Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

П. А. Яськов, Оценка скорости сходимости в слабом законе больших чисел для процессов эпидемий, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2009, том 54, выпуск 3, 533–550

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp2808>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.166.219.16

26 апреля 2023 г., 10:13:11

© 2009 г.

ЯСЬКОВ П. А.*

**ОЦЕНКА СКОРОСТИ СХОДИМОСТИ В СЛАБОМ ЗАКОНЕ
БОЛЬШИХ ЧИСЕЛ ДЛЯ ПРОЦЕССОВ ЭПИДЕМИЙ**

Рассматривается модель General Stochastic Epidemic с немарковским характером развития. В начальный момент население численностью K человек состоит из $[aK]$ зараженных некоторой инфекцией и $K - [aK]$ здоровых, но подозреваемых на возможность заболевания в будущем; здесь $a \in [0, 1]$. Предполагается, что изначально инфицированный индивид i выздоравливает через случайное время $\hat{r}_i$, а подозреваемый на инфекцию индивид j , заболевающий в (случайный) момент A_j^K , — через случайное время r_j . Выздоровевший человек приобретает иммунитет и больше не заболевает. В данной работе для эмпирической меры, характеризующей средний путь развития эпидемии, установлена оценка расстояния в идеальной метрике до слабого неслучайного предела (когда $K \rightarrow \infty$), уточняющая результаты Рейнерта. Полученная оценка явным образом зависит от времени наблюдения за эпидемией и численности населения.

Ключевые слова и фразы: процесс эпидемии, слабый закон больших чисел, модель GSE.

1. Введение. Имеются различные стохастические модели, описывающие развитие инфекционных заболеваний (эпидемий), см., например, [1]–[3]. Интерес к этой области исследований обусловлен возможностью не только строить и исследовать нетривиальные модели, но и делать выводы для приложений на практике, см., например, [4], [5].

В данной работе рассматривается обобщение модели General Stochastic Epidemic (GSE), восходящей к [1], которое было предложено в [6]. А именно, пусть имеется население, состоящее из K человек, причем в начальный момент времени $a_K K = [aK]$ из них заражено некоторой инфекцией, а остальные $b_K K = K - [aK]$ здоровы, но подозреваются на возможность заболевания в будущем; здесь $a \in [0, 1]$, $[\cdot]$ — целая часть числа. Будем считать, что изначально инфицированный индивид i ($i = 1, \dots, a_K K$) выздоравливает через случайное время $\hat{r}_i$,

*Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, механико-математический факультет, Ленинские горы 1, 119992 Москва, Россия; e-mail: yaskov.pavel@mail.ru

¹⁾ Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 03-01-00373).

а подозреваемый на инфекцию индивид j ($j = 1, \dots, b_K K$) заболевает в случайный момент A_j^K , когда некоторый функционал, характеризующий сопротивляемость организма, достигает индивидуального критического уровня l_j , и процесс его излечения занимает случайное время r_j . Выздоровевший человек приобретает иммунитет и больше не заболевает. Следуя [7], для описания эпидемии введем следующую конструкцию. Рассмотрим плоскость $\mathbf{R}^2$ с декартовой системой координат. По одной оси отложим время заболевания, по другой — время выздоровления. Сопоставим каждому индивиду точку на этой плоскости: изначально инфицированному индивиду i — точку $(0, \hat{r}_i)$, подозреваемому на заражение индивиду j — точку $(A_j^K, A_j^K + r_j)$. Поместим в каждую из введенных точек δ -меру и рассмотрим усреднение этих мер

$$\xi_K := \frac{1}{K} \sum_{i=1}^{a_K K} \delta_{(0, \hat{r}_i)} + \frac{1}{K} \sum_{j=1}^{b_K K} \delta_{(A_j^K, A_j^K + r_j)}. \quad (1.1)$$

Здесь предполагается, что в случае, когда какая-то из введенных точек имеет бесконечную координату, соответствующее ей слагаемое отсутствует в правой части (1.1). Примем ξ_K в качестве основной характеристики, описывающей процесс эпидемии. Обозначим $Z_K(t)$ среднее число заболевших к моменту времени t . Поскольку $Z_K(t)$ есть среднее число людей, время заболевания которых наступило до момента t , а выздоровление произойдет после момента t , то согласно (1.1)

$$Z_K(t) = \xi_K([0, t] \times (t, +\infty)) = \frac{1}{K} \sum_{i=1}^{a_K K} \mathbf{1}_{(0, \hat{r}_i)}(t) + \frac{1}{K} \sum_{j=1}^{b_K K} \mathbf{1}_{[A_j^K, A_j^K + r_j)}(t). \quad (1.2)$$

Аналогично интерпретируется $\xi_K([0, t] \times (s, +\infty))$ — как среднее число людей, заболевших до момента t и не выздоровевших к моменту s . Заметим, что на этапе формирования модели вскрывается первая сложность: определяющая характеристика — случайная мера, и для того чтобы эта характеристика стала случайным элементом, надо подходящим образом ввести топологию в пространстве мер на $(\mathbf{R}^2, \mathcal{B}(\mathbf{R}^2))$.

Наша основная задача состоит в описании асимптотического поведения ξ_K , а именно в приближении меры ξ_K некоторой неслучайной мерой μ при $K \rightarrow \infty$. В данной работе выводится новая оценка такого приближения, уточняющая результаты [7].

2. Условия на параметры модели. Будем предполагать, что выполнены следующие условия.

1°. $\{(l_j, r_j)\}_{j=1}^{b_K K}$ — семейство независимых одинаково распределенных (н.о.р.) случайных векторов с неотрицательными компонентами, причем Φ — функция распределения r_j , а Ψ — функция распределения l_j .

2°. $\{\hat{r}_i\}_{i=1}^{a_K K}$ — семейство н.о.р. неотрицательных случайных величин с функцией распределения $\hat{\Phi}$ и законом распределения $\hat{\mu}$.

3°. Семейства $\{(l_j, r_j)\}_{j=1}^{b_K K}$ и $\{\hat{r}_i\}_{i=1}^{a_K K}$ независимы.

4°. $\hat{\Phi}(0) = 0$ и $\Phi(0) = 0$, т.е. зараженный индивид не излечивается мгновенно.

5°. При каждом $u \in \mathbf{R}_+$ существует абсолютно непрерывное регулярное условное распределение

$$\Psi_u(t) = \mathbf{P}(l_1 \leq t \mid r_1 = u) = \mathbf{1}_{[0, +\infty)}(t) \int_0^t \psi_u(s) ds$$

и существует $\beta > 0$ такое, что для любого $u \geq 0$ выполнено неравенство $\|\psi_u\|_{C(\mathbf{R}_+)} \leq \beta$.

Обозначим D_1 множество функций $x: \mathbf{R} \rightarrow [0, 1]$, непрерывных справа и имеющих конечные пределы слева. Пусть $\lambda: \mathbf{R}_+ \times D_1 \rightarrow \mathbf{R}_+$ — некоторый функционал иммунитета. Определим время заражения подопытного на заболевание индивида j формулой

$$A_j^K := \inf \left\{ t \in \mathbf{R}_+ : \int_0^t \lambda(s, Z_K(\cdot)) ds = l_j \right\}, \quad (2.1)$$

где $Z_K(t)$ фигурирует в (1.2).

Пусть для любых $t, x(\cdot)$ и $y(\cdot)$ из области определения λ выполнены следующие ограничения.

1. *Ориентированность на прошлое*: $\lambda(t, x(\cdot)) = \lambda(t, x(\cdot \wedge t))$.
2. *Липшицевость*: существует константа $\alpha > 0$ такая, что

$$|\lambda(t, x) - \lambda(t, y)| \leq \alpha \|x - y\|_{C[0, t]}.$$

3. *Ограниченность*: найдется такое $\gamma > 0$, не зависящее от x , что $\|\lambda(\cdot, x)\|_{C(\mathbf{R}_+)} < \gamma$.

4. $\lambda(t, x) = 0$ тогда и только тогда, когда $x(t) = 0$.

Условие 4 гарантирует, что если зараженных людей нет, то эпидемия прекращается. Условие 1 и определение (2.1) позволяют вывести рекуррентную формулу для A_j^K . А именно, если $l_{(k)}$ есть k -я порядковая статистика для величин $l_1, l_2, \dots, l_{b_K K}$, причем $l_{(k)}(\omega) = l_{j_k(\omega)}(\omega)$, то для любого фиксированного исхода ω

$$A_{j_k}^K = \inf \left\{ t \in \mathbf{R}_+ : \int_0^t \lambda \left(s, \frac{1}{K} \sum_{m=1}^{a_K K} \mathbf{1}_{(0, \hat{r}_m)}(\cdot) + \frac{1}{K} \sum_{n=1}^{k-1} \mathbf{1}_{[A_{j_n}^K, A_{j_n}^K + r_{j_n})}(\cdot) \right) ds = l_{(k)} \right\}. \quad (2.2)$$

Далее при доказательстве теоремы 4 будет использовано следующее более сильное условие, вытекающее из свойства 2.

2'. Существует такое $\alpha > 0$, что для любых $(t, x, y) \in \mathbf{R}_+ \times D_1^2$

$$|\lambda(t, x) - \lambda(t, y)| \leq \frac{\alpha}{t} \int_0^t \|x - y\|_{C[0, s]} ds.$$

3. Пространство случайных мер. Введем ряд обозначений: $M^b(\mathbf{R}^2)$ — пространство ограниченных счетно-аддитивных зарядов на $(\mathbf{R}^2, \mathcal{B}(\mathbf{R}^2))$; $M_1(\mathbf{R}^2) := \{\mu \in M^b(\mathbf{R}^2) : \inf_{B \in \mathcal{B}(\mathbf{R}^2)} \mu(B) \geq 0, \sup_{B \in \mathcal{B}(\mathbf{R}^2)} |\mu(B)| \leq 1\}$; $C_0(\mathbf{R}^2)$ — пространство непрерывных действительных функций с компактным носителем; $C_b(S)$ — пространство непрерывных действительных ограниченных функций на топологическом пространстве S ; $C_b^\infty(\mathbf{R}^m)$ — пространство бесконечно дифференцируемых функций на $\mathbf{R}^m$, все производные которых ограничены.

Рассмотрим на пространстве $M^b(\mathbf{R}^2)$ слабую топологию, заданную $C_0(\mathbf{R}^2)$, т.е. топологию, база которой состоит из открытых множеств $B_{x, f} = \{\nu : \langle \nu, f \rangle < x\}$, где $\langle \nu, f \rangle = \int_{\mathbf{R}^2} f d\nu$, $x \in \mathbf{R}$ и $f \in C_0(\mathbf{R}^2)$. Согласно [8], $M_1(\mathbf{R}^2)$ — польское пространство по отношению к слабой топологии со счетной базой, являющееся слабым компактом. Таким образом, случайные меры ξ_K из (1.1) являются случайными элементами со значениями в пространстве $M_1(\mathbf{R}^2)$, снабженном слабой топологией и соответствующей ей борелевской σ -алгеброй. Поэтому для них корректно определено вероятностное распределение, и в этом случае можно рассматривать слабую сходимость распределений случайных мер. Введем следующий класс гладких функций:

$$\begin{aligned} \mathcal{F} &= \mathcal{F}(M_1(\mathbf{R}^2)) \\ &:= \left\{ F \in C_b(M_1(\mathbf{R}^2)) \mid \exists m \in \mathbf{N} \exists f \in C_b^\infty(\mathbf{R}^m) \exists \phi_i \in C_b^\infty(\mathbf{R}^2) : \right. \\ &\quad \left. F(\cdot) = f(\langle \cdot, \phi_i \rangle, i = 1, \dots, m), \|f'\| \leq 1, \|\phi_i\| \leq 1, \|\phi_i'\| \leq 1, \right. \\ &\quad \left. i = 1, \dots, m \right\}, \end{aligned}$$

здесь $\|f'\| = \sum_{i=1}^m \|f'_{x_i}\|_{C(\mathbf{R}^m)}$, $\|\phi'\| = \sum_{j=1}^2 \|\phi'_{x_j}\|_{C(\mathbf{R}^2)}$. Приведем результат, показывающий, что данный класс является определяющим для слабой сходимости распределений случайных мер в $M_1(\mathbf{R}^2)$.

Теорема 1 [8]. Пусть $\xi_1, \xi_2, \dots$ — случайные меры в $M_1(\mathbf{R}^2)$. Тогда следующие условия эквивалентны:

- 1) $\langle \text{Law}(\xi_n), F \rangle \rightarrow \langle \text{Law}(\xi), F \rangle$ для любой $F \in \mathcal{F}$ при $n \rightarrow \infty$;
- 2) $\text{Law}(\xi_n) \xrightarrow{w} \text{Law}(\xi)$ при $n \rightarrow \infty$, где $\xrightarrow{w}$ обозначает слабую сходимость мер.

4. Вспомогательные сведения. Определим следующие операторы, зависящие и от элементарного исхода $\omega \in \Omega$ (далее $D(\mathbf{R})$ — пространство Скорохода, $C(\mathbf{R})$ — пространство непрерывных функций):

I. $\mathcal{Z}_K: D(\mathbf{R}) \rightarrow D_1$ и

$$\mathcal{Z}_K f(t) := \frac{1}{K} \sum_{i=1}^{a_K K} \mathbf{1}_{\{\hat{r}_i > t\}} + \frac{1}{K} \sum_{j=1}^{b_K K} \mathbf{1}_{\{f(t-r_j) < l_j \leq f(t)\}};$$

I°. $L_K: D(\mathbf{R}) \rightarrow C(\mathbf{R})$ и $L_K f(t) := \mathbf{1}_{[0, +\infty)}(t) \int_0^t \lambda(s, \mathcal{Z}_K f(\cdot)) ds$;

II. $\mathcal{Z}: D(\mathbf{R}) \rightarrow D_1$ и $\mathcal{Z} f(t) := a\mathbf{P}(\hat{r}_1 > t) + b\mathbf{P}(f(t-r_1) < l_1 \leq f(t))$,

где $b = 1 - a$;

II°. $L: D(\mathbf{R}) \rightarrow C(\mathbf{R})$ и $L f(t) := \mathbf{1}_{[0, +\infty)}(t) \int_0^t \lambda(s, \mathcal{Z} f(\cdot)) ds$.

Пусть $F_K(t) := \mathbf{1}_{[0, +\infty)}(t) \int_0^t \lambda(s, Z_K(\cdot)) ds$. Для неубывающей функции f положим $f^{-1}(s) := \inf\{t \geq 0: f(t) = s\}$, причем $f^{-1}(s) = +\infty$, если $\|f\|_{C(\mathbf{R}_+)} < s$. Далее, учитывая, что $l_j > 0$ п.н., из (2.1) для любых $t \geq 0$ с вероятностью единица имеем

$$\begin{aligned} A_j^K = F_K^{-1}(l_j) &\Rightarrow Z_K(t) = \frac{1}{K} \sum_{i=1}^{a_K K} \mathbf{1}_{\{\hat{r}_i > t\}} + \frac{1}{K} \sum_{j=1}^{b_K K} \mathbf{1}_{\{F_K^{-1}(l_j) \leq t < F_K^{-1}(l_j) + r_j\}} \\ &\Rightarrow Z_K(t) = \frac{1}{K} \sum_{i=1}^{a_K K} \mathbf{1}_{\{\hat{r}_i > t\}} + \frac{1}{K} \sum_{j=1}^{b_K K} \mathbf{1}_{\{F_K(t-r_j) < l_j \leq F_K(t)\}} \\ &\Rightarrow Z_K = \mathcal{Z}_K F_K \Rightarrow L_K F_K = F_K, \end{aligned}$$

т.е. F_K — неподвижная точка L_K . Из закона больших чисел следует, что для любой неслучайной функции $f \in D(\mathbf{R})$ имеет место сходимость $\mathcal{Z}_K f(t) \xrightarrow{\mathbf{P}} \mathcal{Z} f(t)$ при $K \rightarrow \infty$. Поэтому, если бы оператор L имел единственную неподвижную точку G , т.е. $LG = G$, то естественно было бы предположить, что для достаточно больших K в некотором смысле $F_K \approx G$. В силу (1.1)

$$\xi_K([0, s] \times [0, t]) = \frac{1}{K} \sum_{i=1}^{a_K K} \mathbf{1}_{\{\hat{r}_i \leq t\}} + \frac{1}{K} \sum_{j=1}^{b_K K} \mathbf{1}_{\{F_K^{-1}(l_j) \leq s, F_K^{-1}(l_j) + r_j \leq t\}},$$

или

$$\xi_K([0, s] \times [0, t]) = \frac{1}{K} \sum_{i=1}^{a_K K} \mathbf{1}_{\{\hat{r}_i \leq t\}} + \frac{1}{K} \sum_{j=1}^{b_K K} \mathbf{1}_{\{l_j \leq F_K(s), l_j \leq F_K(t-r_j)\}}.$$

Это приводит к соображению, что в некотором смысле $\xi_K \approx \mu$, где неслучайная мера $\mu \in M_1(\mathbf{R}^2)$ определяется формулой

$$\mu([0, s] \times [0, t]) := a\mathbf{P}(\hat{r}_1 \leq t) + b\mathbf{P}(l_1 \leq G(s), l_1 \leq G(t-r_1)),$$

в которой $G(t)$ полагается равным нулю при $t \leq 0$. Формализуем сказанное.

Предположим, что эпидемия наблюдается в течение конечного промежутка времени $[0, T]$. Ограничим меры со всей плоскости $\mathbf{R}^2$ на

квадрат $[0, T]^2$, положив по определению $\nu^T(\cdot) := \nu(\cdot \cap [0, T]^2)$, где $\nu \in M_1(\mathbf{R}^2)$ (очевидно, что при этом $\nu^T \in M_1(\mathbf{R}^2)$). Нам потребуется также следующая теорема, доказательство которой базируется на принципе сжимающих отображений.

Теорема 2 [6]. Для любого $T \geq 0$ в пространстве $C[0, T]$ существует и притом единственное решение G_T функционального уравнения $f(t) = \int_0^t \lambda(s, \mathcal{Z}f(\cdot)) ds$.

З а м е ч а н и е 1. Следствием теоремы 2 является существование решения G данного уравнения на $\mathbf{R}_+$, причем $G \equiv G_T$ на $[0, T]$ в силу единственности G_T . Поскольку $\lambda \geq 0$, то G не убывает, и если $G'(s_0) = \lambda(s_0, \mathcal{Z}G(\cdot)) = 0$, то по условию 4, которому отвечает функционал λ , выполняется равенство $\mathcal{Z}G(s_0) = 0$. Но тогда функция $\hat{G}$, заданная равенствами $\hat{G}(s) = G(s)$ при $s \in [0, s_0]$ и $\hat{G}(s) = G(s_0)$ при $s \in [s_0, T]$, является неподвижной точкой оператора L на отрезке $[0, T]$. Последнее согласно теореме 1 означает, что $\hat{G} \equiv G$. Следовательно, если $G'(s_0) = 0$, то $G'(s) = 0$ при $s > s_0$. Отсюда вытекает, что $G'(t) > 0$ при $G(t) < \|G\|_{C(\mathbf{R}_+)}$. Это же рассуждение проходит в случае функции F_K , т.е. если $F'_K(s_0) = 0$, то $F'_K(s) = 0$ при $s > s_0$.

Перепишем определение меры μ , используя условные математические ожидания с учетом равенства $\mathbf{P}(l_1 \leq 0 | r_1 = u) = 0$:

$$\begin{aligned} \mu([0, s] \times [0, t]) &= a\mathbf{P}(\hat{r}_1 \leq t) + b \int_0^{(t-s) \vee 0} \Psi_u(G(s)) \mathbf{P}(r_1 \in du) \\ &\quad + b \int_{(t-s) \vee 0}^t \Psi_u(G(t-u)) \mathbf{P}(r_1 \in du). \end{aligned} \quad (4.1)$$

Заметим также, что из (2.2) вытекает соотношение $A_1^K = F_{K,1}^{-1}(l_1)$, где функция $F_{K,1}$ определяется аналогично F_K , только с заменой $\mathcal{Z}_K$ на оператор $\mathcal{Z}_{K,1}: D(\mathbf{R}) \rightarrow D_1$, заданный равенством

$$\mathcal{Z}_{K,1}f(t) := \frac{1}{K} \sum_{i=1}^{a_K K} \mathbf{1}_{\{\hat{r}_i > t\}} + \frac{1}{K} \sum_{j=2}^{b_K K} \mathbf{1}_{\{f(t-r_j) < l_j \leq f(t)\}}.$$

5. Основные результаты и доказательства.

Лемма 1. Пусть $X_1, \dots, X_n$ — независимые одинаково распределенные случайные величины с функцией распределения F , а $F_n(t) = n^{-1} \sum_{i=1}^n \mathbf{1}_{\{X_i \leq t\}}$ — эмпирическая функция распределения. Тогда при $p \geq 1$ выполнено равенство

$$\left(\mathbf{E} \|F - F_n\|_{C(\mathbf{R})}^p \right)^{1/p} \leq n^{-1/2} (1 + C(p) \sqrt{p}), \quad (5.1)$$

где $C(p) = p^{-1/2} (\int_1^{+\infty} 2py^{p-1} e^{-2y^2} dy)^{1/p}$. Кроме того, $C(p)$ может быть выбрано равным 0 в случае $p = 1$ и 0.2 при $p > 5$.

Доказательство. Согласно [9], $\mathbf{P}(\|F - F_n\|_{C(\mathbf{R})} > x) \leq 2e^{-2nx^2}$ для любых $x > 0$. Тогда, используя соотношение $\mathbf{E}|\xi|^p = \int_0^{+\infty} px^{p-1} \mathbf{P}(|\xi| > x) dx$, имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \|F - F_n\|_{C(\mathbf{R})}^p &= \int_0^{+\infty} px^{p-1} \mathbf{P}(\|F - F_n\|_{C(\mathbf{R})} > x) dx \\ &\leq \int_0^\varepsilon px^{p-1} dx + \int_\varepsilon^{+\infty} 2px^{p-1} e^{-2nx^2} dx \\ &= \varepsilon^p + n^{-p/2} \int_{\varepsilon\sqrt{n}}^{+\infty} 2py^{p-1} e^{-2y^2} dy. \end{aligned}$$

Полагая $\varepsilon = n^{-1/2}$, приходим к неравенству $\mathbf{E} \|F - F_n\|_{C(\mathbf{R})}^p \leq n^{-p/2} (1 + \int_1^{+\infty} 2py^{p-1} e^{-2y^2} dy)$. Учитывая, что $(1+x^p)^{1/p} \leq 1+x$ при $x \geq 0$ и $p \geq 1$, получаем искомую оценку (5.1).

Далее, используя формулу Стирлинга $\Gamma(x+1) = \sqrt{2\pi x} x^x e^{r(x)-x}$, где $r(x) \leq 1/(12x)$, $x > 0$ (см., например, [10, с. 83]), при $p > 2$ имеем

$$\int_1^{+\infty} 2py^{p-1} e^{-2y^2} dy \leq \frac{p}{2^{p/2}} \Gamma\left(\frac{p}{2}\right) \leq \sqrt{e\pi} p \left(\frac{p-2}{4e}\right)^{(p-1)/2} e^{1/(6p-12)}.$$

Последнее влечет неравенство $C(p) \leq A(p)$, где

$$A(p) = \left(\frac{4e^2\pi p^2}{p-2}\right)^{1/(2p)} e^{1/(p(6p-12))} \sqrt{\frac{p-2}{4ep}},$$

а $p > 2$. Осталось заметить, что $A(p) < 0.2$ при $p > 5$.

При $p = 1$ достаточно положить $\varepsilon = \sqrt{(2n)^{-1} \ln 2}$, это влечет

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \|F - F_n\|_{C(\mathbf{R})} &\leq \sqrt{\frac{\ln 2}{2n}} + \frac{1}{\sqrt{n}} \int_{\sqrt{(\ln 2)/2}}^{+\infty} 2e^{-2y^2} dy \\ &= \sqrt{\frac{\ln 2}{2n}} + \sqrt{\frac{2\pi}{n}} (1 - \Phi_{\mathcal{N}(0,1)}(2\ln 2)) < \frac{1}{\sqrt{n}}, \end{aligned}$$

где $\Phi_{\mathcal{N}(0,1)}$ — функция распределения стандартной нормальной величины.

Лемма 2. Пусть $h(\cdot) = h(\cdot, \omega)$ есть случайный элемент со значениями в пространстве $C(\mathbf{R})$, причем $h(s) = 0$ при $s \leq 0$, всюду существует производная h' и $0 \leq h'(s) < \gamma$ для некоторого $\gamma > 0$ и любого $s \in \mathbf{R}$. Тогда, если семейство случайных величин $\{(l_j, r_j)\}_{j=1}^n$ удовлетворяет свойствам 1°–5°, то найдутся такие константы $C_1 > 0$ и $C_2 > 0$, что для всех $t \geq 0$

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \left\| \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \mathbf{1}_{\{l_j \leq h(\cdot - r_j)\}} - \mathbf{P}(l_1 \leq h(\cdot - r_1)) \right\|_{C[0,t]} &\leq \max \left\{ \frac{4}{\sqrt{n}} + (C_1 + 2\beta\gamma) \left(\frac{t}{n}\right)^{1/3}, \frac{C_2\beta\gamma + 1}{\sqrt{n}} \right\}, \end{aligned}$$

здесь $\mathbf{P}(l_1 \leq h(\cdot - r_1))(\omega) = \int_{\Omega} \mathbf{1}_{\{l_1(\tilde{\omega}) \leq h(\cdot - r_1(\tilde{\omega}), \omega)\}} \mathbf{P}(d\tilde{\omega})$. Константы C_1 и C_2 могут быть выбраны равными соответственно 0.4 и $7\sqrt{7}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Обозначим $I_{n,t} := \|\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \mathbf{1}_{\{l_j \leq h(\cdot - r_j)\}} - \mathbf{P}(l_1 \leq h(\cdot - r_1))\|_{C[0,t]}$. Фиксируем произвольное $\varepsilon > 0$ такое, что t/ε — целое число. Разобьем отрезок $[0, t]$ на t/ε частей. Заметим, что из условия леммы следует, что $h(\varepsilon) \in [0, \gamma\varepsilon)$, и если $h(k\varepsilon) \in [l\gamma\varepsilon, (l+1)\gamma\varepsilon)$ для некоторых k и l , то возможны два случая: (*) $h((k+1)\varepsilon) \in [l\gamma\varepsilon, (l+1)\gamma\varepsilon)$ и (**) $h((k+1)\varepsilon) \in [(l+1)\gamma\varepsilon, (l+2)\gamma\varepsilon)$. Принимая это во внимание, рассмотрим следующее разложение:

$$1 = \mathbf{1}_{A_1} + \mathbf{1}_{A_0} = \mathbf{1}_{A_{00}} + \mathbf{1}_{A_{01}} + \mathbf{1}_{A_{10}} + \mathbf{1}_{A_{11}} = \dots = \sum_{i=0}^{2^{t/\varepsilon-2}-1} \mathbf{1}_{A_{b(i)}},$$

где $b(i)$ — двоичное представление числа i , состоящее из $t/\varepsilon - 2$ цифр,

$$\begin{aligned} A_0 &= \{h(2\varepsilon) \in [0, \gamma\varepsilon)\}, \\ A_1 &= \{h(2\varepsilon) \in [\gamma\varepsilon, 2\gamma\varepsilon)\}, \\ A_{00} &= \{h(2\varepsilon) \in [0, \gamma\varepsilon), h(3\varepsilon) \in [0, \gamma\varepsilon)\}, \\ A_{10} &= \{h(2\varepsilon) \in [0, \gamma\varepsilon), h(3\varepsilon) \in [\gamma\varepsilon, 2\gamma\varepsilon)\}, \\ A_{01} &= \{h(2\varepsilon) \in [\gamma\varepsilon, 2\gamma\varepsilon), h(3\varepsilon) \in [\gamma\varepsilon, 2\gamma\varepsilon)\}, \\ A_{11} &= \{h(2\varepsilon) \in [\gamma\varepsilon, 2\gamma\varepsilon), h(3\varepsilon) \in [2\gamma\varepsilon, 3\gamma\varepsilon)\} \end{aligned}$$

и т.д.: приписанной слева цифре 0 соответствует случай (*), а цифре 1 — случай (**), т.е.

$$A_{b(i)} = \{h(k\varepsilon) \in [S_{k-1}(i)\gamma\varepsilon, (S_{k-1}(i) + 1)\gamma\varepsilon), k = 2, \dots, t/\varepsilon - 1\},$$

где $S_k(i)$ — сумма цифр до k -й в двоичном представлении числа i . Заметим, что при таком определении $A_{b(i)}A_{b(j)} = \emptyset$ для различных i и j . Положим для краткости $A_{b(i)} = A_i$. Идея дальнейшего доказательства состоит в том, чтобы ограничить случайный элемент h для любого события A_i некоторыми неслучайными функциями сверху и снизу и перейти к оценке выражения в условии леммы для этих неслучайных функций. Для реализации сказанного определим при каждом $i = 1, \dots, 2^{t/\varepsilon-2} - 1$ следующие непрерывные справа функции:

$$\begin{aligned} h_i^1(s) &:= \sum_{k=2}^{t/\varepsilon-1} S_{k-1}(i)\gamma\varepsilon \cdot \mathbf{1}_{[k\varepsilon, (k+1)\varepsilon)}(s) + S_{t/\varepsilon-2}(i)\gamma\varepsilon \cdot \mathbf{1}_{\{t\}}(s), \\ h_i^2(s) &:= h_i^1(s) + 2\gamma\varepsilon \mathbf{1}_{[0, +\infty)}(s) \end{aligned}$$

при $s \leq t$ и $h_i^m(s) := h_i^m(t)$ при $s > t$, $m = 1, 2$. Тогда в случае наступления события A_i для любого $s \in [0, t]$ выполняются неравенства

$h_i^1(s) \leq h(s) \leq h_i^2(s)$, влекущие

$$\begin{aligned} \mathbf{1}_{\{l_j \leq h_i^1(s-r_j)\}} &\leq \mathbf{1}_{\{l_j \leq h(s-r_j)\}} \leq \mathbf{1}_{\{l_j \leq h_i^2(s-r_j)\}}, \\ \mathbf{P}(l_1 \leq h_i^1(s-r_1)) &\leq \mathbf{P}(l_1 \leq h(s-r_1)) \leq \mathbf{P}(l_1 \leq h_i^2(s-r_1)). \end{aligned}$$

Поэтому на A_i

$$\begin{aligned} &\left| \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \mathbf{1}_{\{l_j \leq h(s-r_j)\}} - \mathbf{P}(l_1 \leq h(s-r_1)) \right| \\ &\leq \max_{m=1,2} \left| \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \mathbf{1}_{\{l_j \leq h_i^m(s-r_j)\}} - \mathbf{P}(l_1 \leq h_i^m(s-r_1)) \right| \\ &\quad + \mathbf{P}(l_1 \leq h_i^2(s-r_1)) - \mathbf{P}(l_1 \leq h_i^1(s-r_1)). \end{aligned}$$

Оценим второе и третье слагаемые в правой части последнего неравенства. Используя условные математические ожидания, а также принимая во внимание свойство 5° из п. 2 и неравенство $0 \leq h_i^2(s) - h_i^1(s) \leq 2\gamma\varepsilon$, имеем

$$\begin{aligned} &\mathbf{P}(l_1 \leq h_i^2(s-r_1)) - \mathbf{P}(l_1 \leq h_i^1(s-r_1)) \\ &= \int_0^{+\infty} [\Psi_u(h_i^2(s-u)) - \Psi_u(h_i^1(s-u))] \Phi(du) \leq 2\beta\gamma\varepsilon. \end{aligned}$$

В итоге на A_i получаем

$$I_{n,t} \leq \sum_{m=1,2} \left\| \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \mathbf{1}_{\{l_j \leq h_i^m(\cdot-r_j)\}} - \mathbf{P}(l_1 \leq h_i^m(\cdot-r_1)) \right\|_{C[0,t]} + 2\beta\gamma\varepsilon.$$

Следовательно, на всем вероятностном пространстве

$$\begin{aligned} \mathbf{E} I_{n,t} &\leq \sum_{i=0}^{2^{t/\varepsilon}-2-1} \sum_{m=1,2} \mathbf{E} \left\| \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \mathbf{1}_{\{l_j \leq h_i^m(\cdot-r_j)\}} - \mathbf{P}(l_1 \leq h_i^m(\cdot-r_1)) \right\|_{C[0,t]} \mathbf{1}_{A_i} \\ &\quad + 2\beta\gamma\varepsilon. \end{aligned} \quad (5.2)$$

Правая часть последнего соотношения, согласно неравенству Гёльдера, при $p > 1$ оценивается сверху выражением

$$\sum' \left(\mathbf{E} \left\| \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \mathbf{1}_{\{l_j \leq h_i^m(\cdot-r_j)\}} - \mathbf{P}(l_1 \leq h_i^m(\cdot-r_1)) \right\|_{C[0,t]}^p \right)^{1/p} (\mathbf{P}(A_i))^{1-1/p} + 2\beta\gamma\varepsilon,$$

которое можно переписать в виде

$$\begin{aligned} &\sum' \left(\mathbf{E} \left\| \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \mathbf{1}_{\{(h_i^m)^{-1}(l_j) + r_j \leq \cdot\}} - \mathbf{P}((h_i^m)^{-1}(l_1) + r_1 \leq \cdot) \right\|_{C[0,t]}^p \right)^{1/p} \\ &\quad \times (\mathbf{P}(A_i))^{1-1/p} + 2\beta\gamma\varepsilon, \end{aligned}$$

здесь $\sum'$ обозначает суммирование по всем i и m , фигурирующим в (5.2). По лемме 1 сумма, полученная таким образом, ограничивается сверху выражением

$$2n^{-1/2}(1 + C(p)\sqrt{p}) \sum_{i=0}^{2^{t/\varepsilon-2}-1} (\mathbf{P}(A_i))^{1-1/p} + 2\beta\gamma\varepsilon,$$

если в этой лемме взять $X_j = (h_i^m)^{-1}(l_j) + r_j$. Замечая, что $\sum_{i=0}^{2^{t/\varepsilon-2}-1} \mathbf{P}(A_i) = 1$ и максимум выражения $\sum_{i=1}^I x_i^\alpha$ при условиях $0 < \alpha < 1$, $\sum_{i=1}^I x_i = 1$ и $x_i \geq 0$ достигается на значениях $x_i = 1/I$ ($i = 1, \dots, I$), приходим к неравенству

$$\begin{aligned} 2n^{-1/2}(1 + C(p)\sqrt{p}) \sum_{i=0}^{2^{t/\varepsilon-2}-1} (\mathbf{P}(A_i))^{1-1/p} + 2\beta\gamma\varepsilon \\ \leq 2n^{-1/2}(1 + C(p)\sqrt{p})(2^{t/\varepsilon-2})^{1/p} + 2\beta\gamma\varepsilon. \end{aligned}$$

Для завершения доказательства осталось подходящим образом выбрать параметры ε и p . Полагая $p = t/\varepsilon - 2$, имеем

$$2n^{-1/2}(1 + C(p)\sqrt{p})(2^{t/\varepsilon-2})^{1/p} \leq 4n^{-1/2}(1 + C(\varepsilon^{-1}t - 2)\sqrt{\varepsilon^{-1}t - 2}).$$

Оптимизируя по ε , выберем $\varepsilon = t/\lceil n^{1/3}t^{2/3} \rceil$, здесь $\lceil x \rceil$ — минимальное целое число, не меньшее x . Тогда, используя неравенства $\sqrt{t/\varepsilon - 2} = \sqrt{\lceil n^{1/3}t^{2/3} \rceil - 2} \leq n^{1/6}t^{1/3}$, $t/\lceil n^{1/3}t^{2/3} \rceil \leq (t/n)^{1/3}$, окончательно получаем

$$\mathbf{E} I_{n,t} \leq 4n^{-1/2} + (4C(\lceil n^{1/3}t^{2/3} \rceil - 2) + 2\beta\gamma) \left(\frac{t}{n}\right)^{1/3}.$$

Заметим, что верхнюю оценку рассматриваемого выражения можно получить другим путем. А именно, если $t \leq C_2/\sqrt{n}$ для некоторого $C_2 > 0$, то на отрезке $[0, t]$ выполняются неравенства $0 \leq h(\cdot) \leq \gamma t \leq C_2\gamma/\sqrt{n}$, поэтому аналогично предыдущему, с учетом леммы 1 и строгой положительности l_j , имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{E} I_{n,t} &\leq \mathbf{E} \left| \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \mathbf{1}_{\{l_j \leq C_2\gamma/\sqrt{n}\}} - \mathbf{P}\left(l_1 \leq \frac{C_2\gamma}{\sqrt{n}}\right) \right| + \mathbf{P}\left(l_1 \leq \frac{C_2\gamma}{\sqrt{n}}\right) - \mathbf{P}(l_1 \leq 0) \\ &\leq \mathbf{E} \left| \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \mathbf{1}_{\{l_j \leq C_2\gamma/\sqrt{n}\}} - \mathbf{P}\left(l_1 \leq \frac{C_2\gamma}{\sqrt{n}}\right) \right| + \frac{C_2\gamma\beta}{\sqrt{n}} \leq \frac{C_2\beta\gamma + 1}{\sqrt{n}}. \end{aligned}$$

Положив $C_2 = 7\sqrt{7}$, искомую оценку можно получить, комбинируя предыдущие неравенства и учитывая, что по лемме 1 выполнено неравенство $C(\lceil n^{1/3}t^{2/3} \rceil - 2) \leq 0.2 = C_1$ при $t > 7\sqrt{7}/\sqrt{n}$.

Нам потребуется следующий элементарный вариант леммы Гронулла–Беллмана.

Лемма 3. Пусть $f(t)$ — непрерывная функция на $[0, T]$, удовлетворяющая неравенству $f(t) \leq q \int_0^t f(s) ds$ при $t \in [0, T]$ с некоторой константой $q \geq 0$. Тогда $f(t) \leq 0$ при $t \in [0, T]$.

Доказательство. Утверждение вытекает из следующей цепочки неравенств:

$$\begin{aligned} f(t) &\leq q \int_0^t f(s) ds \leq q^2 \int_0^t \int_0^{t_1} f(s) ds dt_1 \leq \dots \\ &\leq q^{n+1} \int_0^t \int_0^{t_1} \dots \int_0^{t_n} f(s) ds dt_n \dots dt_1 \\ &\leq q^{n+1} \|f\|_{C[0, T]} \int_0^t \int_0^{t_1} \dots \int_0^{t_n} ds dt_n \dots dt_1 = \frac{(qt)^{n+1}}{(n+1)!} \|f\|_{C[0, T]} \rightarrow 0 \end{aligned}$$

при $n \rightarrow \infty$.

Теорема 3. Пусть выполнены свойства 1°–5° и $\lambda(t, x)$ удовлетворяет условиям 1–4. Тогда для любых $T \in \mathbf{R}_+$ и для всех $H \in \mathcal{F}$

$$|\mathbf{E} H(\xi_K^T) - \mathbf{E} H(\mu^T)| \leq \frac{\sqrt{a_K} + \sqrt{b_K}}{\sqrt{K}} + \frac{2}{K} + \alpha \beta b_K S(K) \int_0^T h_0(T-u) \Phi(du), \quad (5.3)$$

где $h_0(t) = h_1(t, \alpha \beta b(1 + \Phi(t)))$, $h_1(t, q) = (e^{qt} - 1 - qt)/q^2 - (e^{qt} - 1)/q$, $S(K) = \sqrt{a_K}/\sqrt{K} + 3/K + \max\{5\sqrt{b_K}/\sqrt{K} + (C_1 + 2\beta\gamma)b_K^{2/3}(T/K)^{1/3}, \sqrt{b_K}(C_2\beta\gamma + 2)/\sqrt{K}\}$, а константы C_1 и C_2 могут быть выбраны равными соответственно 0.4 и $7\sqrt{7}$.

Доказательство. По определению класса $\mathcal{F}$ найдутся такие f , m и ϕ_k ($k = 1, \dots, m$), что выполнено равенство $\mathbf{E} H(\nu) = \mathbf{E} f(\langle \nu, \phi_k \rangle)$, $k = 1, \dots, m$. Пользуясь для гладких h соотношением $\mathbf{E} h(W) - \mathbf{E} h(Z) = \int_0^1 \mathbf{E} h'(\theta W + (1-\theta)Z)(W-Z) d\theta$, имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{E} H(\xi_K^T) - \mathbf{E} H(\mu^T) &= \int_0^1 \sum_{j=1}^m \mathbf{E} f'_{x_j}(\langle \theta \xi_K^T + (1-\theta)\mu^T, \phi_k \rangle, k = 1, \dots, m) \\ &\quad \times \langle \xi_K^T - \mu^T, \phi_j \rangle d\theta. \end{aligned}$$

Так как интегрирование ведется по отрезку единичной длины, из оценки $\sum_{j=1}^m \|f'_{x_j}\| \leq 1$ получаем неравенство

$$|\mathbf{E} H(\xi_K^T) - \mathbf{E} H(\mu^T)| \leq \sup_{\phi \in C_b^\infty(\mathbf{R}^2): \|\phi\| \leq 1, \|\phi'\| \leq 1} \mathbf{E} |\langle \xi_K^T - \mu^T, \phi \rangle|. \quad (5.4)$$

Для любого фиксированного ϕ оценим выражение, стоящее под знаком супремума. По определению ξ_K^T и μ^T имеем

$$\begin{aligned} \langle \xi_K^T, \phi \rangle &= \frac{1}{K} \sum_{i=1}^{a_K K} \phi(0, \hat{r}_i) \mathbf{1}_{\{\hat{r}_i \leq T\}} + \frac{1}{K} \sum_{j=1}^{b_K K} \phi(A_j^K, A_j^K + r_j) \mathbf{1}_{\{A_j^K + r_j \leq T\}}, \\ \langle \mu^T, \phi \rangle &= a \mathbf{E} \phi(0, \hat{r}_1) \mathbf{1}_{\{\hat{r}_1 \leq T\}} + b \mathbf{E} \phi(G^{-1}(l_1), G^{-1}(l_1) + r_1) \mathbf{1}_{\{G^{-1}(l_1) + r_1 \leq T\}}. \end{aligned}$$

Обозначим для удобства

$$\begin{aligned} X_j &:= \phi(A_j^K, A_j^K + r_j) \mathbf{1}_{\{A_j^K + r_j \leq T\}}, \\ Y_j &:= \phi(G^{-1}(l_j), G^{-1}(l_j) + r_j) \mathbf{1}_{\{G^{-1}(l_j) + r_j \leq T\}}. \end{aligned}$$

Добавляя и вычитая выражение $K^{-1} \sum_{j=1}^{b_K K} Y_j$, затем группируя слагаемые и учитывая, что $\|\phi\| \leq 1$, $|aK - a_K K| \leq 1$, $|bK - b_K K| \leq 1$, получаем неравенство

$$\begin{aligned} \mathbf{E} |\langle \xi_K^T - \mu^T, \phi \rangle| &\leq a_K \mathbf{E} \left| \frac{1}{a_K K} \sum_{i=1}^{a_K K} \phi(0, \hat{r}_i) \mathbf{1}_{\{\hat{r}_i \leq T\}} - \mathbf{E} \phi(0, \hat{r}_1) \mathbf{1}_{\{\hat{r}_1 \leq T\}} \right| \\ &\quad + \frac{1}{K} \mathbf{E} \left| \sum_{j=1}^{b_K K} X_j - \sum_{j=1}^{b_K K} Y_j \right| \\ &\quad + b_K \mathbf{E} \left| \frac{1}{b_K K} \sum_{j=1}^{b_K K} Y_j - \mathbf{E} Y_1 \right| + \frac{2}{K}. \end{aligned}$$

Под знаками первого и третьего математических ожиданий в правой части последней формулы стоят суммы н.о.р. случайных величин, так как $\{\hat{r}_i\}_{i=1}^{a_K K}$ — н.о.р. и $\{(r_j, l_j)\}_{j=1}^{b_K K}$ — н.о.р. Тогда в силу неравенств $(\mathbf{E} |n^{-1} \sum_{i=1}^n V_i - \mathbf{E} V_1|)^2 \leq \mathbf{D} (n^{-1} \sum_{i=1}^n V_i) = n^{-1} \mathbf{D} V_1 \leq n^{-1}$, справедливых, когда $\{V_i\}_{i=1}^n$ — н.о.р. и $|V_i| \leq 1$ п.н., заключаем, что

$$\mathbf{E} |\langle \xi_K^T - \mu^T, \phi \rangle| \leq \frac{a_K}{\sqrt{a_K K}} + \frac{b_K}{\sqrt{b_K K}} + \frac{2}{K} + \frac{1}{K} \mathbf{E} \left| \sum_{j=1}^{b_K K} X_j - \sum_{j=1}^{b_K K} Y_j \right|. \quad (5.5)$$

Из того, что $\{\hat{r}_i\}_{i=1}^{a_K K}$ — н.о.р. и $\{(r_j, l_j)\}_{j=1}^{b_K K}$ — н.о.р., следует одинаковая распределенность случайных векторов (X_j, Y_j) при всех j , откуда

$$\frac{1}{K} \mathbf{E} \left| \sum_{j=1}^{b_K K} X_j - \sum_{j=1}^{b_K K} Y_j \right| \leq b_K \mathbf{E} |X_1 - Y_1|. \quad (5.6)$$

Поскольку $A_1^K \geq 0$ п.н. и $G^{-1}(l_1) \geq 0$ п.н., то при $r_1 > T$ индикаторы в определении X_1 и Y_1 обращаются в нуль, поэтому и сами X_1 и Y_1 обращаются в нуль. Учитывая сказанное и переходя к условным математическим ожиданиям, получаем равенство

$$\mathbf{E} |X_1 - Y_1| = \mathbf{E} \{ \mathbf{E} (|X_1 - Y_1| | r_1) \} = \int_0^T \mathbf{E} (|X_1 - Y_1| | r_1 = u) \mathbf{P}(r_1 \in du). \quad (5.7)$$

Так как $A_1^K = F_{K,1}^{-1}(l_1)$ (см. п. 4), где $F_{K,1}(t)$ — некоторая функция от случайных элементов $\{(r_j, l_j)\}_{j=2}^{b_K K}$ и $\{\hat{r}_i\}_{i=1}^{a_K K}$, не зависящих от r_1 , то $\mathbf{E} (|X_1 - Y_1| | r_1 = u) = \mathbf{E} |X_1^u - Y_1^u|$, где

$$\begin{aligned} X_1^u &:= \phi(F_{K,1}^{-1}(l_1^u), F_{K,1}^{-1}(l_1^u) + u) \mathbf{1}_{\{F_{K,1}^{-1}(l_1^u) + u \leq T\}}, \\ Y_1^u &:= \phi(G^{-1}(l_1^u), G^{-1}(l_1^u) + u) \mathbf{1}_{\{G^{-1}(l_1^u) + u \leq T\}}. \end{aligned}$$

Здесь случайная величина l_1^u имеет такое же распределение, как l_1 , при фиксированном u и не зависит от семейств случайных величин $\{(r_j, l_j)\}_{j=2}^{b_K K}$ и $\{\widehat{r}_i\}_{i=1}^{a_K K}$.

Пусть $\varphi(t) := \phi(t, t+u)$, $B := \{l_1^u \leq F_{K,1}(T-u)\}$, $C := \{l_1^u \leq G(T-u)\}$. Используя введенные обозначения, имеем

$$\mathbf{E} |X_1^u - Y_1^u| = \mathbf{E} |\varphi(F_{K,1}^{-1}(l_1^u)) \mathbf{1}_B - \varphi(G^{-1}(l_1^u)) \mathbf{1}_C|. \quad (5.8)$$

Из того, что $\mathbf{1}_B = \mathbf{1}_{BC} + \mathbf{1}_{B\bar{C}}$, $\mathbf{1}_C = \mathbf{1}_{BC} + \mathbf{1}_{\bar{B}C}$ и $\|\varphi\| \leq 1$, вытекает неравенство

$$\begin{aligned} \mathbf{E} |\varphi(F_{K,1}^{-1}(l_1^u)) \mathbf{1}_B - \varphi(G^{-1}(l_1^u)) \mathbf{1}_C| \\ \leq \mathbf{E} \mathbf{1}_{B\bar{C}} + \mathbf{E} \mathbf{1}_{\bar{B}C} + \mathbf{E} |\varphi(F_{K,1}^{-1}(l_1^u)) - \varphi(G^{-1}(l_1^u))| \mathbf{1}_{BC}. \end{aligned} \quad (5.9)$$

Оценим два первых слагаемых в правой части (5.9). Из независимости l_1^u от $\{(r_j, l_j)\}_{j=2}^{b_K K}$ и $\{\widehat{r}_i\}_{i=1}^{a_K K}$, а также ограниченности ψ_u следует, что

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \mathbf{1}_{B\bar{C}} + \mathbf{E} \mathbf{1}_{\bar{B}C} &= \mathbf{E} \mathbf{1}_{\{G(T-u) < l_1^u \leq F_{K,1}(T-u)\}} + \mathbf{E} \mathbf{1}_{\{F_{K,1}(T-u) < l_1^u \leq G(T-u)\}} \\ &\leq \mathbf{E} \int_{G(T-u)}^{F_{K,1}(T-u)} \psi_u(x) dx \mathbf{1}_{\{F_{K,1}(T-u) > G(T-u)\}} \\ &\quad + \mathbf{E} \int_{F_{K,1}(T-u)}^{G(T-u)} \psi_u(x) dx \mathbf{1}_{\{F_{K,1}(T-u) < G(T-u)\}} \\ &\leq \beta \mathbf{E} |F_{K,1}(T-u) - G(T-u)|. \end{aligned} \quad (5.10)$$

Для оценки оставшегося слагаемого в (5.9) положим $g(t) = F_{K,1}(t) \wedge G(t)$, тогда $\mathbf{1}_{BC} = \mathbf{1}_{[0, g(T-u))}(l_1^u)$. Неравенство $\|\varphi'\| \leq 1$ и теорема Лагранжа влекут

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \left| \varphi(F_{K,1}^{-1}(l_1^u)) - \varphi(G^{-1}(l_1^u)) \right| \mathbf{1}_{BC} &\leq \mathbf{E} |F_{K,1}^{-1}(l_1^u) - G^{-1}(l_1^u)| \mathbf{1}_{BC} \\ &= \mathbf{E} \left| \int_{G^{-1}(l_1^u)}^{F_{K,1}^{-1}(l_1^u)} ds \right| \mathbf{1}_{[0, g(T-u))}(l_1^u) = \mathbf{E} \int_0^{g(T-u)} \left| \int_{G^{-1}(t)}^{F_{K,1}^{-1}(t)} ds \right| \psi_u(t) dt. \end{aligned} \quad (5.11)$$

Раскроем знак модуля под интегралом в (5.11), тогда последнее выражение равно

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \int_0^{g(T-u)} \int_{G^{-1}(t)}^{F_{K,1}^{-1}(t)} ds \mathbf{1}_{\{F_{K,1}^{-1}(t) > G^{-1}(t)\}} \psi_u(t) dt \\ + \mathbf{E} \int_0^{g(T-u)} \int_{F_{K,1}^{-1}(t)}^{G^{-1}(t)} ds \mathbf{1}_{\{F_{K,1}^{-1}(t) \leq G^{-1}(t)\}} \psi_u(t) dt. \end{aligned}$$

Переставляя пределы интегрирования, а также учитывая равенства $F_{K,1}^{-1}(0) = G^{-1}(0) = 0$, замечание 1 и неотрицательность подынтегральных функций, последнюю сумму можно оценить сверху выражением

$$\mathbf{E} \int_0^{F_{K,1}^{-1}(g(T-u))} \int_{F_{K,1}(s)}^{G(s)} \mathbf{1}_{\{F_{K,1}^{-1}(t) > G^{-1}(t)\}} \psi_u(t) dt ds$$

$$+ \mathbf{E} \int_0^{G^{-1}(g(T-u))} \int_{G(s)}^{F_{K,1}(s)} \mathbf{1}_{\{F_{K,1}^{-1}(t) \leq G^{-1}(t)\}} \psi_u(t) dt ds.$$

Полученная сумма, в силу определения $g(t)$, свойства 5° п. 2 и монотонности $F_{K,1}$ и G , ограничивается сверху следующим образом:

$$\begin{aligned} & \beta \mathbf{E} \int_0^{T-u} \left| \int_{F_{K,1}(s)}^{G(s)} \left| \mathbf{1}_{\{F_{K,1}^{-1}(t) > G^{-1}(t)\}} - \mathbf{1}_{\{F_{K,1}^{-1}(t) \leq G^{-1}(t)\}} \right| dt \right| ds \\ & \leq \beta \mathbf{E} \int_0^{T-u} |F_{K,1}(s) - G(s)| ds. \end{aligned}$$

Заметим, что $\mathbf{E} |F_{K,1}(t) - G(t)| \leq \mathbf{E} \|F_{K,1} - G\|_{C[0,t]}$, поэтому для оценки правой части неравенства (5.9) достаточно ограничить сверху $\mathbf{E} \|F_{K,1} - G\|_{C[0,t]}$. Реализуем сказанное. Из справедливости равенств

$$F_{K,1}(t) - G(t) = L_{K,1}F_{K,1}(t) - LG(t) = L_{K,1}F_{K,1}(t) - LF_{K,1}(t) + LF_{K,1} - LG(t)$$

следует, что для любого $t \in [0, T-u]$

$$\mathbf{E} \|F_{K,1} - G\|_{C[0,t]} \leq \mathbf{E} \|L_{K,1}F_{K,1} - LF_{K,1}\|_{C[0,t]} + \mathbf{E} \|LF_{K,1} - LG\|_{C[0,t]}. \quad (5.12)$$

Оценим первое слагаемое в правой части (5.12). В силу липшицевости функционала λ получаем

$$\|L_{K,1}F_{K,1} - LF_{K,1}\|_{C[0,t]} \leq \alpha \int_0^t \|\mathcal{Z}_{K,1}F_{K,1} - \mathcal{Z}F_{K,1}\|_{C[0,s]} ds.$$

Рассмотрим подынтегральное выражение в последнем неравенстве. Так как $|a - a_K| = |b - b_K| \leq 1/K$, то по определению операторов $\mathcal{Z}_{K,1}$ и $\mathcal{Z}$ имеем

$$\|\mathcal{Z}_{K,1}F_{K,1} - \mathcal{Z}F_{K,1}\|_{C[0,s]} \leq \frac{3}{K} + a_K R_1 + b_K \frac{b_K K - 1}{b_K K} R_2 + b_K \frac{b_K K - 1}{b_K K} R_3,$$

где

$$\begin{aligned} R_1 &:= \left\| \frac{1}{a_K K} \sum_{i=1}^{a_K K} \mathbf{1}_{\{\hat{r}_i > \cdot\}} - \mathbf{P}(\hat{r}_1 > \cdot) \right\|_{C[0,s]}, \\ R_2 &:= \left\| \frac{1}{b_K K - 1} \sum_{j=2}^{b_K K} \mathbf{1}_{\{F_{K,1}^{-1}(l_j) \leq \cdot\}} - \mathbf{P}(F_{K,1}^{-1}(l_1) \leq \cdot) \right\|_{C[0,s]}, \\ R_3 &:= \left\| \frac{1}{b_K K - 1} \sum_{j=2}^{b_K K} \mathbf{1}_{\{l_j \leq F_{K,1}(\cdot - r_j)\}} - \mathbf{P}(l_1 \leq F_{K,1}(\cdot - r_1)) \right\|_{C[0,s]}. \end{aligned}$$

Из последней оценки и лемм 1 и 2 вытекает неравенство

$$\mathbf{E} \|\mathcal{Z}_{K,1}F_{K,1} - \mathcal{Z}F_{K,1}\|_{C[0,s]} \leq S(K), \quad (5.13)$$

где $S(K)$ фигурирует в (5.3). Последнее позволяет оценить первое слагаемое в правой части (5.12). А именно, при $t \in [0, T]$ имеем

$$\mathbf{E} \|L_{K,1}F_{K,1} - LF_{K,1}\|_{C[0,t]} \leq \alpha S(K)t.$$

Далее, используя определение оператора L , равенства (4.1) и $\Psi'(\cdot) = \int_{\mathbf{R}} \psi_v(\cdot) \Phi(dv)$, а также липшицевость λ , оценим $\mathbf{E} \|LF_{K,1} - LG\|_{C[0,t]}$. Для этого заметим, что

$$\begin{aligned} |LF_{K,1}(t) - LG(t)| &\leq \alpha \int_0^t \|\mathcal{L}F_{K,1} - \mathcal{L}G\|_{C[0,s]} ds \\ &\leq \alpha b \int_0^t \left\| \Psi(F_{K,1}(\cdot)) - \Psi(G(\cdot)) - \int_0^\cdot \left(\Psi_v(F_{K,1}(\cdot - v)) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \Psi_v(G(\cdot - v)) \right) \Phi(dv) \right\|_{C[0,s]} ds \\ &\leq \alpha \beta b (1 + \Phi(t)) \int_0^t \|F_{K,1} - G\|_{C[0,s]} ds. \end{aligned} \quad (5.14)$$

Собирая оценки (5.12)–(5.14), приходим для $t \in [0, T - u]$ к неравенству

$$\mathbf{E} \|F_{K,1} - G\|_{C[0,t]} \leq \alpha S(K)t + \alpha \beta b (1 + \Phi(T - u)) \int_0^t \mathbf{E} \|F_{K,1} - G\|_{C[0,s]} ds. \quad (5.15)$$

Докажем вспомогательное утверждение: если гладкая функция y удовлетворяет неравенству $y'(t) \leq pt + qy(t)$ при некоторых $p, q > 0$ для любого t из $[0, T']$ и краевому условию $y(0) = 0$, то $y'(t) \leq y'_{\max}(t)$ и $y(t) \leq y_{\max}(t)$ на $[0, T']$, где $y_{\max}$ — решение дифференциального уравнения $y'_{\max}(t) = pt + qy_{\max}(t)$ с краевым условием $y_{\max}(0) = 0$, т.е. $y_{\max}(t) = pq^{-2}(e^{qt} - 1 - qt)$. Действительно, положив $f(t) = y'(t) - y'_{\max}(t)$ в лемме 3, имеем неравенство $y'(t) \leq y'_{\max}(t)$ при $t \in [0, T']$, интегрируя которое, получаем $y(t) \leq y_{\max}(t)$.

Принимая во внимание доказанное утверждение и (5.15), приходим к неравенствам

$$\begin{aligned} \int_0^t \mathbf{E} \|F_{K,1} - G\|_{C[0,s]} ds &\leq \frac{\alpha S(K)}{q^2} (e^{qt} - 1 - qt), \\ \mathbf{E} \|F_{K,1} - G\|_{C[0,t]} &\leq \frac{\alpha S(K)}{q} (e^{qt} - 1), \end{aligned} \quad (5.16)$$

где $q = \alpha \beta b (1 + \Phi(T - u))$. Комбинируя оценки (5.4)–(5.16), получаем итоговый результат.

З а м е ч а н и е 2. Из теорем 1 и 3 следует, что $\text{Law}(\xi_K^T) \xrightarrow{w} \delta_{\mu T}$ при $K \rightarrow \infty$ (слабый закон больших чисел для процессов эпидемий).

З а м е ч а н и е 3. Основная сложность доказательства теоремы состоит в установлении леммы 2. При этом мы могли бы поступить иначе:

$$\begin{aligned} & \mathbf{E} \left\| \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \mathbf{1}_{\{l_j \leq h(\cdot - r_j)\}} - \mathbf{P}(l_1 \leq h(\cdot - r_1)) \right\|_{C[0,t]} \\ & \leq \mathbf{E} \sup_{A \in \mathcal{A}} \left\| \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \mathbf{1}_{\{(l_j, r_j) \in A\}} - \mathbf{P}((l_1, r_1) \in A) \right\|_{C[0,t]}, \end{aligned}$$

где $\mathcal{A} = \{(x, y) \mid x \leq f(y), f \text{ — дифференцируемая функция с } -\gamma < f' \leq 0\}$. Существуют оценки подобных величин для систем выпуклых множеств для классов, допускающие комбинаторную характеристику Вапника–Червоненкиса (см. [11], [12]). Однако в данном случае класс $\mathcal{A}$ устроен иначе, поэтому приходится получать оценку непосредственно.

З а м е ч а н и е 4. Используя теорему 3, нетрудно получить верхнюю оценку величины $|\mathbf{E} H(\xi_K^T) - \mathbf{E} H(\mu^T)|$, не зависящую от функции распределения $\Phi(\cdot)$, заменив интеграл в правой части (5.3) на максимум подынтегрального выражения на промежутке интегрирования.

З а м е ч а н и е 5. Слагаемое в правой части (5.3), содержащее h_0 , можно улучшить при больших T , например, в случае более сильного условия 2' на функционал λ . Это показывает следующий результат.

Теорема 4. Пусть выполнены свойства 1°–5° и $\lambda(t, x)$ удовлетворяет условиям 1, 2', 3, 4. Тогда для любых $T \in \mathbf{R}_+$ и для всех $H \in \mathcal{F}$

$$\begin{aligned} |\mathbf{E} H(\xi_K^T) - \mathbf{E} H(\mu^T)| & \leq \frac{\sqrt{a_K} + \sqrt{b_K}}{\sqrt{K}} + \alpha \beta b_K S(K) \\ & \times \int_0^T \left(T - u + \frac{g_1(g_0(T - u)(T - u))}{g_0(T - u)} \right. \\ & \quad \left. + (T - u) \frac{g_1'(g_0(T - u)(T - u))}{g_0(T - u)} \right) \Phi(du), \end{aligned}$$

где $g_0(t) = \alpha \beta b(1 + \Phi(t))$, $g_1(t) = \sum_{n=2}^{+\infty} t^n / (n!)^2$, а a_K , b_K , $S(K)$, C_1 и C_2 те же, что и в теореме 3.

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу неравенства $t^{-1} \int_0^t \|x - y\|_{C[0,s]} ds \leq \|x - y\|_{C[0,t]}$ доказательство теоремы 3 сохраняется вплоть до вывода соотношения (5.13), которое здесь переписывается в виде

$$\begin{aligned} & LF_{K,1}(t) - LG(t) \\ & \leq \int_0^t \frac{\alpha b}{s} \int_0^s \left\| \Psi(F_{K,1}(\cdot)) - \Psi(G(\cdot)) \right. \\ & \quad \left. - \int_0^\cdot (\Psi_v(F_{K,1}(\cdot - v)) \Psi_v(G(\cdot - v))) \Phi(dv) \right\|_{C[0,v]} dv ds \\ & \leq \alpha \beta b(1 + \Phi(t)) \int_0^t \frac{1}{s} \int_0^s \|F_{K,1} - G\|_{C[0,v]} dv ds. \end{aligned} \quad (5.17)$$

Следовательно, при $t \in [0, T - u]$

$$\begin{aligned} & \mathbf{E} \|F_{K,1} - G\|_{C[0,t]} \\ & \leq \alpha S(K)t + \alpha\beta b(1 + \Phi(T - u)) \int_0^t \frac{1}{s} \int_0^s \mathbf{E} \|F_{K,1} - G\|_{C[0,v]} dv ds. \end{aligned} \quad (5.18)$$

Докажем вспомогательное утверждение: пусть гладкая функция y удовлетворяет неравенству $(ty')'(t) \leq pt + qy(t)$ при некоторых $p, q > 0$ для любого t из $[0, T']$ и краевым условиям $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$, тогда $y'(t) \leq y'_{\max}(t)$ и $y(t) \leq y_{\max}(t)$ при $t \in [0, T']$, где $y_{\max}(t)$ — решение дифференциального уравнения $(ty'_{\max})'(t) = pt + qy_{\max}(t)$ с краевыми условиями $y_{\max}(0) = 0$, $y'_{\max}(0) = 0$. Действительно, положив $f(t) = y'(t) - y'_{\max}(t)$, имеем неравенство $(tf(t))' \leq q \int_0^t f(s) ds$, интегрируя которое, приходим к соотношениям

$$f(t) \leq \frac{q}{t} \int_0^t \int_0^s f(v) dv ds = q \int_0^t f(v) \frac{t-v}{t} dv \leq q \int_0^t f(v) dv.$$

Используя лемму 3, получаем, что $f(t) \leq 0$, т.е. $y'(t) \leq y'_{\max}(t)$, так что в силу краевых условий $y(t) \leq y_{\max}(t)$. Осталось найти $y_{\max}$. Будем искать $y_{\max}$ в виде ряда $y_{\max}(t) = \sum_{n=2}^{+\infty} a_n t^n$. Подставляя этот ряд в дифференциальное уравнение, приходим к тождеству

$$\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n t^{n-1} + \sum_{n=2}^{+\infty} na_n t^{n-1} = pt + q \sum_{n=2}^{+\infty} a_n t^n.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях t , получаем $n^2 a_n = qa_{n-1}$ при $n > 2$ и $4a_2 = p$, и, следовательно, $y_{\max}(t) = pq^{-2} \sum_{n=2}^{+\infty} (qt)^n / (n!)^2 = pq^{-2} g_1(qt)$.

Возвращаясь к доказательству теоремы, положим

$$y(t) = \int_0^t s^{-1} \int_0^s \mathbf{E} \|F_{K,1} - G\|_{C[0,v]} dv ds,$$

тогда $(ty'(t))' = \mathbf{E} \|F_{K,1} - G\|_{C[0,t]}$. Заметим также, что из непрерывности функции $\mathbf{E} \|F_{K,1} - G\|_{C[0,t]}$ и равенства $\mathbf{E} \|F_{K,1} - G\|_{C[0,0]} = 0$ следуют краевые условия $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$. Воспользуемся доказанным утверждением. В данном случае, согласно (5.18), $q = \alpha\beta b(1 + \Phi(T - u)) = g_0(T - u)$, а $p = S(K)$, поэтому неравенство $y \leq y_{\max}$ влечет

$$\mathbf{E} \|F_{K,1} - G\|_{C[0,t]} \leq \alpha S(K)t + \frac{\alpha S(K)g_1(g_0(T - u)t)}{g_0(T - u)}.$$

С учетом неравенств

$$\int_0^t \mathbf{E} \|F_{K,1} - G\|_{C[0,s]} ds \leq ty'(t) \leq y'_{\max}(t) = \alpha S(K)t \frac{g'_1(g_0(T - u)t)}{g_0(T - u)}$$

из (5.4)–(5.12), (5.17), (5.18) имеем

$$\begin{aligned}
 & |\mathbf{E} H(\xi_K^T) - \mathbf{E} H(\mu^T)| \\
 & \leq \frac{\sqrt{a_K} + \sqrt{b_K}}{\sqrt{K}} + \alpha \beta b_K S(K) \int_0^T \left(T - u + \frac{g_1(g_0(T-u)(T-u))}{g_0(T-u)} \right. \\
 & \quad \left. + (T-u) \frac{g'_1(g_0(T-u)(T-u))}{g_0(T-u)} \right) \Phi(du).
 \end{aligned}$$

Последнее неравенство завершает доказательство теоремы.

З а м е ч а н и е 6. Доказательства теорем 3 и 4 используют идеи [7], но имеются и существенные отличия. А именно, вместо неравенства для $\|L_{K,1}h - Lh\|_{C[0,t]}$ работы [7] мы применяем леммы 1 и 2, поскольку для оценки $\|\mathcal{L}_{K,1}h - \mathcal{L}h\|_{C[0,s]}$ нужен анализ более сложного объекта, введенного в лемме 2. Отметим также, что неравенства в теоремах 3 и 4 представляют интерес, когда их правые части малы, т.е. при T порядка $\ln K$ и $g_1^{-1}(K^{\frac{1}{3}})$ соответственно.

Автор особенно благодарен своему научному руководителю А. В. Булинскому за постановку задачи, ценные замечания и советы, а также очень признателен А. П. Пашкину за плодотворное обсуждение работы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Bartlett M. S. Some evolutionary stochastic processes. — J. Roy. Statist. Soc., Ser. B, 1949, v. 11, p. 211–229.
2. Barbour A. D. On a functional central limit theorem for Markov population processes. — Adv. Appl. Probab., 1974, v. 6, p. 21–39.
3. Sellke T. On the asymptotic distribution of the size of a stochastic epidemic. — J. Appl. Probab., 1983, v. 20, № 2, p. 390–394.
4. Becker N. The uses of epidemic models. — Biometrics, 1979, v. 35, p. 295–305.
5. Mollison D. Epidemic Models: Their Structure and Relation to Data. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1995.
6. Reinert G. The asymptotic evolution of the General Stochastic Epidemic. — Ann. Appl. Probab., 1995, v. 5, № 4, p. 1061–1086.
7. Reinert G. Stein's method for epidemic processes. — Complex Stochastic Systems. Ed. by O. E. Barndorff-Nielsen, D. R. Cox, and C. Klüppelberg. Boca Raton: Chapman & Hall/CRC, 2001, p. 235–275.
8. Reinert G. A weak law of large numbers for empirical measures via Stein's method. — Ann. Probab., 1995, v. 23, № 1, p. 334–354.
9. Massart P. The tight constant in the Dvoretzky–Kiefer–Wolfowitz inequality. — Ann. Probab., 1990, v. 18, № 3, p. 1269–1283.
10. Абрамовиц М., Стиган И. Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами. М.: Наука, 1979, 830 с.
11. Dudley R. M. Uniform Central Limit Theorems. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1999, 436 с.
12. Vapnik V. N. Statistical Learning Theory. New York: Wiley, 1998, 736 p.

Поступила в редакцию
22.IX.2008