Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Г. М. Фельдман, Независимые линейные статистики на α -адических соленоидах,
Теория вероятн. и ее примен., 2009, том 54, выпуск 3, 515–532

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp2807>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и
согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.92.164.108

26 апреля 2023 г., 17:08:18

© 2009 г.

ФЕЛЬДМАН Г. М.*

НЕЗАВИСИМЫЕ ЛИНЕЙНЫЕ СТАТИСТИКИ
НА $\mathbf{a}$ -АДИЧЕСКИХ СОЛЕНОИДАХ

Пусть ξ_1 и ξ_2 — независимые случайные величины со значениями в $\mathbf{a}$ -адическом соленоиде $\Sigma_{\mathbf{a}}$ и с распределениями μ_1, μ_2 . Пусть α_j, β_j — топологические автоморфизмы группы $\Sigma_{\mathbf{a}}$. В предположении, что линейные статистики $L_1 = \alpha_1 \xi_1 + \alpha_2 \xi_2$ и $L_2 = \beta_1 \xi_1 + \beta_2 \xi_2$ являются независимыми, в статье описываются возможные распределения μ_1 и μ_2 .

Ключевые слова и фразы: независимые линейные статистики, $\mathbf{a}$ -адический соленоид, топологический автоморфизм.

1. Введение. Приводимая ниже теорема, доказанная независимо В. П. Скитовичем [1] и Ж. Дармуа [2], является одной из наиболее известных характеризационных теорем.

Теорема 1 (Скитович–Дармуа). Пусть $\xi_j, j = 1, \dots, n, n \geq 2$, — независимые случайные величины, а α_j, β_j — ненулевые вещественные числа. Если линейные статистики $L_1 = \alpha_1 \xi_1 + \dots + \alpha_n \xi_n$ и $L_2 = \beta_1 \xi_1 + \dots + \beta_n \xi_n$ независимы, то случайные величины ξ_j — гауссовские.

Эта теорема была обобщена С. Гурье и И. Олкином на случай, когда ξ_j — независимые случайные векторы в пространстве $\mathbf{R}^m$, а α_j, β_j — несингулярные матрицы. Они доказали, что из независимости L_1 и L_2 следует, что случайные векторы ξ_j — гауссовские ([3], см. также [4, гл. 3]). Большое число исследований было посвящено обобщению теоремы Скитовича–Дармуа на различные алгебраические структуры, в первую очередь на локально компактные абелевы группы (см., например, [5]–[14]). Исследования, стимулированные теоремой Скитовича–Дармуа, продолжаются и в классической ситуации [15].

Пусть X — локально компактная сепарабельная абелева метрическая группа, $\text{Aut}(X)$ — группа топологических автоморфизмов X , $\Gamma(X)$ — множество гауссовских распределений на X , $I(X)$ — множество идемпотентных распределений на X , т.е. множество сдвигов распределений Хаара m_K компактных подгрупп K группы X . Пусть

*Физико-технический институт низких температур им. Б. И. Веркина НАН Украины, пр-т Ленина, 47, 61103 Харьков, Украина; e-mail: feldman@ilt.kharkov.ua

ξ_j , $j = 1, \dots, n$, $n \geq 2$, — независимые случайные величины со значениями в X и с распределениями μ_j . Рассмотрим линейные статистики $L_1 = \alpha_1 \xi_1 + \dots + \alpha_n \xi_n$ и $L_2 = \beta_1 \xi_1 + \dots + \beta_n \xi_n$, $n \geq 2$, где $\alpha_j, \beta_j \in \text{Aut}(X)$. В последнее время особое внимание уделялось следующей задаче: для каких групп X из независимости L_1 и L_2 следует, что все распределения μ_j принадлежит $\Gamma(X) * I(X)$? Отметим, что если $\mu \in \Gamma(X) * I(X)$, т.е. $\mu = \gamma * m_K$, где $\gamma \in \Gamma(X)$, то μ инвариантно относительно компактной подгруппы $K \subset X$ и при естественном гомоморфизме $X \mapsto X/K$ индуцирует на фактор-группе X/K гауссовское распределение. Эта задача была решена в статьях [6]–[8] в классах конечных абелевых групп, компактных абелевых групп и дискретных периодических абелевых групп соответственно.

Целью настоящей статьи является изучение следующего вопроса, непосредственно связанного с сформулированной выше задачей. Как было доказано в [10], если X — произвольная связная компактная абелева группа, то существуют такие независимые случайные величины ξ_1, ξ_2 со значениями в группе X и с распределениями μ_1, μ_2 и такие автоморфизмы $\alpha_j, \beta_j \in \text{Aut}(X)$, что линейные статистики $L_1 = \alpha_1 \xi_1 + \alpha_2 \xi_2$ и $L_2 = \beta_1 \xi_1 + \beta_2 \xi_2$ независимы, а $\mu_1, \mu_2 \notin \Gamma(X) * I(X)$. Пусть ξ_1, ξ_2 — независимые случайные величины со значениями в группе X и с распределениями μ_1, μ_2 . Пусть $\alpha_j, \beta_j \in \text{Aut}(X)$ и предположим, что линейные статистики $L_1 = \alpha_1 \xi_1 + \alpha_2 \xi_2$ и $L_2 = \beta_1 \xi_1 + \beta_2 \xi_2$ независимы. Возникает следующая естественная задача: описать возможные распределения μ_1, μ_2 . Как отмечено выше, μ_j не всегда являются свертками гауссовских и идемпотентных распределений.

Заметим, что если X — связная компактная абелева группа размерности один, то X топологически изоморфна либо группе вращений окружности $\mathbf{T}$ (одномерному тору), либо $\mathbf{a}$ -адическому соленоиду $\Sigma_{\mathbf{a}}$. Если $X = \mathbf{T}$, то, не ограничивая общности, можно считать, что линейные статистики имеют вид $L_1 = \xi_1 + \xi_2$, $L_2 = \xi_1 - \xi_2$, и соответствующие распределения μ_j описаны в работе [16]. В настоящей статье мы описываем распределения μ_j для произвольного $\mathbf{a}$ -адического соленоида $X = \Sigma_{\mathbf{a}}$ (теорема 1). Ответ оказывается довольно сложным и зависит как от вида соленоида $\Sigma_{\mathbf{a}}$, так и от автоморфизмов $\alpha_j, \beta_j \in \text{Aut}(\Sigma_{\mathbf{a}})$. Тем самым, сформулированная выше задача оказывается решенной для произвольных связных локально компактных абелевых групп размерности один, поскольку если X — связная локально компактная некомпактная абелева группа размерности один, то $X \approx \mathbf{R}$, и решение задачи вытекает из теоремы Скитовича–Дармуа. Отметим также, что при дополнительном условии: характеристические функции распределений μ_j не обращаются в нуль, в [6] было доказано, что на группе $X = \Sigma_{\mathbf{a}}$ из независимости L_1 и L_2 следует, что все μ_j гауссовские.

2. Определения и обозначения. Прежде чем сформулировать основную теорему, напомним некоторые определения и условимся об обозначениях. Для произвольной локально компактной абелевой группы X пусть $Y = X^*$ — ее группа характеров, (x, y) — значение характера $y \in Y$ на элементе $x \in X$. Если K — замкнутая подгруппа в X , то обозначим через $A(Y, K) = \{y \in Y: (x, y) = 1 \text{ для всех } x \in K\}$ ее аннулятор. Если $\delta: X \rightarrow X$ — непрерывный гомоморфизм, то сопряженный гомоморфизм $\tilde{\delta}: Y \rightarrow Y$ определяется формулой $(x, \tilde{\delta}y) = (\delta x, y)$ для всех $x \in X, y \in Y$. Отметим, что $\delta \in \text{Aut}(X)$ тогда и только тогда, когда $\tilde{\delta} \in \text{Aut}(Y)$. Если n — целое, $n \neq 0$, то f_n обозначает гомоморфизм $f_n: X \rightarrow X$, определяемый формулой $f_n(x) = nx$. Положим $X^{(n)} = f_n(X)$. Ясно, что $\tilde{f}_n = f_n$. Обозначим $\mathbf{Z}$ группу целых чисел, $\mathbf{Q}$ — рассматриваемую в дискретной топологии группу рациональных чисел, $\mathbf{Z}(n)$ — конечную циклическую группу порядка n .

Пусть $\mathbf{a} = (a_0, a_1, \dots)$, где все a_j принадлежат $\mathbf{Z}$, $a_j > 1$. Вначале мы определим группу целых $\mathbf{a}$ -адических чисел $\Delta_{\mathbf{a}}$. Как множество $\Delta_{\mathbf{a}}$ совпадает с декартовым произведением $\prod_{n=0}^{\infty} \{0, 1, \dots, a_n - 1\}$. Рассмотрим $\mathbf{x} = (x_0, x_1, x_2, \dots)$, $\mathbf{y} = (y_0, y_1, y_2, \dots) \in \Delta_{\mathbf{a}}$ и определим сумму $\mathbf{z} = \mathbf{x} + \mathbf{y}$ следующим образом. Пусть $x_0 + y_0 = t_0 a_0 + z_0$, где $z_0 \in \{0, 1, \dots, a_0 - 1\}$, $t_0 \in \{0, 1\}$. Предположим, что числа $z_0, z_1, \dots, z_k$ и $t_0, t_1, \dots, t_k$ уже определены. Положим тогда $x_{k+1} + y_{k+1} + t_k = t_{k+1} a_{k+1} + z_{k+1}$, где $z_{k+1} \in \{0, 1, \dots, a_{k+1} - 1\}$, $t_{k+1} \in \{0, 1\}$. Таким образом по индукции определена последовательность $\mathbf{z} = (z_0, z_1, z_2, \dots)$. Множество $\Delta_{\mathbf{a}}$ с определенным выше сложением является абелевой группой, нейтральный элемент которой — последовательность в $\Delta_{\mathbf{a}}$, состоящая из нулей. Рассмотрим $\Delta_{\mathbf{a}}$ в топологии произведения. Полученная группа называется группой целых $\mathbf{a}$ -адических чисел. Рассмотрим группу $\mathbf{R} \times \Delta_{\mathbf{a}}$. Пусть B — подгруппа в $\mathbf{R} \times \Delta_{\mathbf{a}}$ вида $B = \{(n, n\mathbf{u})\}_{n=-\infty}^{\infty}$, где $\mathbf{u} = (\mathbf{1}, \mathbf{0}, \dots, \mathbf{0}, \dots)$. Факторгруппа $\Sigma_{\mathbf{a}} = (\mathbf{R} \times \Delta_{\mathbf{a}})/B$ называется $\mathbf{a}$ -адическим соленидом. Группа $\Sigma_{\mathbf{a}}$ компактна, связна и имеет размерность один (см. [18, (10.12), (10.13), (24.28)]). Группа характеров группы $\Sigma_{\mathbf{a}}$ топологически изоморфна подгруппе $H_{\mathbf{a}} \subset \mathbf{Q}$ вида

$$H_{\mathbf{a}} = \left\{ \frac{m}{a_0 a_1 \cdots a_n} : n = 0, 1, \dots; m \in \mathbf{Z} \right\}.$$

Не ограничивая общности, мы будем считать, что если $X = \Sigma_{\mathbf{a}}$, то $Y = X^* = H_{\mathbf{a}}$.

Пусть $M^1(X)$ — сверточная полугруппа вероятностных распределений на X , $\hat{\mu}(y) = \int_X (x, y) d\mu(x)$ — характеристическая функция распределения $\mu \in M^1(X)$, $\sigma(\mu)$ — носитель μ . Если K — замкнутая подгруппа в X и $\sigma(\mu) \subset K$, то $\hat{\mu}(y+h) = \hat{\mu}(y)$ для всех $y \in Y, h \in A(Y, K)$. Если E — замкнутая подгруппа в Y и $\hat{\mu}(y) \equiv 1$ при $y \in E$, то $\hat{\mu}(y+h) = \hat{\mu}(y)$ при всех $y \in Y, h \in E$ и $\sigma(\mu) \subset A(X, E)$. Для $\mu \in M^1(X)$ через $\bar{\mu} \in M^1(X)$

обозначим распределение, определяемое формулой $\bar{\mu}(B) = \mu(-B)$ для любого борелевского подмножества $B \subset X$. Заметим, что $\widehat{\bar{\mu}}(y) = \bar{\widehat{\mu}}(y)$.

Распределение $\gamma \in M^1(X)$ называется гауссовским [17], если его характеристическая функция представима в виде

$$\widehat{\gamma}(y) = (x, y) \exp\{-\varphi(y)\},$$

где $x \in X$, а $\varphi(y)$ — непрерывная неотрицательная функция на Y , удовлетворяющая уравнению

$$\varphi(u+v) + \varphi(u-v) = 2[\varphi(u) + \varphi(v)], \quad u, v \in Y. \quad (1)$$

Отметим, что характеристическая функция распределения Хаара m_K , где K — компактная подгруппа в X , имеет вид

$$\widehat{m}_K(y) = \begin{cases} 1, & y \in A(Y, K), \\ 0, & y \notin A(Y, K). \end{cases}$$

Пусть ξ_1, ξ_2 — независимые случайные величины со значениями в группе $X = \Sigma_a$ и с распределениями μ_1, μ_2 . Рассмотрим линейные статистики $L_1 = \alpha_1 \xi_1 + \alpha_2 \xi_2$ и $L_2 = \beta_1 \xi_1 + \beta_2 \xi_2$, где $\alpha_j, \beta_j \in \text{Aut}(X)$. Предположим, что L_1 и L_2 независимы. Вводя новые независимые случайные величины $\xi'_j = \alpha_j \xi_j$, $j = 1, 2$, можно считать, что $L_1 = \xi_1 + \xi_2$ и $L_2 = \delta_1 \xi_1 + \delta_2 \xi_2$, где $\delta_j \in \text{Aut}(X)$. Заметим, что любой топологический автоморфизм δ группы X имеет вид

$$\delta = f_p f_q^{-1}$$

при некоторых взаимно простых p и q , где $f_p, f_q \in \text{Aut}(X)$. Поскольку при любом $\delta \in \text{Aut}(X)$ линейные статистики L_1 и L_2 независимы тогда и только тогда, когда независимы L_1 и δL_2 , то, не ограничивая общности, можно с самого начала предполагать, что $L_1 = \xi_1 + \xi_2$, $L_2 = p\xi_1 + q\xi_2$, где $p, q \in \mathbf{Z}$, $pq \neq 0$, $pq \neq 1$ и p и q взаимно просты. Сформулируем теперь основной результат статьи.

Теорема 2. Пусть $X = \Sigma_a$, ξ_1, ξ_2 — независимые случайные величины со значениями в X и с распределениями μ_1, μ_2 . Предположим, что $f_p, f_q \in \text{Aut}(X)$, $pq \neq 1$ и p и q — взаимно просты. Обозначим $s = p - q$, разложим $|s|$ на простые множители, $|s| = s_1^{k_1} \cdots s_l^{k_l}$ и рассмотрим соответствующие гомоморфизмы f_{s_j} , $j = 1, \dots, l$. Если линейные статистики $L_1 = \xi_1 + \xi_2$ и $L_2 = p\xi_1 + q\xi_2$ независимы, то возможные распределения μ_1 и μ_2 описываются в таблицах 1 и 2.

Таблица 1.

pq — составное	$pq = -1$	
	$f_2 \in \text{Aut}(X)$	$f_2 \notin \text{Aut}(X)$
существуют $\mu_1, \mu_2 \notin \Gamma(X) * I(X)$	$\mu_1, \mu_2 \in \Gamma(X) * I(X)$	существуют $\mu_1, \mu_2 \notin \Gamma(X) * I(X)$

Таблица 2.

pq — простое			
$f_{s_j} \notin \text{Aut}(X)$ хотя бы при одном $s_j \neq 2$	$f_{s_j} \in \text{Aut}(X)$ при всех $s_j \neq 2$ и $f_2 \notin \text{Aut}(X)$		$f_s \in \text{Aut}(X)$
	s делится на 4	s не делится на 4	
существуют $\mu_1, \mu_2 \notin \Gamma(X) * I(X)$	существуют $\mu_1, \mu_2 \notin \Gamma(X) * I(X)$	по крайней мере одно из $\mu_j \in \Gamma(X) * I(X)$	по крайней мере одно из $\mu_j \in \Gamma(X) * I(X)$

Прежде чем перейти к доказательству теоремы 1, введем следующие обозначения, которые сохраним на протяжении всей статьи. Пусть $f_{s_{j_1}}, \dots, f_{s_{j_r}}$ — все гомоморфизмы, которые являются топологическими автоморфизмами X . Обозначим через H подгруппу в Y вида

$$H = \left\{ \frac{m}{s_{j_1}^{n_1} \dots s_{j_r}^{n_r}} : m, n_j \in \mathbf{Z} \right\}$$

(в случае, когда $|s| = 1$ либо все $f_{s_j} \notin \text{Aut}(X)$, считаем, что $H = \mathbf{Z}$). Обозначим $G = H^*$.

3. Доказательство теоремы 1. Принимая во внимание, что $\hat{\mu}_j(y) = \mathbf{E}[(\xi_j, y)]$, аналогично тому, как это делается в классическом случае, легко видеть, что независимость линейных статистик L_1 и L_2 равносильна тому, что характеристические функции $\hat{\mu}_j(y)$ удовлетворяют функциональному уравнению

$$\hat{\mu}_1(u + pv)\hat{\mu}_2(u + qv) = \hat{\mu}_1(u)\hat{\mu}_2(u)\hat{\mu}_1(pv)\hat{\mu}_2(qv), \quad u, v \in Y. \quad (2)$$

Возможные решения этого уравнения мы и будем изучать.

Случай 1: pq — составное.

Докажем, что в этом случае существуют независимые случайные величины ξ_1, ξ_2 со значениями в X и с распределениями μ_1, μ_2 такие, что линейные статистики L_1 и L_2 независимы, а $\mu_1, \mu_2 \notin \Gamma(X) * I(X)$. Очевидно, что, не ограничивая общности, можно считать выполненным следующее. Если $y = m/n \in Y$, $m, n \in \mathbf{Z}$, $n \neq 0$, то в разложении n на простые множители участвуют лишь те s_j из разложения $|s|$, для

которых $f_{s_j} \in \text{Aut}(X)$. Поэтому из $sy \in H$ следует, что $y \in H$. Имеются две возможности.

А. $|p| > 1$, $|q| > 1$. Поскольку p и s , а также q и s взаимно просты, то $H^{(p)} \neq H$ и $H^{(q)} \neq H$. Пусть $\lambda_j \in M^1(G)$ и $\sigma(\lambda_1) \subset A(G, H^{(p)})$, $\sigma(\lambda_2) \subset A(G, H^{(q)})$. Тогда $\hat{\lambda}_1(u + pv) = \hat{\lambda}_1(u)$, $\hat{\lambda}_2(u + qv) = \hat{\lambda}_2(u)$ при $u, v \in H$. Отсюда, очевидно, следует, что характеристические функции $\hat{\lambda}_j(y)$ удовлетворяют уравнению (2) при $u, v \in H$. Положим

$$g_j(y) = \begin{cases} \hat{\lambda}_j(y), & y \in H, \\ 0, & y \notin H. \end{cases} \quad (3)$$

Функции $g_j(y)$ являются положительно определенными на Y [19, §32]. По теореме Бохнера существуют такие распределения $\mu_j \in M^1(X)$, что $\hat{\mu}_j(y) = g_j(y)$, $j = 1, 2$. Проверим, что характеристические функции $\hat{\mu}_j(y)$ удовлетворяют уравнению (2). Очевидно, что если $u, v \in H$, то (2) выполнено. Пусть $u \notin H$. Тогда правая часть в (2) равна нулю. Если при этом левая часть в (2) отлична от нуля, то

$$u + pv \in H \quad \text{и} \quad u + qv \in H. \quad (4)$$

Но из (4) тогда следует, что $sv \in H$. Значит, $v \in H$, и поэтому $u \in H$, что противоречит выбору u . Следовательно, и левая часть в (2) равна нулю. Пусть $v \notin H$. Если $pv, qv \in H$, то и $sv \in H$. Отсюда следует, что $v \in H$, что противоречит выбору v . Значит, либо $pv \notin H$, либо $qv \notin H$. Тогда правая часть в (2) равна нулю. Если при этом левая часть в (2) отлична от нуля, то выполнено (4), что влечет $v \in H$, вопреки выбору v . Значит, левая часть в (2) равна нулю.

Итак, уравнение (2) справедливо при любых $u, v \in Y$, а следовательно, линейные статистики L_1 и L_2 независимы. Ясно, что λ_j можно выбрать таким образом, чтобы μ_1, μ_2 не принадлежали $\Gamma(X) * I(X)$. Требуемое утверждение в случае А доказано.

В. Либо $|p| = 1$, либо $|q| = 1$. Пусть для определенности $|p| = 1$. Не ограничивая общности, можно считать, что $p = 1$. Пусть $q = q_1 q_2$, где $|q_j| > 1$. Очевидно, что если $f_q \in \text{Aut}(X)$, то и $f_{q_1}, f_{q_2} \in \text{Aut}(X)$. Поэтому независимость линейных статистик $L_1 = \xi_1 + \xi_2$ и $L_2 = \xi_1 + q\xi_2$ равносильна независимости $L_1 = \xi_1 + \xi_2$ и $L_2 = (q_1)^{-1}\xi_1 + q_2\xi_2$. Делая замену $\xi'_1 = (q_1)^{-1}\xi_1$, мы сводим задачу к случаю, когда $L_1 = q_1\xi_1 + \xi_2$, $L_2 = \xi_1 + q_2\xi_2$. Соответствующее функциональное уравнение для характеристических функций $\hat{\mu}_j(y)$ в этом случае имеет вид

$$\hat{\mu}_1(q_1 u + v) \hat{\mu}_2(u + q_2 v) = \hat{\mu}_1(q_1 u) \hat{\mu}_2(u) \hat{\mu}_1(v) \hat{\mu}_2(q_2 v), \quad u, v \in Y. \quad (5)$$

Пусть $\lambda_j \in M^1(G)$ и $\sigma(\lambda_j) \subset A(G, H^{(q_j)})$, $j = 1, 2$. Тогда $\hat{\lambda}_j(u + q_j v) = \hat{\lambda}_j(u)$ при $u, v \in H$ и характеристические функции $\hat{\lambda}_j(y)$ удовлетворяют

уравнению (5) при $u, v \in H$. Так же, как и в случае А, определяем функции $g_j(y)$ по формулам (3) и распределения $\mu_j \in M^1(X)$.

Проверим, что характеристические функции $\hat{\mu}_j(y)$ удовлетворяют уравнению (5), а значит, линейные статистики L_1 и L_2 независимы. Рассуждаем так же, как в случае А. Если $u, v \in H$, то (5) выполнено. Пусть $u \notin H$. Тогда правая часть в (5) равна нулю. Если при этом левая часть в (5) отлична от нуля, то

$$q_1 u + v \in H \quad \text{и} \quad u + q_2 v \in H.$$

Отсюда получаем $su \in H$, а значит, $u \in H$, что противоречит выбору u . Поэтому и левая часть в (5) равна нулю. Случай $v \notin H$ рассматривается аналогично. Поскольку λ_j можно выбрать таким образом, чтобы μ_1, μ_2 не принадлежали $\Gamma(X) * I(X)$, то требуемое утверждение в случае В доказано. Тем самым, утверждение теоремы 1 в случае 1 полностью доказано.

Случай 2: $|pq| = 1$. Пусть для определенности $p = 1$. Тогда $q = -1$ и линейные статистики L_1 и L_2 имеют вид $L_1 = \xi_1 + \xi_2$, $L_2 = \xi_1 - \xi_2$. Как доказано в [20], если $f_2 \in \text{Aut}(X)$, то из независимости L_1 и L_2 следует, что $\mu_1, \mu_2 \in \Gamma(X) * I(X)$. Если же $f_2 \notin \text{Aut}(X)$, то существуют независимые случайные величины ξ_1, ξ_2 со значениями в X и с распределениями μ_1, μ_2 такие, что L_1 и L_2 независимы, а $\mu_1, \mu_2 \notin \Gamma(X) * I(X)$.

Случай 3: pq — простое. Пусть для определенности $p = 1$ и q — простое, т.е. $L_1 = \xi_1 + \xi_2$, $L_2 = \xi_1 + q\xi_2$. Функциональное уравнение (2) для характеристических функций $\hat{\mu}_j(y)$ принимает вид

$$\hat{\mu}_1(u+v)\hat{\mu}_2(u+qv) = \hat{\mu}_1(u)\hat{\mu}_2(u)\hat{\mu}_1(v)\hat{\mu}_2(qv), \quad u, v \in Y. \quad (6)$$

Имеются следующие возможности.

А. Либо $f_{s_j} \notin \text{Aut}(X)$ хотя бы при одном $s_j \neq 2$, либо $f_2 \notin \text{Aut}(X)$ и s делится на 4. Докажем, что тогда существуют независимые случайные величины ξ_1, ξ_2 со значениями в X и с распределениями μ_1, μ_2 такие, что L_1 и L_2 независимы, а $\mu_1, \mu_2 \notin \Gamma(X) * I(X)$. Пусть $f_{s_j} \notin \text{Aut}(X)$ при некотором $s_j \neq 2$. Тогда $Y^{(s_j)} \neq Y$. Возьмем $y_0 \notin Y^{(s_j)}$ и рассмотрим на группе X плотность $\rho(x) = 1 + \text{Re}(x, y_0) \geq 0$. Пусть $\mu_1, \mu_2 \in M^1(X)$ — распределения с плотностью $\rho(x)$ относительно m_X . Тогда

$$\hat{\mu}_j(y) = \begin{cases} 1, & y = 0, \\ 2^{-1}, & y = \pm y_0, \\ 0, & y \notin \{0, \pm y_0\}. \end{cases}$$

Проверим, что характеристические функции $\hat{\mu}_j(y)$ удовлетворяют уравнению (6). Очевидно, что достаточно проверить справедливость (6) при

$u \neq 0$, $v \neq 0$. Тогда правая часть в (6) равна нулю. Если левая часть в (6) отлична от нуля, то

$$u + v \in \{0, \pm y_0\} \quad \text{и} \quad u + qv \in \{0, \pm y_0\}.$$

Отсюда

$$sv \in \{0, \pm y_0 \pm 2y_0\}. \quad (7)$$

Поскольку 2 и s_j взаимно просты и $y_0 \notin Y^{(s_j)}$, то $2y_0 \notin Y^{(s_j)}$, а следовательно, выполнение (7) невозможно. Значит, левая часть в (6) также равна нулю.

Если $f_2 \notin \text{Aut}(X)$, то рассуждение совершенно аналогично. Нужно взять $y_0 \notin Y^{(2)}$, а невозможность выполнения (7) следует из того, что s делится на 4.

Итак, уравнение (6) выполнено при всех $u, v \in Y$. Следовательно, линейные статистики L_1 и L_2 независимы. По построению $\mu_1, \mu_2 \notin \Gamma(X) * I(X)$. Тем самым, требуемое утверждение в случае А доказано.

В. $f_s \in \text{Aut}(X)$. Докажем, что в этом случае по крайней мере одно из распределений μ_j принадлежит $\Gamma(X) * I(X)$. Для доказательства нам понадобятся несколько лемм.

Лемма 1. Пусть Y — произвольная абелева группа, $q \in \mathbf{Z}$, $q \neq 0$, $a(y)$ и $b(y)$ — функции на Y , удовлетворяющие уравнению

$$a(u+v)b(u+qv) = a(u)b(u)a(v)b(qv), \quad u, v \in Y, \quad (8)$$

и условиям

$$a(-y) = a(y), \quad b(-y) = b(y), \quad y \in Y. \quad (9)$$

Положим $s = 1 - q$. Если при некотором $y_0 \in Y^{(s)}$ выполнено $a(y_0)b(y_0) \neq 0$, то найдется такая подгруппа $M \subset Y$, что $a(y)b(y) \neq 0$ при $y \in M$.

Доказательство. Полагая в (8) сначала $u = -qy$, $v = y$, затем $u = y$, $v = -y$ и учитывая (9), получаем

$$a(sy) = a(qy)b^2(qy)a(y), \quad y \in Y, \quad (10)$$

$$b(sy) = a^2(y)b(y)b(qy), \quad y \in Y. \quad (11)$$

По условию $y_0 = sz_0$. Из (10) и (11) находим

$$a(z_0) \neq 0, \quad a(qz_0) \neq 0, \quad b(z_0) \neq 0, \quad b(qz_0) \neq 0. \quad (12)$$

Из (8), полагая вначале $u = z_0$, $v = kz_0$, а затем $u = qz_0$, $v = kz_0$, $k \in \mathbf{Z}$, получаем

$$a((k+1)z_0)b((kq+1)z_0) = a(z_0)b(z_0)a(kz_0)b(kqz_0), \quad (13)$$

$$a((q+k)z_0)b((k+1)qz_0) = a(qz_0)b(qz_0)a(kz_0)b(kqz_0). \quad (14)$$

Учитывая (12), из (13) и (14) по индукции получаем, что $a(kz_0) \neq 0$, $b(kqz_0) \neq 0$, $k \in \mathbf{Z}$. Подгруппа $M = \{kqz_0\}_{k \in \mathbf{Z}}$ является искомой. Лемма 1 доказана.

Лемма 2. Пусть M — произвольная абелева группа, функции $a(y)$ и $b(y)$ определены на M , удовлетворяют уравнению (8), условиям (9) и

$$0 < a(y) \leq 1, \quad 0 < b(y) \leq 1, \quad a(0) = b(0) = 1. \quad (15)$$

Положим $s = 1 - q$. Тогда на подгруппе $M^{(sq)}$ имеют место представления

$$a(y) = \exp\{-\varphi_1(y)\}, \quad b(y) = \exp\{-\varphi_2(y)\},$$

где $\varphi_j(y) \geq 0$ и $\varphi_j(y)$ удовлетворяют уравнению (1).

Следствие 1. Пусть в условиях леммы 2 M — подгруппа в $\mathbf{Q}$. Тогда имеют место представления

$$a(y) = e^{-\sigma_1 y^2}, \quad b(y) = e^{-\sigma_2 y^2}, \quad \sigma_1 \geq 0, \quad \sigma_2 \geq 0, \quad y \in M^{(sq)}. \quad (16)$$

Доказательство леммы 2. Положим $\varphi_1(y) = -\ln a(y)$, $\varphi_2(y) = -\ln b(y)$. Из (8) получаем

$$\varphi_1(u+v) + \varphi_2(u+qv) = A(u) + B(v), \quad u, v \in M, \quad (17)$$

где $A(u) = \varphi_1(u) + \varphi_2(u)$, $B(v) = \varphi_1(v) + \varphi_2(qv)$. Применим для решения уравнения (17) метод конечных разностей. Пусть $h \in M$. Для произвольной функции $g(y)$ на M положим

$$\Delta_h g(y) = g(y+h) - g(y).$$

Придадим u и v в (17) приращения h_1 и k_1 соответственно, причем так, чтобы выполнялось равенство $h_1 + qk_1 = 0$. Вычитая уравнение (17) из полученного уравнения, находим

$$\varphi_1(u+v+l_1) - \varphi_1(u+v) = \Delta_{h_1} A(u) + \Delta_{k_1} B(v), \quad (18)$$

где $l_1 = sk_1$. Полагая в (18) $v = 0$ и вычитая из (18) полученное равенство, имеем

$$\varphi_1(u+v+l_1) - \varphi_1(u+v) - \varphi_1(u+l_1) + \varphi_1(u) = \Delta_{k_1} B(v) - \Delta_{k_1} B(0). \quad (19)$$

Положим здесь $v = l_1$ и отметим, что l_1 — произвольный элемент подгруппы $M^{(s)}$. Из (19) получаем

$$\Delta_{l_1}^2 \varphi_1(u) = \varepsilon_1(l_1), \quad u \in M, \quad l_1 \in M^{(s)}, \quad (20)$$

где $\varepsilon_1(y)$ — некоторая функция на $M^{(s)}$. Из (20) находим

$$\Delta_{l_1}^3 \varphi_1(u) = 0, \quad u, l_1 \in M^{(s)}. \quad (21)$$

Учитывая (9) и (15), из (21) легко получаем, что $\varphi_1(y) \geq 0$ и $\varphi_1(y)$ удовлетворяет уравнению (1).

Рассуждая аналогично, мы приходим к следующему уравнению для функции $\varphi_2(y)$:

$$\varphi_2(u + qv + l_2) - \varphi_2(u + qv) - \varphi_2(u + l_2) + \varphi_2(u) = \Delta_{k_2} B(v) - \Delta_{k_2} B(0), \quad (22)$$

где $l_2 = -sk_2$. Рассмотрим уравнение (22), предполагая, что $k_2 \in M^{(q)}$. Тогда l_2 — произвольный элемент подгруппы $M^{(sq)}$ и можно положить $qv = l_2$. В результате получаем

$$\Delta_{l_2}^2 \varphi_2(u) = \varepsilon_2(l_2), \quad u \in M, \quad l_2 \in M^{(sq)}, \quad (23)$$

где $\varepsilon_2(l_2)$ — некоторая функция на $M^{(sq)}$. Из (23) получаем

$$\Delta_{l_2}^3 \varphi_2(u) = 0, \quad u, l_2 \in M^{(sq)}. \quad (24)$$

Учитывая (9) и (15), из (24) легко получаем, что $\varphi_2(y) \geq 0$ и $\varphi_2(y)$ удовлетворяет уравнению (1). Лемма 2 доказана.

Перейдем теперь к рассмотрению случая В. Очевидно, что характеристические функции распределений $\bar{\mu}_j$ также удовлетворяют уравнению (6). Поэтому уравнению (6) удовлетворяют и характеристические функции распределений $\nu_j = \mu_j * \bar{\mu}_j$. При этом $\hat{\nu}_j(y) = |\hat{\mu}_j(y)|^2 \geq 0$, $j = 1, 2$. Положим $a(y) = \hat{\nu}_1(y)$, $b(y) = \hat{\nu}_2(y)$. Очевидно, что функции $a(y)$ и $b(y)$ удовлетворяют уравнению (8) и условиям (9).

Предположим вначале, что при любом $y \in Y$, $y \neq 0$ выполнено $a(y)b(y) = 0$. Из (10) тогда следует, что $a(sy) = 0$ при любом $y \in Y$, $y \neq 0$. Поскольку $f_s \in \text{Aut}(X)$, то $a(y) = 0$ при любом $y \in Y$, $y \neq 0$. Следовательно, $\nu_1 = m_X$, а значит и $\mu_1 = m_X$. Аналогично из (11) получаем, что $\mu_2 = m_X$.

Предположим теперь, что при некотором $y_0 \in Y$, $y_0 \neq 0$ выполнено $a(y_0)b(y_0) \neq 0$. Рассмотрим отдельно два случая: $q > 0$ и $q < 0$.

(i): $q > 0$. Поскольку $Y^{(s)} = Y$, мы можем применить лемму 1 и получить подгруппу $M \subset Y$, на которой $a(y)b(y) \neq 0$. Сужения характеристических функций $a(y)$ и $b(y)$ на M удовлетворяют условиям следствия 1. Поэтому на $M^{(sq)}$ мы имеем представление (16). Подставляя (16) в (8), получаем $\sigma_1 + q\sigma_2 = 0$. Следовательно, $\sigma_1 = \sigma_2 = 0$. Таким образом, на подгруппе $M^{(sq)}$ выполнено: $a(y) = b(y) = 1$. Обозначим $E = \{y \in Y: a(y) = b(y) = 1\}$. Тогда E — ненулевая подгруппа в Y и при любых $y \in Y$, $h \in E$ справедливы равенства

$$a(y + h) = a(y), \quad b(y + h) = b(y).$$

Поэтому мы можем перейти от уравнения (8) на Y к индуцированному уравнению на фактор-группе $L = Y/E$. Сохраним обозначения $a(y)$ и

$b(y)$ для индуцированных функций. Отметим, что

$$\{y \in L: a(y) = b(y) = 1\} = \{0\}. \quad (25)$$

Из (11) следует, что f_s — мономорфизм на L . Поскольку L — периодическая группа, то $f_s \in \text{Aut}(L)$.

Из (10) вытекает, что

$$a(sy) \leq a(y), \quad y \in L. \quad (26)$$

Так как любой элемент группы L имеет конечный порядок, то для любого $y \in L$ выполнено $s^n y = y$ при некотором натуральном n , зависящем, вообще говоря, от y . Из (26) тогда следует, что

$$a(y) = a(s^n y) \leq \dots \leq a(sy) \leq a(y), \quad y \in L.$$

Таким образом, на каждой орбите $\{y, sy, \dots, s^{n-1}y\}$ функция $a(y)$ принимает постоянное значение. Из (11) вытекает аналогичное утверждение для $b(y)$.

Предположим, что в некоторой точке $y_0 \in L$, $y_0 \neq 0$ выполнено $a(y_0) \neq 0$. Тогда $a(sy_0) = a(y_0) \neq 0$ и из (10) получаем

$$a(qy_0) = b(qy_0) = 1. \quad (27)$$

Из (25) и (27) следует, что $qy_0 = 0$. Аналогично, из (11) находим, что если $b(y_0) \neq 0$, $y_0 \in L$, $y_0 \neq 0$, то $a(y_0) = b(qy_0) = 1$, и значит, (27) также выполнено. Заметим теперь, что любая фактор-группа группы Y , в частности L , содержит не более одной подгруппы $A \approx \mathbf{Z}(q)$. Пусть A — подгруппа в L , порожденная элементом y_0 . Рассмотрим сужение уравнения (8) на A . Учитывая, что $qy = 0$ для любого $y \in A$, получаем

$$a(u+v)b(u) = a(u)b(u)a(v), \quad u, v \in A. \quad (28)$$

Если в некоторой точке $u_0 \in A$, $u_0 \neq 0$ выполнено $b(u_0) \neq 0$, то из (28) следует, что

$$a(u_0 + v) = a(u_0)a(v), \quad v \in A.$$

Полагая здесь $v = (q-1)u_0$, получаем $a(u_0) = 1$, а поскольку q — простое число, то $a(y) \equiv 1$, $y \in A$. Если же $b(y) = 0$ при любом $y \in A$, $y \neq 0$, то, очевидно, функция $a(y)$ может быть произвольной. Тем самым, доказано, что либо

$$a(y) = \begin{cases} 1, & y \in A, \\ 0, & y \notin A, \end{cases} \quad (29)$$

либо

$$b(y) = \begin{cases} 1, & y = 0, \\ 0, & y \neq 0. \end{cases} \quad (30)$$

Возвращаясь от индуцированных функций на L к функциям $a(y)$ и $b(y)$ на Y , получаем, что либо $\nu_1 \in I(X)$, либо $\nu_2 \in I(X)$, а значит, либо $\mu_1 \in I(X)$, либо $\mu_2 \in I(X)$.

Если же в любой точке $y_0 \in L$, $y_0 \neq 0$ выполнено $a(y_0) = b(y_0) = 0$, то справедливо представление (29) для функции $a(y)$, где $A = \{0\}$, и представление (30) для функции $b(y)$. В этом случае, очевидно, $\mu_1, \mu_2 \in I(X)$. Случай $q > 0$, таким образом, полностью исследован.

(ii): $q < 0$. Нам понадобятся для дальнейшего следующие леммы.

Лемма 3 ([21]). Пусть X — локально компактная сепарабельная абелева метрическая группа, не содержащая подгруппы, топологически изоморфной $\mathbf{T}$, $\mu \in \Gamma(X)$, $\mu = \mu_1 * \mu_2$, где $\mu_j \in M^1(X)$. Тогда $\mu_j \in \Gamma(X)$, $j = 1, 2$.

Лемма 4. Пусть $X = \Sigma_a$, $\mu \in M^1(X)$ и $\nu = \mu_1 * \bar{\mu}$. Тогда, если $\nu = \gamma * t_K$, где $\gamma \in \Gamma(X)$, а $A(Y, K) \not\approx \mathbf{Z}$, то $\mu \in \Gamma(X) * I(X)$.

Доказательство. Обозначим $L = A(Y, K)$. Сужение характеристической функции $\hat{\nu}(y)$ на L является характеристической функцией некоторого гауссовского распределения на фактор-группе X/K . Поскольку $L \not\approx \mathbf{Z}$, то $X/K \not\approx \mathbf{T}$. Очевидно также, что фактор-группа X/K не может содержать подгруппы, топологически изоморфной $\mathbf{T}$. Из леммы 3 тогда следует, что сужение характеристической функции $\hat{\mu}(y)$ на L является характеристической функцией некоторого гауссовского распределения. Следовательно, мы имеем представление

$$\hat{\mu}(y) = \begin{cases} ([x_0], y) \exp\{-\varphi(y)\}, & y \in L, \\ 0, & y \notin L, \end{cases} \quad (31)$$

где $[x_0] \in X/K$, а $\varphi(y) = \sigma y^2$. Функция $\varphi(y)$ естественным образом продолжается с L на Y . Возьмем $x_0 \in [x_0]$ и рассмотрим распределение $\lambda \in \Gamma(X)$ с характеристической функцией

$$\hat{\lambda}(y) = (x_0, y) \exp\{-\varphi(y)\}, \quad y \in Y.$$

Из (31) следует, что $\mu = \lambda * t_K$. Лемма 4 доказана.

Лемма 5. Пусть Y — подгруппа в $\mathbf{Q}$, F — подгруппа в Y . Рассмотрим $\mathbf{Q}$ как подгруппу в $\mathbf{R}$. Предположим, что подгруппа F плотна в $\mathbf{R}$ в топологии $\mathbf{R}$, т.е. в топологии, индуцированной на F обычной топологией $\mathbf{R}$. Пусть $g(y)$ — положительно определенная функция на Y такая, что ее сужение на F — непрерывная функция в топологии $\mathbf{R}$. Тогда:

- (а) для любого $u \in Y$ сужение функции $g(y)$ на класс смежности $u + F$ является равномерно непрерывной функцией в топологии $\mathbf{R}$;
- (б) для любого $u \in Y$ существует предел

$$g_u = \lim_{y \rightarrow 0, y \in u + F} g(y);$$

(с) если при некотором $u \in Y$ выполнено $g_u = 1$, то функция $g(y)$ будет равномерно непрерывной в топологии $\mathbf{R}$ на подгруппе V , порожденной u и F .

Доказательство. Утверждение (а) следует из неравенства

$$|h(u) - h(v)|^2 \leq 2(1 - \operatorname{Re} h(u - v)), \quad (32)$$

справедливого для любой положительно определенной функции $h(y)$. Утверждение (b) непосредственно вытекает из (а). Для доказательства (с) воспользуемся неравенством

$$1 - \operatorname{Re} h(u + v) \leq 2[(1 - \operatorname{Re} h(u)) + (1 - \operatorname{Re} h(v))], \quad (33)$$

также справедливым для произвольной положительно определенной функции $h(y)$. Из (33) следует, что если $g_u = 1$, то $g_v = 1$ для любого $v \in V$. Поскольку фактор-группа V/F конечна, то равномерная непрерывность сужения функции $g(y)$ на V вытекает из (32). Лемма 5 доказана.

Перейдем теперь к рассмотрению случая $q < 0$. Из (11) вытекает, что при любом натуральном m выполнено

$$a\left(\frac{y_0}{s^m}\right)b\left(\frac{y_0}{s^m}\right) \neq 0.$$

Из доказательства леммы 1 следует, что $a(y)b(y) \neq 0$ на подгруппе $y_0H^{(q)}$, а тогда по следствию 1 на подгруппе $y_0H^{(q^2)}$ имеет место представление (16). Пусть F — максимальная подгруппа в Y , содержащая $y_0H^{(q^2)}$, на которой имеет место представление (16). Поскольку $F \not\approx \mathbf{Z}$, то F плотна в $\mathbf{R}$ в топологии $\mathbf{R}$. Из (16) по лемме 5, примененной к функциям $a(y)$ и $b(y)$, следует, что для любого $u \in Y$ существуют пределы

$$a_u = \lim_{y \rightarrow 0, y \in u+F} a(y), \quad b_u = \lim_{y \rightarrow 0, y \in u+F} b(y).$$

Заметим теперь, что полученные функции a_u и b_u по построению принимают постоянные значения на каждом классе смежности $u + F$ и определяют поэтому некоторые функции $a_{[u]}$ и $b_{[u]}$ на фактор-группе $L = Y/F$. Функции $a_{[u]}$ и $b_{[u]}$, очевидно, удовлетворяют уравнению (8) и условиям (9), а значит, и уравнениям (10) и (11). Поскольку F — максимальная подгруппа в Y , на которой имеет место представление (16), то в силу утверждения (с) леммы 5

$$\{[u] \in L: a_{[u]} = b_{[u]} = 1\} = \{0\},$$

что является аналогом (25). Поскольку L — периодическая группа, то из (11) и леммы 3 вытекает, что $f_s \in \operatorname{Aut}(L)$. Повторяя теперь доказательство для случая (i), мы получаем либо представление (29) для функции $a_{[u]}$, либо представление (30) для функции $b_{[u]}$.

Заметим теперь, что если $a_{[u]} = 0$ при любом $[u] \notin A$, то $a(y) = 0$ при любом $y \notin f_q^{-1}(F)$. Действительно, подставим в (8) $u \in F$, $v_0 \notin f_q^{-1}(F)$. Учитывая (16), получаем

$$a(u + v_0)b(u + qv_0) = e^{-\sigma_1 u^2 - \sigma_2 q^2 u^2} a(v_0)b(qv_0).$$

Перейдем здесь к пределу при $u \rightarrow -v_0$, $u \in F$. Поскольку $[v_0] \notin A$, мы имеем

$$0 = e^{-\sigma_1 v_0^2 - \sigma_2 q^2 v_0^2} a(v_0)b(qv_0),$$

а значит, $a(v_0)b(qv_0) = 0$. Из (10) тогда следует, что $a(sv_0) = 0$. Заметим теперь, что $f_s \in \text{Aut}(F)$. Действительно, из (11) по лемме 3 следует, что на подгруппе $f_s^{-1}(F)$ справедливо представление (16). Значит, $f_s^{-1}(F) = F$, поскольку F — максимальная подгруппа в Y , на которой справедливо (16). А тогда $f_s(F) = F$, что эквивалентно $f_s \in \text{Aut}(F)$. Отсюда следует, что f_s взаимно однозначно отображает множество $f_q^{-1}(F)$ в себя. Поэтому из равенства $a(sv) = 0$ при любом $v \notin f_q^{-1}(F)$ следует, что $a(v) = 0$ при любом $v \notin f_q^{-1}(F)$. В результате из представления (29) для функции $a_{[u]}$ получаем

$$a(y) = \begin{cases} e^{-\sigma_1 y^2}, & y \in f_q^{-1}(F), \\ 0, & y \notin f_q^{-1}(F). \end{cases} \quad (34)$$

Рассуждая аналогично, убеждаемся, что если $b_{[u]} = 0$ при любом $[u] \neq 0$, то $b(y) = 0$ при любом $y \notin F$. А тогда из представления (30) для функции $b_{[u]}$ следует представление

$$b(y) = \begin{cases} e^{-\sigma_2 y^2}, & y \in F, \\ 0, & y \notin F. \end{cases} \quad (35)$$

Таким образом, по крайней мере одно из распределений ν_j принадлежит $\Gamma(X) * I(X)$, а тогда по лемме 4 и соответствующее распределение μ_j принадлежит $\Gamma(X) * I(X)$. Случай В в целом полностью исследован.

С. $f_{s_j} \in \text{Aut}(X)$ при всех $s_j \neq 2$, $f_2 \notin \text{Aut}(X)$ и s не делится на 4. Докажем, что этом случае по крайней мере одно из распределений μ_j принадлежит $\Gamma(X) * I(X)$. Поскольку s делится на 2 и не делится на 4, то $q = 4k - 1$, $k \in \mathbf{Z}$. Пусть, как и в случае В, $\nu_j = \mu_j * \bar{\mu}_j$, $j = 1, 2$, $a(y) = \hat{\nu}_1(y)$, $b(y) = \hat{\nu}_2(y)$. Имеются две возможности.

(i). Предположим, что выполнено

$$a(y)b(y) = 0, \quad y \in Y^{(2)}, \quad y \neq 0. \quad (36)$$

Полагая в (8) сначала $u = qy$, $v = y$, затем $u = v = y$ и учитывая (10) и (11), получаем

$$a(sy) = a((q+1)y)b(2qy), \quad y \in Y, \quad (37)$$

$$b(sy) = a(2y)b((q+1)y), \quad y \in Y. \quad (38)$$

Поскольку $s = 2 - 4k$, то из (37) и (38) следует

$$a((1 - 2k)y) = a(2ky)b(qy), \quad y \in Y, \quad (39)$$

$$b((1 - 2k)y) = a(y)b(2ky), \quad y \in Y. \quad (40)$$

Отсюда

$$a((1 - 2k)y)b((1 - 2k)y) = a(2ky)b(2ky)a(y)b(qy), \quad y \in Y. \quad (41)$$

Поскольку $1 - 2k$ — делитель s , то $f_{1-2k} \in \text{Aut}(X)$ и из (41) и (36) следует, что $a(y)b(y) = 0$ при любом $y \in Y$, $y \neq 0$. Но тогда из (10) и (11) вытекает, что $a(y) = b(y) = 0$ при любом $y \in Y^{(2)}$, $y \neq 0$. Из (39) и (40) следует, что $\nu_1 = \nu_2 = m_X$, а значит, $\mu_1 = \mu_2 = m_X$.

(ii). Предположим, что (36) не выполнено, т.е. $a(y_0)b(y_0) \neq 0$ при некотором $y_0 \in Y^{(2)}$, $y_0 \neq 0$. При $q > 0$ без изменений проходит доказательство для случая В(i), так как из равенства $Y^{(s)} = Y^{(2)}$ следует, что функции $a(y)$ и $b(y)$ удовлетворяют условиям леммы 1.

При $q < 0$ доказательство проводится по схеме доказательства для случая В(ii), но требует некоторых пояснений, поскольку $f_s \notin \text{Aut}(X)$. Мы сохраним обозначения, использованные при доказательстве случая В(ii).

Для доказательства того, что существует подгруппа $W \not\approx \mathbf{Z}$, на которой справедливо представление (16), рассуждаем следующим образом. Пусть на подгруппе M , порожденной некоторым элементом ζ , выполнено $a(y)b(y) \neq 0$ (существование такой подгруппы гарантировано леммой 1). Подставим в (8)

$$u = \frac{l}{1 - 2k}\zeta, \quad v = \left(1 - \frac{l}{1 - 2k}\right)\zeta, \quad l \in \mathbf{Z}.$$

При этих u и v выполнено $u + v, u + qv \in M$. Следовательно, левая часть в (8) отлична от нуля. Значит, $a(l(1 - 2k)^{-1}\zeta)b(l(1 - 2k)^{-1}\zeta) \neq 0$. Поскольку $f_{1-2k} \in \text{Aut}(X)$, то мы получаем, что на подгруппе $S = \zeta H$ выполнено $a(y)b(y) \neq 0$. Так как $q \neq -1$, то $H \not\approx \mathbf{Z}$, а значит, и $S \not\approx \mathbf{Z}$. Далее доказательство проводится без изменений так же, как и в случае В(ii), и мы получаем либо представление (29) для функции $a_{[u]}$, либо представление (30) для функции $b_{[u]}$.

Чтобы получить искомые представления, (34) для функции $a(y)$ или (35) для функции $b(y)$, достаточно убедиться, что если $a(sy) = 0$ при всех $y \notin f_q^{-1}(F)$, то $a(y) = 0$, $y \notin f_q^{-1}(F)$, а также что если $b(sy) = 0$ при всех $y \notin F$, то $b(y) = 0$, $y \notin F$.

Мы ограничимся рассуждением для функции $a(y)$. Для функции $b(y)$ доказательство аналогично. Пусть $y_0 \notin f_q^{-1}(F)$. Рассмотрим соответствующий класс смежности $y_0 + F$ и отметим, что $q[y_0] \neq 0$. Поскольку $f_s \in \text{Aut}(L)$, то

$$s[y'] = [y_0] \quad (42)$$

при некотором $[y'] \in L$. Легко видеть, что $y' \notin f_q^{-1}(F)$, так как в противном случае было бы выполнено равенство $q[y'] = 0$ и, учитывая (42), мы имели бы равенство $[y'] = [y_0]$, что противоречит выбору y_0 . Из (42) следует, что $sy' = y_0 + h$, $h \in F$. Но тогда при любом $h' \in F$ выполнено $s(y' + h') \in y_0 + F$. Поскольку $F \not\approx \mathbf{Z}$, то множество $s(y' + F)$ плотно в $y_0 + F$ в топологии $\mathbf{R}$. Функция $a(y)$ равномерно непрерывна на $y_0 + F$ в топологии $\mathbf{R}$ и по условию $a(s(y' + h')) = 0$ при любом $h' \in F$. Значит, $a(y) \equiv 0$, $y \in y_0 + F$, в частности, $a(y_0) = 0$. Требуемое утверждение в случае (ii) доказано, а значит, доказано и утверждение теоремы 1 в случае 3. Тем самым, теорема 1 полностью доказана.

З а м е ч а н и е 1. Рассуждение, проведенное при рассмотрении случая 3, показывает, что в случаях 3В и 3С у уравнения (6) всегда существуют такие решения $\hat{\mu}_j(y)$, где одно из распределений μ_j не принадлежит $\Gamma(X) * I(X)$. Следовательно, утверждение теоремы 1 в случаях 3В и 3С не может быть усилено.

З а м е ч а н и е 2. Пусть X — связная локально компактная сепарабельная абелева метрическая группа, ξ_1, ξ_2 — независимые случайные величины со значениями в X и с распределениями μ_1, μ_2 . Как доказано в [20], условие

$$(i) \quad f_2 \in \text{Aut}(X)$$

является необходимым и достаточным для того, чтобы из независимости линейных статистик $L_1 = \xi_1 + \xi_2$ и $L_2 = \xi_1 - \xi_2$ следовало, что $\mu_1, \mu_2 \in \Gamma(X) * I(X)$. Из теоремы 1 вытекает, что справедливы следующие утверждения:

(α) для $\mathbf{a}$ -адического соленоида $X = \Sigma_{\mathbf{a}}$ условие (i) является необходимым для того, чтобы существовали автоморфизмы $\alpha_j, \beta_j \in \text{Aut}(X)$ такие, что из независимости линейных статистик $L_1 = \alpha_1 \xi_1 + \alpha_2 \xi_2$ и $L_2 = \beta_1 \xi_1 + \beta_2 \xi_2$ следует, что $\mu_1, \mu_2 \in \Gamma(X) * I(X)$;

(β) если для $\mathbf{a}$ -адического соленоида $X = \Sigma_{\mathbf{a}}$ условие (i) выполнено, то не существует линейных статистик, отличных от $L_1 = \xi_1 + \xi_2$ и $L_2 = \xi_1 - \xi_2$, независимость которых влечет, что $\mu_1, \mu_2 \in \Gamma(X) * I(X)$.

Утверждения (α) и (β), вообще говоря, неверны для произвольных связных компактных абелевых групп. Для построения соответствующего контрпримера к утверждению (α) положим $X = X_1 \times X_2$, где $X_j = \Sigma_{\mathbf{a}_j}$, $\mathbf{a}_1 = (2, 2, \dots)$, $\mathbf{a}_2 = (3, 3, \dots)$. Очевидно, что группа X связна и $f_2 \notin \text{Aut}(X)$. Пусть $\alpha \in \text{Aut}(X)$, $\alpha(x_1, x_2) = (-x_1, x_2)$, $x_j \in X_j$ и ξ_j — независимые случайные величины со значениями в X и с распределениями μ_j . Проверим, что если $L_1 = \xi_1 + \xi_2$ и $L_2 = \xi_1 + \alpha \xi_2$ независимы, то $\mu_1, \mu_2 \in \Gamma(X) * I(X)$.

Действительно, независимость L_1 и L_2 эквивалентна тому, что ха-

рактеристические функции $\hat{\mu}_j(y)$ удовлетворяют уравнению

$$\hat{\mu}_1(u+v)\hat{\mu}_2(u+\tilde{\alpha}v) = \hat{\mu}_1(u)\hat{\mu}_2(u)\hat{\mu}_1(v)\hat{\mu}_2(\tilde{\alpha}v), \quad u, v \in Y, \quad (43)$$

где $\tilde{\alpha}(y_1, y_2) = (-y_1, y_2)$, $y_j \in Y_j = X_j^*$. Положим $\nu_j = \mu_j * \bar{\mu}_j$. Тогда $\hat{\nu}_j(y) \geq 0$ и характеристические функции $\hat{\nu}_j(y)$ также удовлетворяют уравнению (43). Рассмотрим сужение уравнения (43) для функций $\hat{\nu}_j(y)$ на подгруппу Y_2 . Получаем

$$\hat{\nu}_1(u+v)\hat{\nu}_2(u+v) = \hat{\nu}_1(u)\hat{\nu}_2(u)\hat{\nu}_1(v)\hat{\nu}_2(v), \quad u, v \in Y_2. \quad (44)$$

Положим $g(y) = \hat{\nu}_1(y)\hat{\nu}_2(y)$. Из (44) тогда вытекает, что $g(y) \equiv 1$, $y \in Y_2$. Следовательно, и $\hat{\nu}_j(y) \equiv 1$, $y \in Y_2$, $j = 1, 2$, а значит, $\sigma(\nu_j) \subset A(X, Y_2) = X_1$. Распределения μ_j в таком случае можно заменить их сдвигами μ'_j так, что $\sigma(\mu'_j) \subset X_1$. Характеристические функции распределений μ'_j , очевидно, также удовлетворяют уравнению (43). Поскольку $\hat{\mu}_j(y+h) = \hat{\mu}_j(y)$ для любых $y \in Y$, $h \in Y_2$, то достаточно решить уравнение (43), считая, что $u, v \in Y_1$. Но на Y_1 уравнение (43) принимает вид

$$\hat{\mu}'_1(u+v)\hat{\mu}'_2(u-v) = \hat{\mu}'_1(u)\hat{\mu}'_2(u)\hat{\mu}'_1(v)\hat{\mu}'_2(-v), \quad u, v \in Y_1. \quad (45)$$

Поскольку $f_2 \in \text{Aut}(X_1)$, то из (45) следует, что $\mu'_j \in \Gamma(X_1) * I(X_1)$ (см. [20]), а значит, и $\mu_j \in \Gamma(X) * I(X)$.

Если в приведенном выше рассуждении в качестве X взять $X = X_1^2$, то мы получим контрпример к утверждению (β) .

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Скутович В. П. Об одном свойстве нормального распределения. — Докл. АН СССР, 1953, т. 89, с. 217–219.
2. Darmois G. Analyse générale des liaisons stochastiques. — Rev. Inst. Internat. Statistique, 1953, v. 21, p. 2–8.
3. Ghurye S. G., Olkin I. A characterization of the multivariate normal distribution. — Ann. Math. Statist., 1962, v. 33, p. 533–541.
4. Каган А. М., Линник Ю. В., Пас С. Р. Характеризационные задачи математической статистики. М.: Наука, 1972, 656 с.
5. Фельдман Г. М. Характеризация гауссовского распределения на группах независимостью линейных статистик. — Сиб. матем. журн., 1990, т. 31, № 2, с. 180–190.
6. Фельдман Г. М. К теореме Скутовича–Дармуа на абелевых группах. — Теория вероятн. и ее примен., 1992, т. 37, в. 4, с. 695–708.
7. Фельдман Г. М. Теорема Скутовича–Дармуа для компактных групп. — Теория вероятн. и ее примен., 1996, т. 41, в. 4, с. 901–906.
8. Фельдман Г. М. Теорема Скутовича–Дармуа для дискретных периодических абелевых групп. — Теория вероятн. и ее примен., 1997, т. 42, в. 4, с. 747–756.
9. Фельдман Г. М. К теореме Скутовича–Дармуа для конечных абелевых групп. — Теория вероятн. и ее примен., 2000, т. 45, в. 3, с. 603–607.
10. Feldman G. M., Graczyk P. On the Skitovich–Darmois theorem on compact Abelian groups. — J. Theoret. Probab., 2000, v. 13, № 3, p. 859–869.

11. *Feldman G. M.* A characterization of the Gaussian distribution on Abelian groups. — *Probab. Theory Related Fields*, 2003, v. 126, № 1, p. 91–102.
12. *Фельдман Г. М., Грачик П.* К теореме Скитовича–Дармуа для дискретных абелевых групп. — *Теория вероятн. и ее примен.*, 2004, т. 49, в. 3, с. 596–601.
13. *Миронюк М. В., Фельдман Г. М.* Независимые линейные статистики на двумерном торе. — *Теория вероятн. и ее примен.*, 2007, т. 52, в. 1, с. 3–20.
14. *Fel'dman G. M.* Arithmetic of Probability Distributions, and Characterization Problems on Abelian Groups. Providence: Amer. Math. Soc., 1993, 223 p. (Transl. Math. Monogr., v. 116.)
15. *Kagan A., Wesolowski J.* An extension of the Darmois–Skitovitch theorem to a class of dependent random variables. — *Statist. Probab. Lett.*, 2000, v. 47, № 1, p. 69–73.
16. *Baryshnikov Y., Eisenberg B., Stadje W.* Independent variables with independent sum and difference: S^1 -case. — *J. Multivariate Anal.*, 1993, v. 45, № 2, p. 161–170.
17. *Parthasarathy K. R., Ranga Rao R., Varadhan S. R. S.* Probability distributions on locally compact Abelian groups. — *Illinois J. Math.*, 1963, v. 7, p. 337–369.
18. *Хьюитт Э., Росс К.* Абстрактный гармонический анализ, т. 1. М.: Наука, 1975, 656 с.
19. *Хьюитт Э., Росс К.* Абстрактный гармонический анализ, т. 2. М.: Мир, 1975, 901 с.
20. *Фельдман Г. М.* Гауссовские распределения в смысле Бернштейна на группах. — *Теория вероятн. и ее примен.*, 1986, т. 31, в. 1, с. 47–58.
21. *Фельдман Г. М.* О разложении гауссовского распределения. — *Теория вероятн. и ее примен.*, 1977, т. 22, в. 1, с. 136–143.

Поступила в редакцию
21.VI.2007