\mathbf{Q}} \langle h, X \rangle = \inf_{\mathbf{Q} \in \mathcal{D}} \langle h, \mathbf{E}_{\mathbf{Q}}X \rangle = \min_{x \in G} \langle h, x \rangle, \quad h \in \mathbf{R}^d. \quad (3.1)$$

Заметим, что условие (I) влечет ограниченность G . Таким образом, G есть выпуклый компакт. Согласно сказанному выше и по теореме Хана-Банаха об отделении выпуклых множеств из условия (II) вытекает, что $0 \in \text{int } G$. Отметим также, что последнее выражение в (3.1) есть классический объект выпуклого анализа — опорная функция выпуклого множества G . Итак, рассматриваемая задача состоит в следующем:

$$\frac{\langle h, E \rangle}{-\inf_{x \in G} \langle h, x \rangle} \xrightarrow{h \in \mathbf{R}^d} \max,$$

где $E = \mathbf{E}_{\mathbf{P}}X$.

Если $E = 0$, то ее решение тривиально, поэтому будем считать, что $E \neq 0$. Введем следующие обозначения:

$$\lambda^* = \sup\{\lambda > 0: -\lambda E \in G\}, \quad T = -\lambda^* E, \\ N = \{h \in \mathbf{R}^d \setminus \{0\}: \langle h, x \rangle \geq \langle h, T \rangle \ \forall x \in G\}$$

(т.е. N — это множество внутренних нормалей к G в точке T).

Теорема 3.1. При сделанных предположениях $\max_{h \in \mathbf{R}^d} \text{RAROC}(\langle h, X \rangle) = (\lambda^*)^{-1}$ и $\arg \max_{h \in \mathbf{R}^d} \text{RAROC}(\langle h, X \rangle) = N$.

Доказательство теоремы 3.1 содержится в [9, теорема 2.1]. Величину $\max_{h \in \mathbf{R}^d} \text{RAROC}(\langle h, X \rangle)$ будем обозначать через R^* .

Рис. 2. Решение первой оптимизационной задачи

Задача максимизации RAROC в гауссовском случае имеет явное решение (см. [9, пример 2.3]). В связи с этим возникает вопрос: что будет, если решать эту задачу по тем же формулам для «примерно» гауссовского вектора X ? Дадим формальный ответ на него. Для этого наряду с задачей

$$\text{RAROC}(\langle h, X \rangle) \xrightarrow{h \in \mathbf{R}^d} \max$$

рассмотрим последовательность задач

$$\text{RAROC}(\langle h, X_n \rangle) \xrightarrow{h \in \mathbf{R}^d} \max, \quad n \in \mathbf{N}.$$

Введем дополнительные обозначения:

$$R_n^* = \max_{h \in \mathbf{R}^d} \text{RAROC}(\langle h, X_n \rangle), \quad N_n = \arg \max_{h \in \mathbf{R}^d} \text{RAROC}(\langle h, X_n \rangle)$$

и заметим, что если случайный вектор X_n удовлетворяет условиям (I) и (II), то R_n^* и N_n даются теоремой 3.1.

Теорема 3.2. Пусть $X_n^i \rightarrow X^i$ в $L_m^1(\mathcal{D})$ и в L^1 при $n \rightarrow \infty$ для всех $i \in \{1, \dots, d\}$. Тогда имеют место следующие предельные соотношения:

- (i) $R_n^* \rightarrow R^*$ при $n \rightarrow \infty$;
- (ii) $\text{RAROC}(\langle h^*, X_n \rangle) - R_n^* \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$ для всех $h^* \in N$;
- (iii) $\limsup_{n \rightarrow \infty} N_n \subseteq N$ (т.е. если $h_n^* \in N_n$ и $h_n^* \rightarrow h' \neq 0$ при $n \rightarrow \infty$, то $h' \in N$).

Доказательство теоремы опирается на следующие леммы.

Лемма 3.1. Пусть K — ограниченное подмножество $\mathbf{R}^d$, $\mathcal{D}$ — определяющее множество когерентной функции полезности u . Тогда если $X_n^i \rightarrow X^i$ в $L_m^1(\mathcal{D})$ при $n \rightarrow \infty$ для всех $i \in \{1, \dots, d\}$, то $u(\langle h, X_n \rangle) \xrightarrow{h \in K} u(\langle h, X \rangle)$ при $n \rightarrow \infty$.

Доказательство. Доказываемое утверждение следует из оценки

$$|u(\langle h, X_n \rangle) - u(\langle h, X \rangle)| \leq \|\langle h, X_n - X \rangle\|_{L_m^1(\mathcal{D})} \leq M \sum_{i=1}^d \|X_n^i - X^i\|_{L_m^1(\mathcal{D})},$$

$h \in K, n \in \mathbf{N}$, где $M = \max_{i \in \{1, \dots, d\}} \sup_{h \in K} |h^i|$.

Лемма 3.2. Пусть C — некоторое положительное число. Тогда $u(\langle h, X \rangle) \leq -C$ для всех $h \in S$ (где $S = \{h \in \mathbf{R}^d: \|h\| = 1\}$), в том и только том случае, G содержит шар радиуса C с центром в нуле.

Из лемм 3.1 и 3.2 вытекает, что в предположениях теоремы 3.2 при достаточно больших $n \in \mathbf{N}$ для случайных векторов X_n выполняются условия регулярности (I) и (II).

Доказательство теоремы 3.2. (i) Покажем, что имеет место сходимость

$$\text{RAROC}(\langle h, X_n \rangle) \xrightarrow{h \in \mathbf{R}^d} \text{RAROC}(\langle h, X \rangle), \quad n \rightarrow \infty,$$

из которой очевидным образом следует, что $R_n^* \rightarrow R^*$ при $n \rightarrow \infty$. Так как при умножении случайной величины на положительное число RAROC от нее не меняется, то для этого достаточно показать, что

$$\text{RAROC}(\langle h, X_n \rangle) \xrightarrow{h \in S} \text{RAROC}(\langle h, X \rangle), \quad n \rightarrow \infty.$$

По лемме 3.1 $\mathbf{E} \langle h, X_n \rangle \xrightarrow{h \in S} \mathbf{E} \langle h, X \rangle$ и $u(\langle h, X_n \rangle) \xrightarrow{h \in S} u(\langle h, X \rangle)$ при $n \rightarrow \infty$. Далее, согласно лемме 3.2, отображение $h \rightarrow u(\langle h, X \rangle)$ отделено от нуля на S , и поэтому

$$\frac{\mathbf{E} \langle h, X_n \rangle}{-u(\langle h, X_n \rangle)} \xrightarrow{h \in S} \frac{\mathbf{E} \langle h, X \rangle}{-u(\langle h, X \rangle)}, \quad n \rightarrow \infty,$$

что и требовалось.

(ii) Поскольку при $n \in \mathbf{N}$

$$\text{RAROC}(\langle h^*, X_n \rangle) - R_n^* = [\text{RAROC}(\langle h^*, X_n \rangle) - \text{RAROC}(\langle h^*, X \rangle)] + [R^* - R_n^*]$$

и, по доказанному, слагаемые в квадратных скобках стремятся к нулю при $n \rightarrow \infty$, то $\text{RAROC}(\langle h^*, X_n \rangle) - R_n^* \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.

(iii) Заметим сначала, что при всех $n \in \mathbf{N}$ справедливо неравенство

$$|\text{RAROC}(\langle h', X \rangle) - R^*| \leq |\text{RAROC}(\langle h', X \rangle) - \text{RAROC}(\langle h_n^*, X_n \rangle)| + |R_n^* - R^*|.$$

Далее, из оценок

$$\begin{aligned} \|\langle h_n^*, X_n \rangle - \langle h', X \rangle\|_{L_m^1(\mathcal{D})} &\leq \|\langle h_n^*, X_n - X \rangle\|_{L_m^1(\mathcal{D})} + \|\langle h_n^* - h', X \rangle\|_{L_m^1(\mathcal{D})}, \\ \|\langle h_n^*, X_n - X \rangle\|_{L_m^1(\mathcal{D})} &\leq \max_{i \in \{1, \dots, d\}} \sup_{n \in \mathbf{N}} |(h_n^*)^i| \sum_{i=1}^d \|X_n^i - X^i\|_{L_m^1(\mathcal{D})}, \\ \|\langle h_n^* - h', X \rangle\|_{L_m^1(\mathcal{D})} &\leq \max_{i \in \{1, \dots, d\}} |(h_n^*)^i - (h')^i| \sum_{i=1}^d \|X^i\|_{L_m^1(\mathcal{D})} \end{aligned}$$

($n \in \mathbf{N}$) следует, что $\langle h_n^*, X_n \rangle \rightarrow \langle h', X \rangle$ в $L_m^1(\mathcal{D})$ при $n \rightarrow \infty$. Аналогично $\langle h_n^*, X_n \rangle \rightarrow \langle h', X \rangle$ в L^1 при $n \rightarrow \infty$ и, таким образом, $\text{RAROC}(\langle h_n^*, X_n \rangle) \rightarrow \text{RAROC}(\langle h', X \rangle)$ при $n \rightarrow \infty$.

3.3. Вторая оптимизационная задача. Пусть, как обычно, u — когерентная функция полезности с определяющим множеством $\mathcal{D}$, $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}, S_0, S_1)$ — одношаговая модель с конечным числом активов, $X = (X^1, \dots, X^d)$ — вектор приращений цен, для которого выполняются условия регулярности (I) и (II) п. 3.2. Задачу

$$u(W + \langle h, X \rangle) \xrightarrow{h \in \mathbf{R}^d} \max, \quad (3.2)$$

где $W \in L_w^1(\mathcal{D})$ — некоторая случайная величина, будем называть *второй оптимизационной задачей*. Она имеет две финансовые интерпретации.

Первая интерпретация: оптимизация. Задача (3.2) есть задача минимизации риска, который несет капитал W , путем составления подходящего портфеля активов.

Рис. 3. Решение второй оптимизационной задачи

Рис. 4. К доказательству теоремы 3.4

Вторая интерпретация: нахождение верхней и нижней цен, хеджирование. Пусть F — некоторое платежное поручение, т.е. ценная бумага, которая выплачивает в момент времени 1 случайную сумму денег (например, $F = (S_1 - K)^+$, где K — некоторое положительное число). Определим соответственно *верхнюю* и *нижнюю цены* F следующим образом:

$$\begin{aligned}\bar{V}(F) &= \inf\{x \in \mathbf{R}: \exists h \in \mathbf{R}^d: u(\langle h, X \rangle - F + x) \geq 0\}, \\ \underline{V}(F) &= \sup\{x \in \mathbf{R}: \exists h \in \mathbf{R}^d: u(\langle h, X \rangle + F - x) \geq 0\},\end{aligned}$$

т.е. $\bar{V}(F)$ — это наименьшая цена, которая позволяет продать F , а затем составить хеджирующий портфель активов $1, \dots, d$ такой, что риск от всей этой операции будет отрицателен или равен нулю (хеджировать прибыль $-F + \bar{V}(F)$). Аналогично $\underline{V}(F)$ — это наибольшая цена, при которой можно хеджировать прибыль $F - \underline{V}(F)$. Непосредственно из определения вытекает равенство $\bar{V}(F) = -\underline{V}(-F)$. Нетрудно видеть, что

$$\underline{V}(F) = \max_{h \in \mathbf{R}^d} u(F + \langle h, X \rangle),$$

и $\arg \max_{h \in \mathbf{R}^d} u(F + \langle h, X \rangle)$ есть множество хеджирующих портфелей для $F - \underline{V}(F)$. Таким образом, при $W = F$ (соответственно $W = -F$) задача (3.2) есть задача нахождения нижней (соответственно верхней) цены F и хеджирующего портфеля. Введем следующие обозначения:

$$\begin{aligned}G &= \text{cl}\{\mathbf{E}_{\mathbf{Q}}(X^1, \dots, X^d), \mathbf{Q} \in \mathcal{D}\}, \quad \tilde{G} = \text{cl}\{\mathbf{E}_{\mathbf{Q}}(X^1, \dots, X^d, W), \mathbf{Q} \in \mathcal{D}\}, \\ u^* &= \inf\{x^{d+1}: (0, \dots, 0, x^{d+1}) \in \tilde{G}\}, \quad e = (0, \dots, 0, 1) \in \mathbf{R}^{d+1}, \\ \tilde{N} &= \{\tilde{h} \in \mathbf{R}^{d+1}: \tilde{h}^{d+1} = 1 \text{ и } \langle \tilde{h}, e \rangle \leq \langle \tilde{h}, y \rangle \ \forall y \in \tilde{G}\}, \\ N &= \{h \in \mathbf{R}^d: (h^1, \dots, h^d, 1) \in \tilde{N}\}.\end{aligned}$$

Теорема 3.3. При сделанных выше предположениях $\max_{h \in \mathbf{R}^d} u(W + \langle h, X \rangle) = u^*$ и $\arg \max_{h \in \mathbf{R}^d} u(W + \langle h, X \rangle) = N$.

Доказательство теоремы содержится в работе [9, теорема 2.7]. Явные формулы для гауссовского случая см. в [10, примеры 3.14, 3.23].

Введем дополнительные обозначения:

$$G_n = \text{cl}\{\mathbf{E}_{\mathbf{Q}}(X_n^1, \dots, X_n^d), \mathbf{Q} \in \mathcal{D}\}, \quad \tilde{G}_n = \text{cl}\{\mathbf{E}_{\mathbf{Q}}(X_n^1, \dots, X_n^d, W_n), \mathbf{Q} \in \mathcal{D}\},$$

$$u_n^* = \max_{h \in \mathbf{R}^d} u(W_n + \langle h, X_n \rangle), \quad N_n = \arg \max_{h \in \mathbf{R}^d} u(W_n + \langle h, X_n \rangle).$$

Теорема 3.4. Пусть $X_n^i \xrightarrow{L_m^1(\mathcal{D})} X^i$ при $n \rightarrow \infty$ для всех $i \in \{1, \dots, d\}$ и $W_n \xrightarrow{L_m^1(\mathcal{D})} W$ при $n \rightarrow \infty$. Тогда имеют место следующие предельные соотношения:

- (i) $u_n^* \rightarrow u^*$ при $n \rightarrow \infty$;
- (ii) $u(W_n + \langle h^*, X_n \rangle) - u_n^* \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$ для всех $h^* \in N$;
- (iii) $\limsup_{n \rightarrow \infty} N_n \subseteq N$.

Доказательство. (i) Согласно леммам 3.1 и 3.2, без ограничения общности можно считать, что G и все G_n содержат один и тот же шар радиуса $C > 0$ с центром в нуле. Рассмотрим одно из множеств $\tilde{G}_n$ и произвольный вектор $h_n^* \in N_n$. Пусть k — произвольное число из множества $\{1, \dots, d\}$. В силу сказанного выше, $\tilde{G}_n$ содержит точки $y_1 = (0, \dots, 0, C, 0, \dots, 0, y_1^{d+1})$, $y_2 = (0, \dots, 0, -C, 0, \dots, 0, y_2^{d+1})$ (где C и $-C$ стоят на k -м месте) и $y_3 = (0, \dots, 0, y_3^{d+1})$, где $y_3^{d+1} = u_n^*$, $u(W_n) \leq y_i^{d+1} \leq -u(-W_n)$, $i \in \{1, 2, 3\}$. Сечение гиперплоскости, ортогональной вектору $((h_n^*)^1, \dots, (h_n^*)^d, 1)$ и проходящей через точку y_3 , двумерной плоскостью $\{x \in \mathbf{R}^d: x^1 = 0, \dots, x^{k-1} = 0, x^{k+1} = 0, \dots, x^d = 0\}$ не проходит через точки относительной внутренней этого треугольника, так как любая из этих точек является внутренней точкой множества $\tilde{G}_n$. Это сечение есть прямая, вектор $h_{n,k}^* = (0, \dots, 0, (h_n^*)^k, 0, \dots, 0, 1)$ ($(h_n^*)^k$ стоит на k -м месте) ортогонален ей, причем максимально возможное по модулю значение $(h_n^*)^k$ достигалось бы в том случае, если бы прямая проходила через одну из точек y_2, y_3 (см. рис. 4). Отсюда

$$|(h_n^*)^k| \leq \max \left(\frac{y_1^{d+1} - u_n^*}{C}, \frac{y_2^{d+1} - u_n^*}{C} \right) \leq \sup_{n \in \mathbf{N}} \left(-\frac{u(W_n) + u(-W_n)}{C} \right)$$

(см. рис. 4). Аналогично, рассматривая множество $\tilde{G}$, заключаем, что $(h^*)^k \leq -(u(W) + u(-W))/C$. Таким образом, множество $H = (\bigcup_{n=1}^{\infty} N_n) \cup N$ является ограниченным. Поскольку $u_n^* = \max_{h \in H} u(W_n + \langle h, X_n \rangle)$ для любого $n \in \mathbf{N}$ и $u^* = \max_{h \in H} u(W + \langle h, X \rangle)$, а по лемме 3.1

$$u(W_n + \langle h, X_n \rangle) \xrightarrow{h \in H} u(W + \langle h, X \rangle), \quad n \rightarrow \infty,$$

то $u_n^* \rightarrow u^*$ при $n \rightarrow \infty$.

(ii) По доказанному,

$$u(W_n + \langle h^*, X_n \rangle) - u_n^* = [u(W_n + \langle h^*, X_n \rangle) - u(W + \langle h^*, X \rangle)] - [u^* - u_n^*] \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

(iii) Пусть $h_n^* \in N_n, n \in \mathbf{N}$ и $h_n^* \rightarrow h' \neq 0$ при $n \rightarrow \infty$. Оценка

$$\begin{aligned} |u(W + \langle h', X \rangle) - u^*| &\leq |u(W + \langle h', X \rangle) - u(W_n + \langle h_n^*, X_n \rangle)| + |u_n^* - u^*| \\ &\leq \|W - W_n\|_{L^1(\mathcal{D})} + \|\langle h', X \rangle - \langle h_n^*, X_n \rangle\|_{L_m^1(\mathcal{D})} \\ &\quad + |u_n^* - u^*| \end{aligned}$$

завершает доказательство теоремы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Богачев В. И. Основы теории меры, т. 1. М.-Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2003, 583 с.
2. Робертсон А. П., Робертсон В. Дж. Топологические векторные пространства. М.: Мир, 1967, 257 с.
3. Шуряев А. Н. Вероятность. М.: МЦНМО, 2004, 927 с.
4. Artzner P., Delbaen F., Eber J.-M., Heath D. Thinking coherently. — Risk, 1997, v. 10, № 11, p. 68–71.
5. Artzner P., Delbaen F., Eber J.-M., Heath D. Coherent measures of risk. — Math. Finance, 1999, v. 9, № 3, p. 203–228.
6. Barrieu P., El Karoui N. Pricing, hedging, and optimality designing derivatives via minimization of risk measures. Indifference Pricing: Theory and Applications. Ed. by R. Carmona. Princeton: Princeton Univ. Press, 2008, p. 77–146.
7. Carlier G., Dana R.-A. Core of convex distortions of a probability. — J. Econom. Theory, 2003, v. 113, № 2, p. 199–222.
8. Cherny A. S., Madan D. B. Coherent measurement of factor risks. arXiv: math/0605062.
9. Cherny A. S. Equilibrium with coherent risk. arXiv: math/0605051.
10. Cherny A. S. Pricing with coherent risk. arXiv: math/0605049.
11. Cherny A. S. Weighted V@R and its properties. — Finance Stoch., 2006, v. 10, № 3, p. 367–393.
12. Cvitanic J., Karatzas I. On dynamic measures of risk. — Finance Stoch., 1999, v. 3, № 4, p. 451–482.
13. Delbaen F. Coherent risk measures on general probability spaces. — Advances in Finance and Stochastics. Ed. by K. Sandmann and P. Schönbucher. Berlin: Springer, 2002, p. 1–37.
14. Föllmer H., Leukert P. Efficient hedging: cost versus shortfall risk. — Finance Stoch., 2000, v. 4, № 2, p. 117–146.
15. Föllmer H., Schied A. Stochastic Finance. Berlin: de Gruyter, 2004, 459 p.
16. Jaschke S., Küchler U. Coherent risk measures and good-deal bounds. — Finance Stoch., 2001, v. 5, № 2, p. 181–200.
17. Jouini E., Schachermayer W., Touzi N. Law invariant risk measures have the Fatou property. — Advances in Mathematical Economics, v. 9. Tokyo: Springer, 2006, p. 49–71.
18. Kusuoka S. On law invariant coherent risk measures. — Advances in Mathematical Economics, v. 3. Tokyo: Springer, 2001, p. 83–95.
19. Larsen K., Pirvu T. A., Shreve S. E., Tütüncü R. Satisfying convex risk limits by trading. — Finance Stoch., 2004, v. 9, № 2, p. 177–195.
20. Leitner J. Pricing and hedging with globally and instantaneously vanishing risk. — Statist. Decisions, 2007, v. 25, № 4, p. 311–332.
21. Markowitz H. M. Portfolio Selection. New York/London: Wiley/Chapman & Hall, 1959, 334 p.
22. Neveu J. Discrete-Parameter Martingales. Amsterdam: North-Holland, 1975, 236 p.

-
23. *Roorda B., Schumacher J. M., Engwerda J.* Coherent acceptability measures in multiperiod models. — *Math. Finance*, 2005, v. 15, № 4, p. 589–612.
 24. *Schied A.* Risk measures and robust optimization problems. — *Stoch. Models*, 2006, v. 22, № 4, p. 753–831.
 25. *Sekine J.* Dynamic minimization of worst conditional expectation of shortfall. — *Math. Finance*, 2004, v. 14, № 4, p. 605–618.
 26. *Szegö G.* On the (non)acceptance of innovations. — *Risk Measures for the 21st Century*. Ed. by G. Szegö. New York: Wiley, 2004, p. 1–9.
 27. *Xu M.* Risk measure pricing and hedging in incomplete markets. — *Ann. Finance*, 2006, v. 2, p. 51–71.

Поступила в редакцию
1.XII.2006

Исправленный вариант
2.II.2009