Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Д. Б. Рохлин, Нижние оценки плотностей мартингалльных мер в теореме Даланга–Мортон–Виллинджера, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2009, том 54, выпуск 3, 492–514

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp2806>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.60.19

26 апреля 2023 г., 10:16:02

© 2009 г.

РОХЛИН Д. Б.*

НИЖНИЕ ОЦЕНКИ ПЛОТНОСТЕЙ МАРТИНГАЛЬНЫХ МЕР
В ТЕОРЕМЕ ДАЛАНГА–МОРТОНА–ВИЛЛИНДЖЕРА

Для d -мерного случайного процесса $(S_n)_{n=0}^N$ получены критерии существования эквивалентной мартингальной меры, плотность z которой, с точностью до нормирующего множителя, ограничена снизу заданной случайной величиной f . Рассмотрен случай одношаговой модели ($N = 1$) в предположении $S \in L^p$, $f, z \in L^q$, $1/p + 1/q = 1$, где $p \in [1, \infty]$, и случай N -шаговой модели при $p = \infty$. Указанные критерии выражены как в терминах условных распределений приращений S , так и в терминах ограниченности сверху целевой функции некоторой задачи оптимального инвестирования с ограничениями на убытки. Рассмотрен ряд примеров.

Ключевые слова и фразы: плотность мартингальной меры, регулярное условное распределение, измеримое многозначное отображение, двойственность, максимизация среднего выигрыша, ограничения на убытки.

Введение. Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ — вероятностное пространство, наделенное фильтрацией $\mathbf{F} = (\mathcal{F}_n)_{n=0}^N$, $\mathcal{F}_N = \mathcal{F}$. Рассмотрим d -мерный случайный процесс $S = (S_n)_{n=0}^N$, согласованный с $\mathbf{F}$, и d -мерный $\mathbf{F}$ -предсказуемый процесс $\gamma = (\gamma_n)_{n=1}^N$. В классической модели рынка ценных бумаг S_n^i и γ_n^i , $i = 1, \dots, d$, описывают соответственно дисконтированную цену i -го рискованного актива и количество его единиц в портфеле инвестора в момент времени n . Процесс

$$G_n^\gamma = \sum_{k=1}^n (\gamma_k, \Delta S_k), \quad \Delta S_k = S_k - S_{k-1}, \quad n = 1, \dots, N, \quad (0.1)$$

где (a, b) означает скалярное произведение векторов $a, b \in \mathbf{R}^d$, определяет динамику дисконтированного выигрыша инвестора.

Напомним классическую теорему Даланга–Мортон–Виллинджера [3], [15, гл. V, § 2e]. Говорят, что выполнено условие *отсутствия арбитража* (NA), если из неравенства $G_N^\gamma \geq 0$ п.н. (относительно меры $\mathbf{P}$) вытекает, что $G_N^\gamma = 0$ п.н. Заданная на $\mathcal{F}$ вероятностная мера $\mathbf{Q}$

* Южный федеральный университет, факультет математики, механики и компьютерных наук, ул. Мильчакова, 8А, 344090 Ростов-на-Дону, Россия; e-mail: rokhlin@math.rsu.ru

называется *мартингальной*, если процесс S является $\mathbf{Q}$ -мартингалом. Меры $\mathbf{P}$ и $\mathbf{Q}$ называются *эквивалентными*, если они обладают одинаковым запасом нулевых множеств. Обозначим через $\varkappa_{n-1}(\omega)$ носитель регулярного условного распределения $\mathbf{P}_{n-1}(\omega, dx)$ случайного вектора ΔS_n относительно $\mathcal{F}_{n-1}$.

Теорема 0.1 (Даланга–Мортон–Виллинджера). *Следующие условия равносильны:*

- (i) NA;
- (ii) существует эквивалентная $\mathbf{P}$ мартингальная мера $\mathbf{Q}$ с п.н. равномерно ограниченной плотностью $z = d\mathbf{Q}/d\mathbf{P}$;
- (iii) относительная внутренность выпуклой оболочки $\varkappa_{n-1}$ содержит начало координат п.н., $n = 1, \dots, N$.

Вопрос о существовании эквивалентной мартингальной меры $\mathbf{Q}$, плотность z которой удовлетворяет нижней оценке $z \geq c$, где c — положительная константа, ставился в [9] (замечание 7.5), [4] (замечание 6.5.2). В общем случае ответ на поставленный вопрос отрицателен. Очевидным необходимым условием является интегрируемость S по мере $\mathbf{P}$. Более того, приведенный в [4] пример показывает, что меры $\mathbf{Q}$ с указанными свойствами может не существовать и для равномерно ограниченного процесса S . Некоторое достаточное условие получено в работе [9]. Оно выполнено, в частности, для процесса S с независимыми приращениями, если случайные векторы ΔS_n имеют конечные моменты всех порядков.

Следуя [14], сформулируем задачу о существовании мартингальных мер, плотности которых (с точностью до умножения на константу) ограничены снизу заданной случайной величиной f , в более общем контексте. Обозначим через $\mathbf{E}X$ математическое ожидание по мере $\mathbf{P}$. Введем банаховы пространства $L^p = L^p(\mathcal{F}) = L^p(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$, $p \in [1, \infty)$, классов эквивалентности $\mathcal{F}$ -измеримых функций с нормами $\|X\|_p = \mathbf{E}|X|^p$ и банахово пространство L^∞ существенно ограниченных функций с нормой $\|X\|_\infty = \text{ess sup } |X|$. Конус L^p_+ неотрицательных элементов задает частичное упорядочение L^p .

Рассмотрим подпространство $K \subset L^p$, $p \in [1, \infty)$, выигрышей (приращений дисконтированного капитала) инвестора и обозначим через q сопряженный показатель: $1/p + 1/q = 1$. Условие $K \cap L^p_+ = \{0\}$ соответствует условию NA. Элемент $f \in L^q_+$ задает функционал на L^p по формуле $\langle X, f \rangle = \mathbf{E}(Xf)$, $X \in L^p$. Оказывается, что для существования элемента g , удовлетворяющего условиям

$$\langle X, g \rangle = 0, \quad X \in K; \quad g \geq f, \quad g \in L^q, \quad (0.2)$$

необходимо и достаточно, чтобы f был ограничен сверху на специальном

подмножестве K_1 подпространства K :

$$v_p := \sup_{X \in K_1} \langle X, f \rangle < \infty, \quad K_1 = \{X \in K: \|X^-\|_p \leq 1\}, \quad (0.3)$$

где $X^- = \max\{-X, 0\}$. При $p = \infty$, $q = 1$ данное утверждение, вообще говоря, неверно [14, примеры 1 и 3]. Однако оно становится верным, если потребовать ограниченности f сверху на множестве $\{X \in K: X^- \in V\}$, где V — некоторая окрестность нуля в топологии Макки $\tau(L^\infty, L^1)$, или заменить L^1 на пространство $(L^\infty)^*$, топологически сопряженное с L^∞ . Эти результаты содержатся в теореме 1 работы [14].

Отметим, что задачи, эквивалентные (0.3) в случае $f = 1$, рассматривались в работах [6], [7]. С экономической точки зрения они соответствуют максимизации среднего выигрыша при ограничении на убытки, величина которых определяется p -м моментом $\mathbf{E}|X^-|^p$ при $p \in [1, \infty)$, либо существенным супремумом $|X^-|$ при $p = \infty$. Из результатов указанных работ также следует равносильность условий (0.2) и (0.3) при $p \in [1, \infty)$ [6, теорема 5.8], [7, теорема 4.1]. К сожалению, аналогичное утверждение для $p = \infty$ [7, теорема 6.1] неверно: контрпример, фактически, содержится в [14] (пример 3). Другая его версия приводится ниже (пример 5.4).

Возвращаясь к модели с конечным набором активов, предположим, что $S \in L^p$, и обозначим через K множество случайных величин G_N^γ , где γ — ограниченный предсказуемый процесс. Тогда элементы g , удовлетворяющие (0.2), с точностью до нормирующего множителя совпадают с $\mathbf{P}$ -плотностями мартингалльных мер: $d\mathbf{Q}/d\mathbf{P} = g/\mathbf{E}g$.

Основной целью настоящей работы является установление эффективных критериев выполнения условий (0.2), (0.3) для модели рынка с дискретным конечным временем и конечным набором активов. Такие критерии, выраженные в терминах регулярных условных распределений приращений ΔS_n , получены для одношаговой модели в предположении $S \in L^p$, $g \in L^q$, где $p \in [1, \infty]$ (теорема 1.1), и для N -шаговой модели при $p = \infty$ (теорема 4.1). Данные результаты показывают также, что в рассматриваемом случае эквивалентность условий (0.2) и (0.3) при $p = \infty$ все-таки имеет место! Тем самым получен отрицательный ответ на вопрос, поставленный в конце работы [14]. В заключительной части работы приводятся примеры, демонстрирующие эффективность полученных критериев, а также контрпример к указанному выше утверждению работы [7]. Интересно также отметить, что случай $p = 1$ теоремы 1.1 приводит к новому доказательству ключевой импликации (iii) $\implies$ (ii) теоремы Даланга–Мортон–Виллинджера (замечание 1.2).

1. Одношаговая модель. Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ — вероятностное пространство и $\mathcal{H}$ — под- σ -алгебра $\mathcal{F}$. Мнозначное отображение F ,

относящее каждому $\omega \in \Omega$ некоторое множество $F(\omega) \subset \mathbf{R}^d$, называется $\mathcal{H}$ -измеримым, если $\{\omega: F(\omega) \cap V \neq \emptyset\} \in \mathcal{H}$ для любого открытого множества $V \subset \mathbf{R}^d$. Функция $\eta: \Omega \rightarrow \mathbf{R}^d$ называется *селектором* F , если $\eta(\omega) \in F(\omega)$ для всех $\omega \in \text{dom } F := \{\omega': F(\omega') \neq \emptyset\}$. Для $\mathcal{H}$ -измеримости многозначного отображения F с непустыми замкнутыми значениями $F(\omega)$ необходимо и достаточно, чтобы существовала такая последовательность $(\eta_i)_{i=1}^\infty$ $\mathcal{H}$ -измеримых селекторов F , что множества $\{\eta_i(\omega)\}_{i=1}^\infty$ плотны в $F(\omega)$ при каждом ω [12, теорема 14.5]. Такое семейство называется *представлением Кастэна* для F .

Через $\mathcal{B}(\mathbf{R}^d)$ обозначим борелевскую σ -алгебру пространства $\mathbf{R}^d$. Функция $\varphi: \Omega \times \mathbf{R}^d \rightarrow \mathbf{R}$ называется *функцией Каратеодори*, если (а) $\varphi(\cdot, x): \Omega \rightarrow \mathbf{R}$ является $(\mathcal{H}, \mathcal{B}(\mathbf{R}))$ -измеримой при каждом $x \in \mathbf{R}^d$, (б) $\varphi(\omega, \cdot): \mathbf{R}^d \rightarrow \mathbf{R}$ является непрерывной при каждом $\omega \in \Omega$.

Обозначим через $L^p(\mathcal{H}, F)$, $1 \leq p < \infty$, множество классов эквивалентности $\mathcal{H}$ -измеримых функций η , удовлетворяющих условиям $\int |\eta|^p d\mathbf{P} < \infty$, $\eta \in F$ п.н., где $|x| = (x, x)^{1/2}$. Введем также множества классов эквивалентности $L^\infty(\mathcal{H}, F)$ и $L^0(\mathcal{H}, F)$ существенно ограниченных и всех $\mathcal{H}$ -измеримых функций, принимающих значения в F п.н. В соответствии с введенными выше обозначениями, полагаем $L^p(\mathcal{H}) = L^p(\mathcal{H}, \mathbf{R})$. Через $L_+^p(\mathcal{H})$ и $L_{++}^p(\mathcal{H})$ обозначим множества соответственно неотрицательных и строго положительных элементов $L^p(\mathcal{H})$, а через $\|X\|_p$ — норму элемента X банахова пространства $L^p(\mathcal{H})$, $1 \leq p \leq \infty$.

Полношение σ -алгебры $\mathcal{H}$ относительно меры $\mathbf{P}$ обозначим $\mathcal{H}^{\mathbf{P}}$. Заметим, что $L^p(\mathcal{H}^{\mathbf{P}}) = L^p(\mathcal{H})$ в том смысле, что любая $\mathcal{H}^{\mathbf{P}}$ -измеримая функция обладает $\mathcal{H}$ -измеримой модификацией.

Будем использовать принятые в выпуклом анализе обозначения для поляры $A^\circ = \{x \in \mathbf{R}^d: (x, y) \leq 1, y \in A\}$ множества $A \subset \mathbf{R}^d$, а также для функции Минковского и опорной функции:

$$\mu(x | A) = \inf\{\lambda > 0: x \in \lambda A\}, \quad s(x | A) = \sup_{y \in A} (x, y).$$

Обозначим через $\text{conv } A$, $\text{ri } A$ выпуклую оболочку и относительную внутренность A .

Рассмотрим одношаговую модель (0.1) (т.е. $N = 1$). Положим $\xi = \Delta S_1$, $\mathcal{H} = \mathcal{F}_0$. Пусть $\mathbf{P}_\xi(\omega, dx)$ — регулярное условное распределение ξ относительно $\mathcal{H}$, $\kappa_\xi(\omega)$ — носитель меры $\mathbf{P}_\xi(\omega, \cdot)$ и $D_\xi(\omega) \subset \mathbf{R}^d$ — линейная оболочка $\kappa_\xi(\omega)$. Определим на $\Omega \times \mathbf{R}^d$ функции

$$\begin{aligned} \psi_p(\omega, h) &= \left(\int_{\mathbf{R}^d} [(h, x)^-]^p \mathbf{P}_\xi(\omega, dx) \right)^{1/p}, \quad p \in [1, \infty), \\ \psi_\infty(\omega, h) &= s(-h | \kappa_\xi(\omega)) \end{aligned}$$

со значениями в множестве $[0, \infty]$, а также многозначные отображения

$$\omega \mapsto T_p(\omega) = \{h \in D_\xi(\omega) : \psi_p(\omega, h) \leq 1\}. \quad (1.1)$$

Лемма 1.1. Пусть $\xi \in L^p(\mathcal{F}, \mathbf{R}^d)$ и $0 \in \text{ri}(\text{conv } \kappa_\xi(\omega))$ п.н. Тогда T_p — $\mathcal{H}^{\mathbf{P}}$ -измеримые многозначные отображения с п.н. компактными значениями, $p \in [1, \infty]$.

Доказательство. Многозначное отображение $\omega \mapsto \kappa_\xi(\omega)$ является $\mathcal{H}$ -измеримым:

$$\{\omega : \kappa_\xi(\omega) \cap V \neq \emptyset\} = \{\omega : \mathbf{P}_\xi(\omega, V) > 0\} \in \mathcal{H}$$

для любого открытого множества $V \subset \mathbf{R}^d$. Его значения $\kappa_\xi(\omega)$ замкнуты.

Функция $\psi_p : \Omega \times \mathbf{R}^d \rightarrow \mathbf{R}$, $p \in [1, \infty)$, непрерывна по h при каждом ω (в силу теоремы о мажорируемой сходимости) и $\mathcal{H}$ -измерима по ω при каждом $h \in \mathbf{R}^d$. Следовательно, ψ_p — функция Каратеодори и замкнутое многозначное отображение $\omega \mapsto \{h : \psi_p(\omega, h) \leq 1\}$ является $\mathcal{H}$ -измеримым [12, пример 4.15(b)]. Далее, многозначное отображение

$$\omega \mapsto T_p(\omega) = \{h : \psi_p(\omega, h) \leq 1\} \cap (\text{lin } \kappa_\xi(\omega))$$

$\mathcal{H}$ -измеримо по теореме об измеримости пересечения [12, предложение 14.11]. Аналогичное свойство T_∞ вытекает из представления

$$T_\infty(\omega) = \bigcap_{i=1}^{\infty} \{h : (-h, \eta_i(\omega)) \leq 1\} \cap D_\xi(\omega),$$

где $(\eta_i)_{i=1}^\infty$ — представление Кастэна для κ_ξ .

Известные результаты о «сохранении измеримости» [12, гл. 14(B)] показывают, что многозначное отображение

$$\omega \mapsto G(\omega) = \text{lin } \kappa_\xi(\omega) \cap (\text{cone } \kappa_\xi(\omega))^* \cap \mathbf{S}_1^d,$$

где $\mathbf{S}_1^d$ — единичная сфера пространства $\mathbf{R}^d$, также является $\mathcal{H}$ -измеримым. Легко видеть, что $G(\omega) = \emptyset$, если и только если ω принадлежит множеству $A_\xi = \{\omega : 0 \in \text{ri}(\text{conv } \kappa_\xi(\omega))\}$. Следовательно, $A_\xi \in \mathcal{H}$.

Пусть $B_\xi^p = \{\omega : \int |x|^p d\mathbf{P}_\xi(\omega, dx) < \infty\}$ при $p \in [1, \infty)$. Ясно, что $B_\xi^p \in \mathcal{H}$ и $\mathbf{P}(B_\xi^p) = 1$. Пусть $\omega \in A_\xi \cap B_\xi^p$. Поскольку $0 \in \text{ri}(\text{conv } \kappa_\xi(\omega))$, то при $h \in \text{lin } \kappa_\xi(\omega) \setminus 0$ множество $\kappa_\xi(\omega)$ не содержится целиком в полупространстве $\{x \in \text{lin } \kappa_\xi(\omega) : (h, x) \geq 0\}$. Следовательно, $\psi_p(\omega, h) > 0$ и множество $T_p(\omega)$ компактно, так как $\psi_p(\omega, h) \rightarrow \infty$ при $|h| \rightarrow \infty$, $h \in \text{lin } \kappa_\xi(\omega)$.

Компактность $T_\infty(\omega)$ при $\omega \in A_\xi$ также вытекает из неравенства

$$\psi_\infty(\omega, h) > 0, \quad 0 \neq h \in \text{lin } \kappa_\xi(\omega).$$

Лемма 1.1 доказана.

Напомним теорему «об измеримом максимуме» [1, теорема 18.19].

Лемма 1.2. Пусть F — $\mathcal{H}$ -измеримое многозначное отображение с непустыми компактными значениями $F(\omega) \subset \mathbf{R}^d$, и пусть $\varphi: \Omega \times \mathbf{R}^d \rightarrow \mathbf{R}$ — функция Каратеодори. Положим

$$m(\omega) = \max_{x \in F(\omega)} \varphi(\omega, x), \quad G(\omega) = \{x \in F(\omega): \varphi(\omega, x) = m(\omega)\}.$$

Тогда: (а) функция m и многозначное отображение G являются $\mathcal{H}$ -измеримыми; (b) существует $\mathcal{H}$ -измеримый селектор η^* отображения G .

Сформулируем первый основной результат настоящей работы.

Теорема 1.1. Пусть $\xi \in L^p(\mathcal{F}, \mathbf{R}^d)$, $f \in L^q_+(\mathcal{F})$, где $p \in [1, \infty]$ и $1/p + 1/q = 1$. Если $0 \in \text{ri}(\text{conv } \kappa_\xi)$ п.н., то следующие условия эквивалентны:

(i) $v_p := \sup\{\mathbf{E}(fX): \|X^-\|_p \leq 1, X \in K\} < \infty$, где

$$K = \{(\gamma, \xi): \gamma \in L^\infty(\mathcal{H}, D_\xi)\}; \quad (1.2)$$

(ii) существует случайная величина $g \in L^q(\mathcal{F})$, удовлетворяющая условиям

$$\mathbf{E}(g\xi | \mathcal{H}) = 0, \quad g \geq f; \quad (1.3)$$

(iii) $s(a | T_p) \in L^q(\mathcal{H})$, где $a = \mathbf{E}(f\xi | \mathcal{H})$ и T_p определяется формулой (1.1).

Прежде чем перейти к доказательству данной теоремы (п. 2 и п. 3), сделаем несколько замечаний.

З а м е ч а н и е 1.1. Пусть $0 \in \text{ri}(\text{conv } \kappa_\xi)$ и $\xi \in L^1(\mathcal{F}, \mathbf{R}^d)$ не зависит от $\mathcal{H}$. Тогда существует $g \in L^\infty(\mathcal{F})$ такая, что

$$\mathbf{E}(g\xi | \mathcal{H}) = 0, \quad g \geq 1.$$

Действительно, в данном случае величина $s(a | T_1) = s(\mathbf{E}\xi | T_1)$ не зависит от ω и, значит, принадлежит $L^\infty(\mathcal{H})$.

З а м е ч а н и е 1.2. Пусть $0 \in \text{ri}(\text{conv } \kappa_\xi)$ и $\xi \in L^1(\mathcal{F}, \mathbf{R}^d)$. Тогда существует $g \in L^1_{++}(\mathcal{F})$ такая, что

$$\mathbf{E}(g\xi | \mathcal{H}) = 0.$$

Для доказательства достаточно заметить, что существует $\mathcal{H}$ -измеримая функция $f \in L^1_{++}(\mathcal{H})$ такая, что

$$s(\mathbf{E}(f\xi | \mathcal{H}) | T_1) = s(\mathbf{E}(\xi | \mathcal{H}) | T_1)f \in L^\infty(\mathcal{H}).$$

Функция $g \in L^\infty(\mathcal{F})$, удовлетворяющая (1.3), является искомой.

Фактически, этим доказана импликация (iii) $\implies$ (ii) теоремы 0.1 при $N = 1$ и $S \in L^1$. Как известно, это ключевой пункт доказательства теоремы Даланга–Мортон–Виллинджера.

З а м е ч а н и е 1.3. Отметим, что

$$a = \mathbf{E} \left(\mathbf{E}(f | \mathcal{H} \vee \sigma(\xi)) \xi \middle| \mathcal{H} \right) = \int b(\omega, x) x \mathbf{P}_\xi(\omega, dx) \in D_\xi(\omega) \quad \text{п.н.} \quad (1.4)$$

Существование $\mathcal{H} \otimes \mathcal{B}(\mathbf{R}^d)$ -измеримой функции $b(\omega, x)$, удовлетворяющей условию $\mathbf{E}(f | \mathcal{H} \vee \sigma(\xi)) = b(\omega, \xi)$, вытекает из того, что σ -алгебра $\mathcal{H} \vee \sigma(\xi)$ порождается отображением $\omega \mapsto (\omega, \xi(\omega))$, действующим из Ω в измеримое пространство $(\Omega \otimes \mathbf{R}^d, \mathcal{H} \otimes \mathcal{B}(\mathbf{R}^d))$.

З а м е ч а н и е 1.4. Имеет место следующее удобное представление случайной величины $s(a(\omega) | T_\infty(\omega))$, где $a \in D_\xi$ п.н.:

$$s(a | T_\infty) = \sup\{(h, a): -h \in D_\xi \cap \mathcal{K}_\xi^\circ\} = s(-a | \mathcal{K}_\xi^\circ) = \mu(-a | \text{conv } \mathcal{K}_\xi) \quad \text{п.н.}$$

В последнем равенстве мы использовали соотношение

$$\mu(x | A^\circ) = \inf\{\lambda > 0: \lambda^{-1}x \in A^\circ\} = \inf\{\lambda > 0: s(\lambda^{-1}x | A) \leq 1\} = s(x | A),$$

верное при выполнении условия $0 \in A$, а также теорему о биполяре: $A^{\circ\circ} = \text{cl}(\text{conv } A)$ и свойство компактности выпуклой оболочки компакта.

2. Доказательство теоремы 1.1 при $p \in [1, \infty)$. Обозначим через U^p единичный шар пространства $L^p = L^p(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ и положим $U_+^p = \{X \in L_+^p: X \in U^p\}$.

Лемма 2.1. Для любого элемента $X \in L^p$, $p \in [1, \infty]$, верно равенство

$$\|X^+\|_p = \sup\{\langle X, z \rangle: z \in U_+^q\}, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим элементы

$$\zeta_q = \frac{(X^+)^{p/q}}{\|X^+\|_p^{p/q}} \in U_+^q, \quad q \in (1, \infty);$$

$$\zeta_\infty = I_{\{X \geq 0\}} \in U_+^\infty; \quad \zeta_1^n = \frac{I_{A_n}}{\mathbf{P}(A_n)} \in U_+^1,$$

где $A_n = \{\omega: X(\omega) \geq \|X^+\|_\infty - 1/n\}$. Если $X \in L^p$ и q — сопряженный показатель, то

$$\langle X, \zeta_q \rangle = \|X^+\|_p, \quad q \in (1, \infty]; \quad \langle X, \zeta_1^n \rangle \geq \|X^+\|_\infty - \frac{1}{n}.$$

С другой стороны,

$$\langle X, z \rangle \leq \langle X^+, z \rangle \leq \|X^+\|_p, \quad z \in U_+^q.$$

Лемма 2.1 доказана.

Хотя следующий результат вытекает из теоремы 1 работы [14], представляется удобным дать его непосредственное доказательство. Идея данного доказательства содержится также в работе [13] (лемма 2.5).

Напомним, что замыкание выпуклого множества $A \subset L^p$, $p \in [1, \infty)$, в слабой топологии $\sigma(L^p, L^q)$, $1/p + 1/q = 1$, совпадает с его замыканием в топологии нормы L^p .

Лемма 2.2. Для подпространства $K \subset L^p$, $p \in [1, \infty)$, и элемента $f \in L^q_+$, $1/p + 1/q = 1$, следующие условия эквивалентны:

- (a) $\sup_{X \in K_1} \langle X, f \rangle < \infty$, где $K_1 = \{X \in K: \|X^-\|_p \leq 1\}$;
- (b) существует элемент $g \in L^q$, удовлетворяющий условиям

$$\langle X, g \rangle = 0, \quad X \in K; \quad g \geq f. \quad (2.1)$$

Доказательство. (b) $\implies$ (a). Если $X \in K_1$, то

$$\langle X, f \rangle = \langle X, g \rangle + \langle X, f - g \rangle = -\langle X, g - f \rangle \leq \langle X^-, g - f \rangle \leq \|g - f\|_q.$$

(a) $\implies$ (b). Пусть $\lambda = \sup_{X \in K_1} \langle X, f \rangle$. Если утверждение леммы неверно, то

$$(f + \lambda U^q_+) \cap K^\circ = \emptyset, \quad K^\circ = \{z \in L^q: \langle X, z \rangle \leq 0, X \in K\}.$$

Применяя теорему отделимости [1, теорема 5.79] к $\sigma(L^q, L^p)$ -компактному множеству $f + \lambda U^q_+$ и $\sigma(L^q, L^p)$ -замкнутому множеству K° , заключаем, что существует $Y \in L^p$ такой, что

$$\sup_{z \in K^\circ} \langle Y, z \rangle < \inf\{\langle Y, \zeta \rangle: \zeta \in f + \lambda U^q_+\}.$$

Так как K является подпространством, отсюда следует, что $\langle Y, z \rangle = 0$, $z \in K^\circ$ и $Y \in K^{\circ\circ} = \text{cl}_p K$ по теореме о биполяре [1, теорема 5.103], где $\text{cl}_p K$ — замыкание K по норме L^p . Кроме того,

$$\langle Y, f \rangle + \lambda \inf\{\langle Y, \eta \rangle: \eta \in U^q_+\} > 0. \quad (2.2)$$

По лемме 2.1

$$\inf\{\langle Y, \eta \rangle: \eta \in U^q_+\} = -\sup\{\langle -Y, \eta \rangle: \eta \in U^q_+\} = -\|Y^-\|_p. \quad (2.3)$$

Если $Y^- = 0$, то $\langle Y, f \rangle > 0$ и $\alpha Y \in L^p_+ \cap \text{cl}_p K$ для любого $\alpha > 0$. Следовательно, функционал $X \mapsto \langle X, f \rangle$ неограничен сверху на луче $\{\alpha Y: \alpha > 0\}$, который целиком лежит в множестве

$$\text{cl}_p K_1 \supset \text{cl}_p (\{X: \|X^-\|_p < 1\} \cap K) \supset \{X: \|X^-\|_p < 1\} \cap \text{cl}_p K.$$

Здесь использовано элементарное соотношение $\text{cl}_p(A \cap B) \supset A \cap \text{cl}_p B$, которое имеет место, если множество A открыто [2, гл. 1, § 1, предложение 5].

Итак, $\|Y^-\|_p > 0$. Из соотношений (2.2), (2.3) следует теперь, что

$$\langle Y/\|Y^-\|_p, f \rangle > \lambda.$$

Но это противоречит определению λ , так как $Y/\|Y^-\|_p \in \text{cl}_p K_1$. Лемма 2.2 доказана.

Из леммы 2.2 следует, что условия (i) и (ii) теоремы 1.1 эквивалентны. Действительно, для подпространства (1.2) условие $\langle X, g \rangle = 0$, $X \in K$, означает, что

$$\mathbf{E}[g(\gamma, \xi)] = \mathbf{E}(\gamma, \mathbf{E}(g\xi | \mathcal{H})) = 0, \quad \gamma \in L^\infty(\mathcal{H}, D_\xi). \quad (2.4)$$

В свою очередь, соотношение (2.4) равносильно равенству $\mathbf{E}(g\xi | \mathcal{H}) = 0$: полагая

$$\gamma = \mathbf{E}(g\xi | \mathcal{H}) I_{\{|\mathbf{E}(g\xi | \mathcal{H})| \leq M\}} \in L^\infty(\mathcal{H}, D_\xi)$$

и переходя в (2.4) к пределу при $M \rightarrow \infty$, по лемме о монотонной сходимости заключаем, что $\mathbf{E}(g\xi | \mathcal{H}) = 0$.

Эквивалентность условий (i) и (iii) при всех $p \in [1, \infty]$ следует из равенства $v_p = \|s(a|T_p)\|_q$, которое доказано ниже в лемме 2.4. При доказательстве леммы 2.4 используется следующий результат.

Лемма 2.3. Пусть $\xi \in L^0(\mathcal{F}, \mathbf{R}^d)$ и $0 \in \text{ri}(\text{conv } \kappa_\xi)$. Если $(\gamma, \xi) \geq 0$ п.н. для некоторого $\gamma \in L^0(\mathcal{H}, D_\xi)$, то $\gamma = 0$ п.н.

Доказательство. Пусть $A = \{\gamma \neq 0\}$. Для любого $\omega \in A$ существует $y \in \kappa_\xi(\omega)$ такой, что $(\gamma(\omega), y) < 0$. При этом $\int (\gamma(\omega), x)^- \mathbf{P}_\xi(\omega, dx) > 0$. Если $\mathbf{P}(A) > 0$, то получаем противоречие:

$$\mathbf{E}(\gamma, \xi)^- = \mathbf{E} \mathbf{E}(I_A(\gamma, \xi)^- | \mathcal{H}) = \mathbf{E} \left(I_A \int_{\mathbf{R}^d} (\gamma(\omega), x)^- \mathbf{P}_\xi(\omega, dx) \right) > 0.$$

Лемма 2.3 доказана.

Из леммы 1.1 и теоремы об измеримом максимуме (лемма 1.2) вытекает, что существует элемент $h_p^* \in L^0(\mathcal{H}, T_p)$ такой, что

$$s(a(\omega)|T_p(\omega)) = (h_p^*(\omega), a(\omega)) \quad \text{п.н.}$$

Лемма 2.4. В условиях теоремы 1.1 верно равенство

$$v_p = \sup_{\gamma} \{ \mathbf{E}(\gamma, a) : \|(\gamma, \xi)^-\|_p \leq 1, \gamma \in L^\infty(\mathcal{H}, D_\xi) \} = \|s(a|T_p)\|_q,$$

где $p \in [1, \infty]$.

Доказательство. (а) Случай $1 \leq p < \infty$. Пусть $U_+^p(\mathcal{H}) = \{g \in L_+^p(\mathcal{H}) : \|g\|_p \leq 1\}$. Имеем:

$$\begin{aligned} U_+^p(\mathcal{F}) &= \left\{ g \in L_+^p(\mathcal{F}) : \mathbf{E}(\mathbf{E}(g^p | \mathcal{H})) \leq 1 \right\} \\ &= \bigcup_{w \in U_+^p(\mathcal{H})} \left\{ g \in L_+^p(\mathcal{F}) : (\mathbf{E}(g^p | \mathcal{H}))^{1/p} \leq w \right\}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} v_p &= \sup_{\gamma} \{ \mathbf{E}(\gamma, a): (\gamma, \xi)^- \in U_+^p(\mathcal{F}), \gamma \in L^\infty(\mathcal{H}, D_\xi) \} \\ &= \sup_{w \in U_+^p(\mathcal{H})} \sup_{\gamma} \left\{ \mathbf{E}(\gamma, a): (\mathbf{E}([(\gamma, \xi)^-]^p | \mathcal{H}))^{1/p} \leq w, \gamma \in L^\infty(\mathcal{H}, D_\xi) \right\}. \end{aligned}$$

На множестве $\{w = 0\}$ верно равенство $\mathbf{E}([(\gamma, \xi)^-]^p | \mathcal{H}) = 0$. Поэтому

$$\mathbf{E}[(\gamma I_{\{w=0\}}, \xi)^-]^p = 0$$

и $\gamma I_{\{w=0\}} = 0$ по лемме 2.3. Полагая $\gamma = w\theta$, где θ — $\mathcal{H}$ -измеримый вектор, находим

$$\begin{aligned} v_p &= \sup_{w \in U_+^p(\mathcal{H})} \sup_{\theta} \left\{ \mathbf{E} w(\theta, a): \mathbf{E}[(\theta I_{\{w>0\}}, \xi)^-]^p | \mathcal{H} \leq 1, \right. \\ &\quad \left. w\theta \in L^\infty(\mathcal{H}, D_\xi) \right\}. \end{aligned}$$

Поскольку значения θ на множестве $\{w = 0\}$ не влияют на $\mathbf{E} w(\theta, a)$, то с учетом определения T_p и равенства $\mathbf{E}([(\theta, \xi)^-]^p | \mathcal{H}) = \psi_p^p(\omega, \theta(\omega))$ п.н. имеем

$$v_p = \sup_{w \in U_+^p(\mathcal{H})} \sup_{\theta} \{ \mathbf{E} w(\theta, a): \theta \in L^0(\mathcal{H}, T_p), w\theta \in L^\infty(\mathcal{H}, D_\xi) \}.$$

Но $(\theta, a) \leq s(a | T_p)$ п.н. для $\theta \in L^0(\mathcal{H}, T_p)$. Следовательно,

$$v_p \leq \sup_{w \in U_+^p(\mathcal{H})} \mathbf{E}(s(a | T_p)w) = \|s(a | T_p)\|_q. \quad (2.5)$$

В последнем равенстве использована лемма 2.1.

Чтобы получить неравенство, противоположное (2.5), положим $\theta = h_p^* I_{\{|h_p^*| \leq M\}}$, $M > 0$. Ясно, что $w\theta \in L^\infty(\mathcal{H}, D_\xi)$ и

$$\begin{aligned} v_p &\geq \sup_{w \in U_+^p(\mathcal{H})} \mathbf{E}[w(h_p^*, a) I_{\{|h_p^*| \leq M\}}] = \sup_{w \in U_+^p(\mathcal{H})} \mathbf{E}(s(a | T_p)w I_{\{|h_p^*| \leq M\}}) \\ &= \|s(a | T_p) I_{\{|h_p^*| \leq M\}}\|_q. \end{aligned}$$

По теореме о монотонной сходимости вытекает справедливость неравенства $v_p \geq \|s(a | T_p)\|_q$.

(b) Случай $p = \infty$. Из соотношения

$$\mathbf{P}((\gamma, \xi) \geq -1) = \mathbf{E} \mathbf{P}(\{(\gamma, \xi) \geq -1\} | \mathcal{H}) = \mathbf{E} \mathbf{P}_\xi(\omega, \{x: (\gamma(\omega), x) \geq -1\})$$

следует, что условие $\|(\gamma, \xi)^-\|_\infty \leq 1$, означающее, что $\mathbf{P}((\gamma, \xi) \geq -1) = 1$, можно представить в виде $\mathbf{P}_\xi(\omega, \{x: (\gamma, x) \geq -1\}) = 1$ п.н. Другими

словами, $\gamma(\omega) \in -\kappa_\xi^\circ(\omega)$ п.н. С учетом равенства $T_\infty = (-\kappa_\xi^\circ) \cap D_\xi$ отсюда следует, что

$$v_\infty = \sup_{\gamma} \{ \mathbf{E}(\gamma, a) : \gamma \in L^\infty(\mathcal{H}, (-\kappa_\xi^\circ) \cap D_\xi) \} \leq \mathbf{E} s(a | T_\infty).$$

С другой стороны, $h_\infty^* I_{\{|h_\infty^*| \leq M\}} \in L^\infty(\mathcal{H}, (-\kappa_\xi^\circ) \cap D_\xi)$ для любого $M > 0$. Поэтому

$$v_\infty \geq \mathbf{E}((h_\infty^*, a) I_{\{|h_\infty^*| \leq M\}}) = \mathbf{E}(s(a | T_\infty) I_{\{|h_\infty^*| \leq M\}})$$

и $v_\infty \geq \mathbf{E} s(a | T_\infty)$ по теореме о монотонной сходимости. Лемма 2.4 доказана.

3. Доказательство теоремы 1.1 при $p = \infty$. Как уже отмечалось, из леммы 2.4 вытекает, что условия (i) и (iii) теоремы 1.1 эквивалентны. Пусть выполнено условие (ii) и $X = (\gamma, \xi)$, $\gamma \in L^\infty(\mathcal{H}, D_\xi)$. Импликация (ii) $\implies$ (i) является следствием неравенства

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(fX) &= \mathbf{E}(gX) - \mathbf{E}((g-f)X) \leq \mathbf{E}(\gamma, \mathbf{E}(g\xi | \mathcal{H})) + \mathbf{E}((g-f)X^-) \\ &\leq \|g-f\|_1 \|X^-\|_\infty. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Докажем, что (ii) вытекает из (iii). Будем разыскивать g в виде $g = f + \varphi(\omega, \xi(\omega))$, где $\varphi \in L_+^0(\mathcal{H} \otimes \mathcal{B}(\mathbf{R}^d))$. Искомая функция φ , во-первых, должна удовлетворять равенству (1.3):

$$\mathbf{E}(\varphi\xi | \mathcal{H}) = \int \varphi(\omega, x)x \mathbf{P}_\xi(\omega, dx) = -a(\omega) \quad \text{п.н.}$$

Во-вторых, функция $\omega \mapsto \varphi(\omega, \xi(\omega))$ должна быть $\mathbf{P}$ -интегрируемой. Функция φ с такими свойствами строится в лемме 3.3 после предварительной работы.

Лемма 3.1. Пусть $\mathbf{Q}$ — вероятностная мера на $(\mathbf{R}^d, \mathcal{B}(\mathbf{R}^d))$ с компактным носителем κ . Если $0 \in \text{ri}(\text{conv } \kappa)$, то для всех y из линейной оболочки D множества κ верно равенство

$$\begin{aligned} w(y) &:= \inf \left\{ \int \varphi(x) \mathbf{Q}(dx) : \int \varphi(x)x \mathbf{Q}(dx) = y, \varphi \in L_+^\infty(\mathbf{Q}) \right\} \\ &= \mu(y | \text{conv } \kappa). \end{aligned}$$

Доказательство. Нетрудно проверить, что надграфик w : $\text{epi } w = \{(y, \alpha) \in D \times \mathbf{R} : w(y) \leq \alpha\}$ — выпуклое множество (см. [10, лемма 2]). Следуя общей схеме теории двойственности (см., например, [10], [8]), найдем сопряженную функцию (преобразование Юнга–Фенхеля):

$$w^*(\lambda) = \sup_{y \in D} \{(y, \lambda) - w(y)\}$$

$$\begin{aligned}
&= \sup_{\varphi, y} \left\{ (y, \lambda) - \int \varphi(x) \mathbf{Q}(dx) : \int \varphi(x)x \mathbf{Q}(dx) = y, \varphi \in L_+^\infty(\mathbf{Q}) \right\} \\
&= \sup_{\varphi} \left\{ \int \varphi(x)((x, \lambda) - 1) \mathbf{Q}(dx) : \varphi \in L_+^\infty(\mathbf{Q}) \right\} = \delta(\lambda | \mathcal{K}^\circ), \quad \lambda \in D.
\end{aligned}$$

Здесь δ — индикаторная функция: $\delta(\lambda | \mathcal{K}^\circ) = 0$, $\lambda \in \mathcal{K}^\circ$; $\delta(\lambda | \mathcal{K}^\circ) = +\infty$, $\lambda \notin \mathcal{K}^\circ$. Вычислим преобразование Юнга–Фенхеля функции w^* :

$$w^{**}(y) = \sup_{\lambda \in D} \{(y, \lambda) - w^*(\lambda)\} = s(y | \mathcal{K}^\circ) = \mu(y | \text{conv } \mathcal{K}), \quad y \in D.$$

Покажем, что $\text{dom } w := \{y \in D : w(y) < \infty\} = D$. Очевидно, это равносильно тому, что множество $A = \{\int \varphi(x)x \mathbf{Q}(dx) : \varphi \in L_+^\infty(\mathbf{Q})\}$ совпадает с D .

Пусть $z \in D$ не принадлежит выпуклому множеству A . Тогда существует ненулевой вектор $h \in D$, разделяющий A и z :

$$\left(\int \varphi(x)x \mathbf{Q}(dx), h \right) = \int \varphi(x)(x, h) \mathbf{Q}(dx) \leq (z, h), \quad \varphi \in L_+^\infty(\mathbf{Q}).$$

Полагая $\varphi(x) = cI_{\{(h, x) \geq 0\}}$, где $c \in \mathbf{R}_+$, заключаем, что неравенство

$$c \int (x, h)^+ \mathbf{Q}(dx) \leq (z, h)$$

должно быть выполнено при всех $c > 0$. Следовательно, $(x, h)^+ = 0$ $\mathbf{Q}$ -п.н. Но тогда $(h, x) \leq 0$, $x \in \mathcal{K}$, и $\mathcal{K}$ содержится в подпространстве, ортогональном h , поскольку $0 \in \text{ri}(\text{conv } \mathcal{K})$. Это означает, что линейная оболочка $\mathcal{K}$ не совпадает с D , что невозможно.

Итак, $\text{dom } w = D$. Следовательно, w замкнута (см. [11, теорема 7.4]) и $w = w^{**}$ по теореме Фенхеля–Моро [8, гл. 1, п. 4]. Лемма 3.1 доказана.

Лемма 3.2. *Существует функция $\chi: [0, 1] \times \mathbf{R}^d \rightarrow \mathbf{R}$, измеримая относительно $\mathcal{B}([0, 1]) \otimes \mathcal{B}(\mathbf{R}^d)$ и обладающая следующим свойством: для каждой вероятностной меры $\mathbf{Q}$ на $\mathcal{B}(\mathbf{R}^d)$ и для каждой $\mathcal{B}(\mathbf{R}^d)$ -измеримой вещественнозначной функции f существует $r \in [0, 1]$ такое, что $\chi(r, x) = f(x)$ $\mathbf{Q}$ -п.н.*

Лемма 3.2 заимствована из работы [5] (теорема А.3).

Лемма 3.3. *Пусть $\xi \in L^\infty(\mathcal{F}, \mathbf{R}^d)$, $0 \in \text{ri}(\text{conv } \mathcal{K}_\xi)$ п.н., $a \in L^0(\mathcal{H}, D_\xi)$ и $\nu = \mu(-a | \text{conv } \mathcal{K}_\xi)$. Тогда существует функция $\varphi \in L_+^0(\mathcal{H} \otimes \mathcal{B}(\mathbf{R}^d))$ такая, что*

$$\begin{aligned}
&\int \varphi(\omega, x)x \mathbf{P}_\xi(\omega, dx) = -a(\omega) \quad \text{п.н.}, \\
&\int \varphi(\omega, x) \mathbf{P}_\xi(\omega, dx) \in [\nu(\omega), \nu(\omega) + \varepsilon(\omega)] \quad \text{п.н.}
\end{aligned}$$

для любой $\mathcal{H}$ -измеримой функции $\varepsilon > 0$.

Доказательство. Обозначим через Ω' множество тех ω , для которых $0 \in \text{ri}(\text{conv } \kappa(\omega))$ и множество $\kappa(\omega)$ компактно. Ясно, что $\Omega' \in \mathcal{H}^{\mathbf{P}}$ (см. доказательство леммы 1.1). Пусть χ — функция, указанная в лемме 3.2. Зафиксируем $\mathcal{H}$ -измеримую функцию $\varepsilon > 0$ и введем многозначное отображение $G: \Omega \rightarrow [0, 1]$ по формуле

$$G(\omega) = \left\{ y \in [0, 1]: \int \chi(y, x) \mathbf{P}_{\xi}(\omega, dx) \in [\nu(\omega), \nu(\omega) + \varepsilon(\omega)], \right. \\ \left. \int \chi(y, x)x \mathbf{P}_{\xi}(\omega, dx) = -a(\omega), \int \chi^{-}(y, x) \mathbf{P}_{\xi}(\omega, dx) = 0 \right\}.$$

Применяя лемму 3.1 при $\mathbf{Q}(dx) = \mathbf{P}_{\xi}(\omega, dx)$ и лемму 3.2, заключаем, что $G(\omega) \neq \emptyset$ для всех $\omega \in \Omega'$. Функции

$$\int \chi^{-}(y, x) \mathbf{P}_{\xi}(\omega, dx), \quad \int \chi(y, x) \mathbf{P}_{\xi}(\omega, dx), \quad \int \chi(y, x)x \mathbf{P}_{\xi}(\omega, dx),$$

зависящие от (ω, y) , измеримы относительно $\mathcal{H} \otimes \mathcal{B}([0, 1])$ (см. [3, лемма 2.2(a)]). Следовательно,

$$\text{gr } G = \{(\omega, y) \in \Omega \times [0, 1]: y \in G(\omega)\} \in \mathcal{H} \otimes \mathcal{B}([0, 1])$$

и по теореме Аумана существует $\mathcal{H}$ -измеримая функция $r: \Omega \rightarrow [0, 1]$, удовлетворяющая условию $r(\omega) \in G(\omega)$ [1, следствие 18.27]. Функция $\varphi(\omega, x) = \chi(r(\omega), x)$ обладает нужными свойствами. Лемма 3.3 доказана.

Вернемся к доказательству теоремы 1.1. Докажем, что из условия (iii) вытекает (ii) ($p = \infty$). Согласно предположению,

$$s(a|T_{\infty}) = \mu(-a | \text{conv } \kappa_{\xi}) \in L^1(\mathcal{H}), \quad a = \mathbf{E}(f\xi | \mathcal{H}).$$

Пусть $\varepsilon > 0$ — некоторая константа. Используя обозначения леммы 3.3, положим $g(\omega) = f(\omega) + \varphi(\omega, \xi(\omega))$. Функция $g \geq f$ является $\mathcal{F}$ -измеримой, $\mathbf{P}$ -интегрируемой, поскольку

$$\mathbf{E}(\varphi \wedge M) = \mathbf{E}\mathbf{E}(\varphi \wedge M | \mathcal{H}) = \mathbf{E} \int (\varphi(\omega, x) \wedge M) \mathbf{P}_{\xi}(\omega, dx) \\ \leq \mathbf{E} \mu(-a | \text{conv } \kappa_{\xi}) + \varepsilon, \quad M > 0, \quad (3.2)$$

и удовлетворяет равенству (1.3):

$$\mathbf{E}(g\xi | \mathcal{H}) = a(\omega) + \int \varphi(\omega, x)x \mathbf{P}_{\xi}(\omega, dx) = 0 \quad \text{п.н.}$$

4. N-шаговая модель. Вернемся к N -шаговой модели рынка на фильтрованном вероятностном пространстве, рассмотренной во введении. В дополнение к уже введенным обозначениям через $D_{n-1}(\omega)$ обозначим линейную оболочку $\kappa_{n-1}(\omega)$.

Сформулируем второй основной результат работы.

Теорема 4.1. Пусть процесс $S_n \in L^\infty(\mathcal{F}_n, \mathbf{R}^d)$, $n = 0, \dots, N$, удовлетворяет условию NA. Тогда для элемента $f \in L^1_{++}(\mathcal{F}, \mathbf{P})$ следующие условия равносильны:

(i) $v := \sup\{\mathbf{E}(fX): \|X^-\|_\infty \leq 1, X \in K\} < \infty$, где

$$K = \{G_N^\gamma: \gamma_n \in L^\infty(\mathcal{F}_{n-1}, D_{n-1}), n = 1, \dots, N\};$$

(ii) существует эквивалентная $\mathbf{P}$ мартингальная мера $\mathbf{Q}$, плотность которой удовлетворяет оценке $d\mathbf{Q}/d\mathbf{P} \geq cf$ с некоторой константой $c > 0$;

(iii) рекуррентная формула

$$\begin{aligned} \beta_N &= f, \\ \beta_n &= \mathbf{E}(\beta_{n+1} | \mathcal{F}_n) + \mu(-a_n | \text{conv } \kappa_n), \quad a_n = \mathbf{E}(\beta_{n+1} \Delta S_{n+1} | \mathcal{F}_n) \end{aligned}$$

задает $\mathbf{P}$ -интегрируемую последовательность $(\beta_n)_{n=0}^N$.

Доказательство. (ii) $\implies$ (i). Данное утверждение вытекает из оценки, аналогичной (3.1).

(i) $\implies$ (iii). Введем процесс $X^\gamma = 1 + G^\gamma$:

$$X_{n+1}^\gamma = X_n^\gamma + (\gamma_{n+1}, \Delta S_{n+1}), \quad X_0^\gamma = 1.$$

Если случайная величина $\beta_n \in L^0_+(\mathcal{F}_n)$ определена, то положим

$$u_n = \sup_\gamma \{\mathbf{E}(\beta_n X_n^\gamma): X_k^\gamma \geq 0, \gamma_k \in L^\infty(\mathcal{F}_{k-1}, D_{k-1}), 1 \leq k \leq n\}.$$

В силу предположения (i) имеем

$$\begin{aligned} u_N &\leq \sup_\gamma \{\mathbf{E}(\beta_N X_N^\gamma): X_N^\gamma \geq 0, \gamma_k \in L^\infty(\mathcal{F}_{k-1}, D_{k-1}), 1 \leq k \leq N\} \\ &= \mathbf{E}f + v < \infty. \end{aligned}$$

Пусть $u_{m+1} < \infty$ и процесс γ удовлетворяет условиям определения u_{m+1} . Тогда $\beta_{m+1} \in L^1(\mathcal{F}_{m+1})$ и

$$\mathbf{E}(\beta_{m+1} X_{m+1}^\gamma) = \mathbf{E}(X_m^\gamma \mathbf{E}(\beta_{m+1} | \mathcal{F}_m)) + \mathbf{E}(\gamma_{m+1}, a_m).$$

Следовательно,

$$u_{m+1} \geq \mathbf{E}(X_m^\gamma \mathbf{E}(\beta_{m+1} | \mathcal{F}_m)) + t_{m+1}, \quad (4.1)$$

$$t_{m+1} = \sup_{\gamma_{m+1}} \{\mathbf{E}(\gamma_{m+1}, a_m): X_{m+1}^\gamma \geq 0, \gamma_{m+1} \in L^\infty(\mathcal{F}_m, D_m)\}.$$

Условие $X_{m+1}^\gamma = X_m^\gamma + (\gamma_{m+1}, \Delta S_{m+1}) \geq 0$ п.н. можно эквивалентным образом представить в виде

$$(\gamma_{m+1}(\omega), x) \geq -X_m^\gamma(\omega), \quad x \in \kappa_m(\omega) \quad \text{п.н.},$$

т.е. $\gamma_{m+1} \in -X_m^\gamma \mathcal{K}_m^\circ$ п.н. (см. доказательство леммы 2.4 при $p = \infty$). Здесь учтено, что $\gamma_{m+1} = 0$ п.н., если $(\gamma_{m+1}, \Delta S_{m+1}) \geq 0$ и $\gamma_{m+1} \in D_m$ п.н. (лемма 2.3). Таким образом,

$$t_{m+1} = \sup_{\gamma_{m+1}} \{ \mathbf{E}(\gamma_{m+1}, a_m) : \gamma_{m+1} \in L^\infty(\mathcal{F}_m, (-X_m^\gamma \mathcal{K}_m^\circ) \cap D_m) \}.$$

Измеримость многозначного отображения $\mathcal{K}_m^\circ$ относительно $\mathcal{F}_m$ следует из соотношения $\mathcal{K}_m^\circ(\omega) = \bigcap_{i=1}^\infty \{h : (h, \eta_i(\omega)) \leq 1\}$, где $(\eta_i)_{i=1}^\infty$ — представление Кастэна для $\mathcal{K}_m$, и измеримости счетного пересечения [12, предложение 14.11(а)]. В силу компактности $\mathcal{K}_m^\circ(\omega) \cap D_m$ п.н., вытекающей из соотношения $0 \in \text{ri}(\text{conv } \mathcal{K}_m)$, по теореме об измеримом максимуме существует элемент $\gamma_{m+1}^* \in L^0(\mathcal{F}_m, -X_m^\gamma \mathcal{K}_m^\circ \cap D_m)$ такой, что

$$(\gamma_{m+1}, a_m) \leq (\gamma_{m+1}^*, a_m) = s(a_m | (-X_m^\gamma \mathcal{K}_m^\circ) \cap D_m) = X_m^\gamma \mu(-a_m | \text{conv } \mathcal{K}_m).$$

В частности, $t_{m+1} \leq \mathbf{E}(\gamma_{m+1}^*, a_m)$. С другой стороны, аппроксимируя γ_{m+1}^* элементами $\gamma_{m+1}^* I_{\{|\gamma_{m+1}^*| \leq M\}} \in L^\infty(\mathcal{F}_m, (-X_m^\gamma \mathcal{K}_m^\circ) \cap D_m)$, $M \rightarrow \infty$, заключаем, что

$$\mathbf{E}(\gamma_{m+1}^*, a_m) = \lim_{M \rightarrow \infty} \mathbf{E}(\gamma_{m+1}^* I_{\{|\gamma_{m+1}^*| \leq M\}}, a_m) \leq t_{m+1}$$

в силу теоремы о монотонной сходимости.

Подставляя найденное значение $t_{m+1} = \mathbf{E}[X_m^\gamma \mu(-a_m | \text{conv } \mathcal{K}_m)]$ в (4.1), находим

$$v_{m+1} \geq \mathbf{E} \left((\mathbf{E}(\beta_{m+1} | \mathcal{F}_m) + \mu(-a_m | \text{conv } \mathcal{K}_m)) X_m^\gamma \right) = \mathbf{E}(\beta_m X_m^\gamma).$$

Данное неравенство имеет место в предположении $X_k^\gamma \geq 0$, $\gamma_k \in L^\infty(\mathcal{F}_{k-1}, D_{k-1})$, $k = 1, \dots, m$. Следовательно, $v_m \leq v_{m+1} < \infty$. По индукции отсюда вытекает, что выполнено условие (iii).

(iii) $\implies$ (ii). Пусть $\nu_n = \mu(-a_n | \text{conv } \mathcal{K}_n)$. Напомним, что $a_n \in L^0(\mathcal{F}_n, D_n)$ (см. (1.4)). По лемме 3.3 для каждого $n = 1, \dots, N$ существует функция $\varphi_n \in L_+^0(\mathcal{F}_n \otimes \mathcal{B}(\mathbf{R}^d))$ такая, что

$$\int \varphi_n(\omega, x) x \mathbf{P}_n(\omega, dx) = -a_n(\omega) \quad \text{п.н.}, \quad (4.2)$$

$$\int \varphi_n(\omega, x) \mathbf{P}_n(\omega, dx) \in [\nu_n(\omega), \nu_n(\omega) + \beta_n(\omega)] \quad \text{п.н.} \quad (4.3)$$

Пусть $\zeta_{n+1}(\omega) = \varphi_n(\omega, \Delta S_{n+1}(\omega))$. Как следует из неравенства

$$\mathbf{E}(\zeta_{n+1} \wedge M) = \mathbf{E} \int (\varphi_n(\omega, x) \wedge M) \mathbf{P}_n(\omega, dx) \leq \mathbf{E}(\nu_n + \beta_n),$$

аналогичного (3.2), данные функции являются $\mathbf{P}$ -интегрируемыми. Соотношения (4.2), (4.3) можно переписать следующим образом:

$$\mathbf{E}(\zeta_{n+1} \Delta S_{n+1} | \mathcal{F}_n) = -a_n, \quad \mathbf{E}(\zeta_{n+1} | \mathcal{F}_n) = \nu_n + \varepsilon_n \beta_n, \quad (4.4)$$

где ε_n — $\mathcal{F}_n$ -измеримая функция, принимающая значения на интервале $[0, 1]$. Положим $z_N = 1 + \zeta_N/f$,

$$z_n = \frac{1}{1 + \varepsilon_n} \left(1 + \frac{\zeta_n}{\beta_n} \right), \quad n = 1, \dots, N-1; \quad Z = f \prod_{n=1}^N z_n.$$

Покажем, что случайная величина Z интегрируема и

$$\mathbf{E}(z_{n+1} \cdots z_N f | \mathcal{F}_n) = \beta_n(1 + \varepsilon_n), \quad n = 0, \dots, N-1. \quad (4.5)$$

В силу (4.4) и определения $(\beta_n)_{n=0}^N$ имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(z_N f | \mathcal{F}_{N-1}) &= \mathbf{E}(f | \mathcal{F}_{N-1}) + \mathbf{E}(\zeta_N | \mathcal{F}_{N-1}) \\ &= \mathbf{E}(\beta_N | \mathcal{F}_{N-1}) + \nu_{N-1} + \varepsilon_{N-1}\beta_{N-1} = (1 + \varepsilon_{N-1})\beta_{N-1}. \end{aligned}$$

Пусть случайная величина $z_{m+1} \cdots z_N f$ интегрируема и равенство (4.5) имеет место при $n = m$. Тогда

$$\mathbf{E}(I_{\{z_m \leq M\}} z_m z_{m+1} \cdots z_N f) = \mathbf{E}(I_{\{z_m \leq M\}} z_m \beta_m (1 + \varepsilon_m)) \leq \mathbf{E}(\beta_m + \zeta_m).$$

Следовательно, $z_m z_{m+1} \cdots z_N f \in L^1(\mathcal{F})$. Кроме того,

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(z_m z_{m+1} \cdots z_N f | \mathcal{F}_{m-1}) &= \mathbf{E}(z_m \beta_m (1 + \varepsilon_m) | \mathcal{F}_{m-1}) \\ &= \mathbf{E}(\beta_m + \zeta_m | \mathcal{F}_{m-1}) = \mathbf{E}(\beta_m | \mathcal{F}_{m-1}) + \nu_{m-1} + \varepsilon_{m-1}\beta_{m-1} \\ &= (1 + \varepsilon_{m-1})\beta_{m-1}. \end{aligned}$$

По индукции равенства (4.5) справедливы при всех n . В частности, $Z \in L^1(\mathcal{F})$.

Введем вероятностную меру $\mathbf{Q}$ с плотностью $d\mathbf{Q}/d\mathbf{P} = cZ$, $c = 1/\mathbf{E}Z$. Очевидно, что $d\mathbf{Q}/d\mathbf{P} \geq 2^{-N+1}cf$. Проверим, что $\mathbf{Q}$ — мартингаловая мера. Пусть $A_{n-1} \in \mathcal{F}_{n-1}$. Тогда

$$\begin{aligned} \frac{1}{c} \mathbf{E}_{\mathbf{Q}}(I_{A_{n-1}} \Delta S_n) &= \mathbf{E}(\mathbf{E}(Z | \mathcal{F}_n) I_{A_{n-1}} \Delta S_n) \\ &= \mathbf{E}(z_1 \cdots z_n \beta_n (1 + \varepsilon_n) I_{A_{n-1}} \Delta S_n) \\ &= \mathbf{E}(z_1 \cdots z_{n-1} I_{A_{n-1}} \mathbf{E}((\beta_n + \zeta_n) \Delta S_n | \mathcal{F}_{n-1})) = 0, \end{aligned}$$

так как $\mathbf{E}(\zeta_n \Delta S_n | \mathcal{F}_{n-1}) = -a_{n-1} = -\mathbf{E}(\beta_n \Delta S_n | \mathcal{F}_{n-1})$. Теорема 4.1 доказана.

5. Примеры. В примере 5.1 конкретизированы формулы условия (iii) теоремы 1.1 для скалярной случайной величины ξ в случае общего вероятностного пространства. В примере 5.2 рассмотрена некоторая одношаговая модель на счетном пространстве.

Пример 5.3 подчеркивает нелокальность условий теоремы 4.1. В нем построен процесс (S_0, S_1, S_2) , для которого не существует мартингальной меры, плотность которой ограничена снизу положительной константой, но при этом для каждого из процессов (S_0, S_1) , (S_1, S_2) такая мера существует.

Наконец, пример 5.4 показывает, что условия (0.2), (0.3) могут не быть эквивалентными при $p = \infty$, даже если существует $z \in L_{++}^1$, удовлетворяющий условию $\mathbf{E}(Xz) = 0$, $X \in K$, и подпространство K порождено счетным набором элементов.

Пример 5.1. Рассмотрим случай скалярной случайной величины ξ . В обозначениях теоремы 1.1 пусть $\xi \in L^p(\mathcal{F})$, $0 \in \text{ri}(\text{conv } \mathcal{K}_\xi)$ и $f \in L_+^q(\mathcal{F})$, $1/p + 1/q = 1$, $p \in [1, \infty]$.

При $q \in (1, \infty]$ имеем

$$\begin{aligned}\psi_p(\omega, h) &= \int [(hx)^-]^p \mathbf{P}_\xi(\omega, dx) \\ &= (h^+)^p \mathbf{E}((\xi^-)^p | \mathcal{H})(\omega) + (h^-)^p \mathbf{E}((\xi^+)^p | \mathcal{H})(\omega),\end{aligned}$$

и условие (iii) принимает вид

$$\begin{aligned}s(a|T_p) &= \sup_h \{ \mathbf{E}(f\xi | \mathcal{H})^+ h - \mathbf{E}(f\xi | \mathcal{H})^- h : \psi_p(\omega, h) \leq 1 \} \\ &= \frac{(\mathbf{E}(f\xi | \mathcal{H}))^+}{(\mathbf{E}((\xi^-)^p | \mathcal{H}))^{1/p}} + \frac{(\mathbf{E}(f\xi | \mathcal{H}))^-}{(\mathbf{E}((\xi^+)^p | \mathcal{H}))^{1/p}} \in L^q(\mathcal{H}).\end{aligned}\quad (5.1)$$

Пусть теперь $q = 1$, $p = \infty$. Имеем $\text{conv } \mathcal{K}_\xi(\omega) = [\delta_1(\omega), \delta_2(\omega)]$, $0 \in (\delta_1, \delta_2)$ п.н. С учетом замечания 1.4 условие (iii) сводится к виду

$$\mu(-a | [\delta_1, \delta_2]) = \frac{(\mathbf{E}(f\xi | \mathcal{H}))^+}{|\delta_1|} + \frac{(\mathbf{E}(f\xi | \mathcal{H}))^-}{\delta_2} \in L^1(\mathcal{H}).\quad (5.2)$$

Пример 5.2. В данном примере несколько обобщается модель [4] (замечание 6.5.2), [14] (пример 2). Пусть $\Omega = \mathbf{N}$. Рассмотрим произвольное счетное разбиение $(A_0^j)_{j=1}^\infty$ множества Ω :

$$\mathbf{N} = \bigcup_{j=1}^\infty A_0^j, \quad A_0^i \cap A_0^k = \emptyset, \quad i \neq k.$$

Обозначим через $\mathcal{H}$ σ -алгебру, порожденную данным разбиением. Пусть

$$A_0^j = A_1^{2j-1} \cup A_1^{2j}, \quad A_1^{2j-1} \cap A_1^{2j} = \emptyset, \quad j = 1, \dots, \infty,$$

и σ -алгебра $\mathcal{F}$ порождена множествами $(A_1^j)_{j=1}^\infty$. Предположим, что $\mathbf{P}(A_1^j) > 0$, $j \in \mathbf{N}$, и случайная величина $\xi \in L^p(\mathcal{F})$, $1 \leq p \leq \infty$, удовлетворяет условию $0 \in \text{ri}(\text{conv } \mathcal{K}_\xi)$:

$$\xi(\omega) > 0, \quad \omega \in A_1^{2j-1}, \quad \xi(\omega) < 0, \quad \omega \in A_1^{2j}, \quad j \in \mathbf{N}.$$

Пусть $f \in L_+^q(\mathcal{F})$, $1/p + 1/q = 1$, $p \in [0, \infty]$. Для любой $\mathcal{F}$ -измеримой случайной величины η положим для краткости $\eta^j = \eta(\omega)$, $\omega \in A_1^j$. Введем случайную величину ρ по формуле

$$\rho(\omega) = \sum_{j=1}^{\infty} \left(f^{2j} \left| \frac{\xi^{2j}}{\xi^{2j-1}} \right| \frac{\mathbf{P}(A_1^{2j})}{\mathbf{P}(A_1^{2j-1})} I_{A_1^{2j-1}}(\omega) + f^{2j-1} \left| \frac{\xi^{2j-1}}{\xi^{2j}} \right| \frac{\mathbf{P}(A_1^{2j-1})}{\mathbf{P}(A_1^{2j})} I_{A_1^{2j}}(\omega) \right).$$

Покажем, что для существования случайной величины g , удовлетворяющей условиям (ii) теоремы 1.1, необходимо и достаточно, чтобы

$$\rho \in L^q(\mathcal{F}). \quad (5.3)$$

Для этого воспользуемся условиями (5.1), (5.2), полученными в примере 5.1. В рассматриваемом случае

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(f\xi | \mathcal{H})(\omega) &= \sum_{j=1}^{\infty} \frac{f^{2j-1}\xi^{2j-1} \mathbf{P}(A_1^{2j-1}) + f^{2j}\xi^{2j} \mathbf{P}(A_1^{2j})}{\mathbf{P}(A_0^j)} I_{A_0^j}(\omega), \\ (\mathbf{E}(f\xi | \mathcal{H}))^+(\omega) &= \sum_{j=1}^{\infty} \frac{|\xi^{2j}| \mathbf{P}(A_1^{2j})(\rho^{2j} - f^{2j})^+}{\mathbf{P}(A_0^j)} I_{A_0^j}(\omega), \\ (\mathbf{E}(f\xi | \mathcal{H}))^-(\omega) &= \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\xi^{2j-1} \mathbf{P}(A_1^{2j-1})(f^{2j-1} - \rho^{2j-1})^-}{\mathbf{P}(A_0^j)} I_{A_0^j}(\omega). \end{aligned}$$

Пусть $q = 1$. Поскольку $[\delta_1, \delta_2] = \sum_{j=1}^{\infty} [\xi^{2j}, \xi^{2j-1}] I_{A_0^j}$, то условие (5.2) принимает вид

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \mu(-a | [\delta_1, \delta_2]) &= \sum_{j=1}^{\infty} \left((\rho^{2j} - f^{2j})^+ \mathbf{P}(A_1^{2j}) + (f^{2j-1} - \rho^{2j-1})^- \mathbf{P}(A_1^{2j-1}) \right) \\ &= \|(\rho - f)^+\|_1 < \infty, \end{aligned}$$

что эквивалентно (5.3), так как $f \in L^1(\mathcal{F})$.

При $q \in (1, \infty]$ воспользуемся условием (5.1). С учетом равенств

$$\begin{aligned} \mathbf{E}((\xi^-)^p | \mathcal{H}) &= \sum_{j=1}^{\infty} \frac{|\xi^{2j}|^p \mathbf{P}(A_1^{2j})}{\mathbf{P}(A_0^j)} I_{A_0^j}, \\ \mathbf{E}((\xi^+)^p | \mathcal{H}) &= \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(\xi^{2j-1})^p \mathbf{P}(A_1^{2j-1})}{\mathbf{P}(A_0^j)} I_{A_0^j} \end{aligned}$$

находим

$$\begin{aligned} s(a | T_p) &= \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{(\mathbf{P}(A_0^j))^{1-1/p}} \left[(\rho^{2j} - f^{2j})^+ (\mathbf{P}(A_1^{2j}))^{1-1/p} \right. \\ &\quad \left. + (f^{2j-1} - \rho^{2j-1})^- (\mathbf{P}(A_1^{2j-1}))^{1-1/p} \right] I_{A_0^j}. \end{aligned}$$

При $q \in (1, \infty)$ условие (5.1) означает, что

$$\begin{aligned} \|s(a | T_p)\|_q^q &= \sum_{j=1}^{\infty} \left([(\rho^{2j} - f^{2j})^+]^q \mathbf{P}(A_1^{2j}) + [(f^{2j-1} - \rho^{2j-1})^-]^q \mathbf{P}(A_1^{2j-1}) \right) \\ &= \|(\rho - f)^+\|_q^q < \infty, \end{aligned}$$

и сводится к (5.3). Наконец, условие $s(a | T_1) \in L^\infty(\mathcal{H})$ при $f \in L^\infty(\mathcal{F})$ эквивалентно ограниченности ρ .

Пример 5.3. Пусть $\Omega = \mathbf{N}$. Рассмотрим фильтрацию $\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}_2$, где σ -алгебра $\mathcal{F}_n$ порождена множествами $(A_n^j)_{j=1}^\infty$, $n = 0, 1, 2$,

$$A_0^j = \{4j - 3, 4j - 2, 4j - 1, 4j\}, \quad A_1^j = \{2j - 1, 2j\}, \quad A_2^j = \{j\}.$$

Введем вероятностную меру на $\mathcal{F}_2 = \mathcal{F}$ по формуле $\mathbf{P}(A_2^{2j-1}) = \mathbf{P}(A_2^{2j}) = 2^{-j-1}$. Заметим, что

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(A_1^j) &= \mathbf{P}(A_2^{2j-1}) + \mathbf{P}(A_2^{2j}) = 2^{-j}, \\ \mathbf{P}(A_0^j) &= \mathbf{P}(A_1^{2j-1}) + \mathbf{P}(A_1^{2j}) = 2^{-2j+1} + 2^{-2j} = \frac{3}{2^{2j}}. \end{aligned}$$

Пусть

$$\begin{aligned} \xi_1(\omega) &= \Delta S_1(\omega) = \sum_{j=1}^{\infty} \left(I_{A_1^{2j-1}}(\omega) - \frac{1}{2^j} I_{A_1^{2j}}(\omega) \right), \\ \xi_2(\omega) &= \Delta S_2(\omega) = \sum_{j=1}^{\infty} \left(I_{A_2^{2j-1}}(\omega) - \frac{1}{2^{j/2}} I_{A_2^{2j}}(\omega) \right). \end{aligned}$$

Согласно примеру 5.2, для существования $g_n \in L^1(\mathcal{F}_n)$, $n = 1, 2$, удовлетворяющих условиям

$$\mathbf{E}(g_n \xi_n | \mathcal{F}_{n-1}) = 0, \quad g_n \geq 1,$$

необходимо и достаточно, чтобы функции

$$\rho_n(\omega) = \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^{j/n}} \frac{\mathbf{P}(A_n^{2j})}{\mathbf{P}(A_n^{2j-1})} I_{A_n^{2j-1}}(\omega) + 2^{j/n} \frac{\mathbf{P}(A_n^{2j-1})}{\mathbf{P}(A_n^{2j})} I_{A_n^{2j}}(\omega) \right), \quad n = 1, 2,$$

входящие в соответствующие условия вида (5.3), были интегрируемы. Простое вычисление показывает, что это действительно так:

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \rho_1 &= \mathbf{E} \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^{j+1}} I_{A_1^{2j-1}} + 2^{j+1} I_{A_1^{2j}} \right) = \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^{3j}} + \frac{2}{2^j} \right) < \infty, \\ \mathbf{E} \rho_2 &= \mathbf{E} \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^{j/2}} I_{A_2^{2j-1}} + 2^{j/2} I_{A_2^{2j}} \right) = \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^{3j/2+1}} + \frac{1}{2^{j/2+1}} \right) < \infty. \end{aligned}$$

Проверим, что в рассматриваемой двухшаговой модели, тем не менее, не существует эквивалентной мартингальной меры $\mathbf{Q}$ с плотностью $d\mathbf{Q}/d\mathbf{P} \geq c > 0$, где c — некоторая константа.

Пусть $\omega \in A_1^j$. В обозначениях теоремы 4.1 имеем $\beta_2 = 1$,

$$a_1(\omega) = \mathbf{E}(\xi_2 | \mathcal{F}_1)(\omega) = \frac{\mathbf{E}(\xi_2 I_{A_1^j})}{\mathbf{P}(A_1^j)} = \frac{\mathbf{P}(A_2^{2j-1}) - 2^{-j/2} \mathbf{P}(A_2^{2j})}{\mathbf{P}(A_1^j)} = \frac{1 - 2^{-j/2}}{2},$$

$$\mu(-a_1 | \text{conv } \kappa_1)(\omega) = \inf\{\lambda > 0: -a_1(\omega) \in \lambda[-2^{-j/2}, 1]\} = 2^{j/2} a_1(\omega),$$

$$\beta_1(\omega) = 1 + \mu(-a_1 | \text{conv } \kappa_1)(\omega) = 1 + 2^{j/2} \frac{1 - 2^{-j/2}}{2} = \frac{2^{j/2} + 1}{2}$$

и $\mathbf{E} \beta_1 = \sum_{j=1}^{\infty} (2^{j/2} + 1) \mathbf{P}(A_1^j)/2 < \infty$.

Пусть теперь $\omega \in A_0^j$. Тогда

$$\begin{aligned} a_0(\omega) \mathbf{P}(A_0^j) &= \mathbf{E}(\beta_1 \xi_1 | \mathcal{F}_0)(\omega) \mathbf{P}(A_0^j) = \mathbf{E}(\beta_1 \xi_1 I_{A_0^j}) \\ &= \frac{2^{j-1/2} + 1}{2} \mathbf{P}(A_1^{2j-1}) - \frac{2^j + 1}{2} \frac{1}{2^j} \mathbf{P}(A_1^{2j}) \\ &= \frac{1}{2^{2j}} \left(2^{j-1/2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2^{j+1}} \right). \end{aligned}$$

При этом $a_0(\omega) > 0$ и

$$\mu(-a_0 | \text{conv } \kappa_0)(\omega) = \inf\{\lambda > 0: -a_0(\omega) \in \lambda[-2^{-j}, 1]\} = 2^j a_0(\omega).$$

Отсюда следует, что

$$\mathbf{E} \mu(-a_0 | \text{conv } \kappa_0) = \sum_{j=1}^{\infty} 2^j a_0^j \mathbf{P}(A_0^j) = \infty, \quad a_0^j = a_0(\omega), \quad \omega \in A_0^j.$$

Таким образом, $\beta_0 = \mathbf{E}(\beta_1 | \mathcal{F}_0) + \mu(-a_0 | \text{conv } \kappa_0) \notin L^1(\mathcal{F}_0)$.

Полученный результат показывает также, что

$$\sup_{\gamma} \{\mathbf{E} G_2^{\gamma}: \gamma_n \in L^{\infty}(\mathcal{F}_{n-1}), n = 1, 2, G_2^{\gamma} \geq -1\} = \infty,$$

в то время как

$$\sup_{\gamma_n} \{\mathbf{E}(\gamma_n, \xi_n): \gamma_n \in L^{\infty}(\mathcal{F}_{n-1}), (\gamma_n, \xi_n) \geq -1\} < \infty, \quad n = 1, 2.$$

Укажем явный вид стратегии $\gamma_n \in L^0(\mathcal{F}_{n-1})$, $n = 1, 2$, удовлетворяющей условиям

$$\mathbf{E} G_2^{\gamma} = \infty, \quad G_2^{\gamma} \geq -1.$$

Построенная ниже стратегия является «агрессивной» и состоит в покупке максимально допустимого количества активов на каждом шаге.

Пусть $\gamma_1(\omega) = \sum_{j=1}^{\infty} 2^j I_{A_0^j}$. Тогда

$$G_1^\gamma = \sum_{j=1}^{\infty} (2^j I_{A_1^{2j-1}} - I_{A_1^{2j}}) \geq -1.$$

Учитывая, что $A_1^{2j-1} = A_2^{4j-3} \cup A_2^{4j-2}$ и

$$\xi_2(\omega) = 1, \quad \omega \in A_2^{4j-3}, \quad \xi_2(\omega) = -\frac{1}{2^{j-1/2}}, \quad \omega \in A_2^{4j-2},$$

закключаем, что портфель $\gamma_2(\omega) = \sum_{j=1}^{\infty} 2^{j-1/2} (2^j + 1) I_{A_1^{2j-1}}$ является допустимым:

$$G_2^\gamma = \sum_{j=1}^{\infty} (2^j I_{A_1^{2j-1}} - I_{A_1^{2j}}) + \sum_{j=1}^{\infty} (2^{j-1/2} (2^j + 1) I_{A_2^{4j-3}} - (2^j + 1) I_{A_2^{4j-2}}) \geq -1$$

и $\mathbf{E} G_2^\gamma = \infty$, так как

$$\mathbf{P}(A_1^{2j-1}) = 2^{-2j+1}, \quad \mathbf{P}(A_1^{2j}) = 2^{-2j}, \quad \mathbf{P}(A_2^{4j-3}) = \mathbf{P}(A_2^{4j-2}) = 2^{-2j}.$$

Пример 5.4. Пусть $\Omega = \mathbf{N}$, $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$ и $\mathcal{F}$ порождается одноточечными подмножествами $\mathbf{N}$. Положим $A_j = \bigcup_{i=j}^{\infty} \{2i\}$, $B_j = \{4j+1\}$,

$$\Delta S_1^j = \xi^j = 2^j I_{B_{j-1}} - I_{A_j}, \quad j \in \mathbf{N}.$$

Введем на $\mathcal{F}$ вероятностную меру $\mathbf{Q}$ по формулам $\mathbf{Q}\{2j-1\} = \mathbf{Q}\{2j\} = 2^{-j-1}$. Мера $\mathbf{Q}$ является мартингальной для S :

$$\mathbf{Q}(B_{j-1}) = \mathbf{Q}\{2(2j-1)-1\} = \frac{1}{2^{2j}}, \quad \mathbf{Q}(A_j) = \sum_{i=j}^{\infty} \frac{1}{2^{i+1}} = \frac{1}{2^j},$$

$$\mathbf{E}_{\mathbf{Q}} \xi^j = 2^j \mathbf{Q}(B_{j-1}) - \mathbf{Q}(A_j) = 0.$$

Пусть $B = \bigcup_{j=1}^{\infty} B_{j-1}$ и $B' = \Omega \setminus (A_1 \cup B) = \bigcup_{j=1}^{\infty} \{4j-1\}$. Множество Ω совпадает с объединением непересекающихся множеств A_1, B, B' . Заметим, что

$$\mathbf{Q}(A_1) = \frac{1}{2}, \quad \mathbf{Q}(B') = \sum_{j=1}^{\infty} \mathbf{Q}\{2(2j-1)\} = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^{2j+1}} = \frac{1}{6},$$

и введем эквивалентную $\mathbf{Q}$ «рыночную» меру $\mathbf{P}$ по формуле

$$\mathbf{P}(C) = \mathbf{E}_{\mathbf{Q}}(\zeta I_C), \quad \zeta = \sum_{i=1}^{\infty} 2^{i-1} I_{B_{i-1}} + \frac{3}{4} (I_{A_1} + I_{B'}), \quad C \in \mathcal{F}.$$

Пусть J — конечное подмножество $\mathbf{N}$. Полагая в неравенстве

$$G^\gamma(\omega) := \sum_{j \in J} \gamma^j \xi^j(\omega) \geq -1, \quad \omega \in \mathbf{N}, \quad (5.4)$$

последовательно $\omega = 2m > \max J$ и $\omega = 4(m-1) + 1$, находим:

$$\sum_{j \in J} \gamma^j \leq 1, \quad 2^m \gamma^m \geq -1.$$

Поскольку

$$\mathbf{E}_{\mathbf{Q}}(\zeta \xi^j) = \mathbf{E}_{\mathbf{Q}}\left(2^{2j-1} I_{B_{j-1}} - \frac{3}{4} I_{A_j}\right) = \frac{1}{2} - \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2^j},$$

то для γ , удовлетворяющих (5.4), имеем

$$\mathbf{E} G^\gamma = \sum_{j \in J} \gamma^j \mathbf{E}_{\mathbf{Q}}(\zeta \xi^j) = \frac{1}{2} \sum_{j \in J} \gamma^j - \frac{3}{4} \sum_{j \in J} \gamma^j 2^{-j} \leq \frac{1}{2} + \frac{3}{4} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^{2j}} = \frac{3}{4}.$$

С другой стороны, если g — $\mathbf{P}$ -плотность мартингаловой меры, равномерно ограниченная снизу константой $c > 0$, то

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(g \xi^j) &= 2^j \mathbf{E}(g I_{B_{j-1}}) - \mathbf{E}(g I_{A_j}) = 0, \\ \mathbf{E}(g I_{A_j}) &\geq c 2^j \mathbf{P}(B_{j-1}) = c 2^{2j-1} \mathbf{Q}(B_{j-1}) = \frac{c}{2}, \end{aligned}$$

что невозможно в силу теоремы о мажорируемой сходимости, так как $\lim_{j \rightarrow \infty} I_{A_j} = 0$ п.н.

Подведем итог. Для подпространства $K \subset L^\infty(\mathcal{F})$, порожденного счетным набором элементов $(\xi^j)_{j=1}^\infty$, выполнено условие (0.3) при $f = 1$, $p = \infty$. Более того, существует элемент $z = \zeta^{-1} \in L_{++}^1(\mathcal{F})$ такой, что

$$\langle X, z \rangle = \mathbf{E}(Xz) = \mathbf{E}_{\mathbf{Q}}X = 0, \quad X \in K.$$

Однако не существует элемента g , удовлетворяющего (0.2) при $q = 1$ — контрпример к утверждению теоремы 6.1 работы [7].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Aliprantis C. D., Border K. C. Infinite Dimensional Analysis. A Hitchhiker's Guide. Berlin: Springer, 2006, 703 p.
2. Бурбаки Н. Общая топология. Основные структуры. М: Наука, 1968, 272 с.
3. Dalang R. C., Morton A., Willinger W. Equivalent martingale measures and no-arbitrage in stochastic securities market models. — Stochastics Stochastics Rep., 1990, v. 29, № 2, p. 185–201.
4. Delbaen F., Schachermayer W. The Mathematics of Arbitrage. Berlin: Springer, 2006, 373 p.
5. Evstigneev I. V., Schürger K., Taksar M. I. On the fundamental theorem of asset pricing: random constraints and bang-bang no-arbitrage criteria. — Math. Finance, 2004, v. 14, № 2, p. 201–221.
6. Leitner J. Optimal portfolios with expected loss constraints and shortfall risk optimal martingale measures. — Statist. Decisions, 2005, v. 23, № 1, p. 49–66.

7. *Leitner J.* Optimal portfolios with lower partial moment constraints and LPM-risk-optimal martingale measures. — *Math. Finance*, 2008, v. 18, № 2, p. 317–331.
8. *Магарил-Ильяев Г. Г., Тихомиров В. М.* Выпуклый анализ и его приложения. М.: Эдиториал УРСС, 2000, 176 с.
9. *Rásonyi M., Stettner L.* On utility maximization in discrete-time financial market models. — *Ann. Appl. Probab.*, 2005, v. 15, № 2, p. 1367–1395.
10. *Rockafellar R. T.* Duality and stability in extremum problems involving convex functions. — *Pacific J. Math.*, 1967, v. 21, № 1, p. 167–187.
11. *Рокфеллар Р. Т.* Выпуклый анализ. М.: Мир, 1973, 469 с.
12. *Rockafellar R. T., Wets R. J.-B.* Variational Analysis. Berlin: Springer, 1998, 733 p.
13. *Rokhlin D. B.* The Kreps–Yan theorem for L^∞ . — *Int. J. Math. Math. Sci.*, 2005, v. 2005, № 17, p. 2749–2756.
14. *Rokhlin D., Schachermayer W.* A note on lower bounds of martingale measure densities. — *Illinois J. Math.*, 2006, v. 50, № 4, p. 815–824.
15. *Ширяев А. Н.* Основы стохастической финансовой математики. Т. 2: Теория. М.: Фазис, 1998, 528 с.

Поступила в редакцию
14.IV.2008

Исправленный вариант
16.VI.2009