Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Г. Алексеев, О непараметрических оценках старших спектральных плотностей, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2009, том 54, выпуск 3, 567–573

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp2810>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 44.207.124.84

26 апреля 2023 г., 02:14:57

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

© 2009 г.

АЛЕКСЕЕВ В. Г.

О НЕПАРАМЕТРИЧЕСКИХ ОЦЕНКАХ СТАРШИХ СПЕКТРАЛЬНЫХ ПЛОТНОСТЕЙ

В статье дано краткое описание свойств симметрии и непараметрических оценок спектральных плотностей третьего и четвертого порядков стационарного в узком смысле случайного процесса $\{X(t), t \in \mathbf{Z}\}$, а также оценок спектральных плотностей минимального (второго) порядка периодически нестационарного случайного процесса $\{X(t), t \in \mathbf{R}\}$. Подвергнут критике подход И. Г. Журбенко [1], [2], игнорирующий свойства симметрии старших спектральных плотностей.

Ключевые слова и фразы: стационарный в узком смысле случайный процесс, периодически нестационарный случайный процесс, семинвариантные спектральные плотности, непараметрические оценки.

1. Введение. Настоящая работа инициирована статьями И. Г. Журбенко [1], [2] в энциклопедии «Вероятность и математическая статистика». Настоящий, вводный, раздел статьи будет носить преимущественно критический характер. Предметом наших критических замечаний будет прежде всего статья [1]. Избранный ее автором подход к описанию старших спектральных плотностей стационарных случайных процессов (ССП) и их статистических оценок не может не вызвать недоумения читателя. Мы не будем здесь детально анализировать каждый абзац статьи [1] и доказывать несостоятельность формулируемых в ней рекомендаций. Мы укажем лишь на один весьма существенный изъян, радикально снижающий качество статьи [1].

Пусть $\{X(t), t \in \mathbf{Z}\}$ — стационарный в узком смысле случайный процесс со средним $\mathbf{E}X(t) \equiv 0$. Наше ключевое замечание к статье [1] состоит в том, что, говоря о старших спектральных плотностях СП $X(t)$, И. Г. Журбенко обходит молчанием свойства их симметрии. А между тем, использование свойств симметрии позволяет сократить время счета при вычислении биспектральной плотности в 12 раз, а при вычислении триспектральной плотности — в 48 раз. Кроме того, свойствами симметрии старших спектральных плотностей объясняются все важнейшие свойства их статистических оценок. Может быть, свойства симметрии старших спектральных плотностей не были известны И. Г. Журбенко? Свойства симметрии биспектральной плотности $f^{(3)}(\lambda_1, \lambda_2)$ были впервые опубликованы в работе [3]. Они могут быть найдены также в статье [4] и в монографии [5], цитируемой в статье [1]. Свойства симметрии спектральных плотностей четвертого и более высоких порядков опубликованы в работах [6], [7] для одномерного и в работе [8] — для многомерного СП.

Обходя молчанием свойства симметрии старших спектральных плотностей, И. Г. Журбенко [1] вводит в рассмотрение так называемую характеристику $m(\lambda)$ аргумента λ той или иной спектральной плотности и пытается убедить читателя в том, что именно от нее решающим образом зависят все важнейшие свойства статистических оценок старших спектральных плотностей. Определение характеристики $m(\lambda)$

сводится к тому, что аргумент $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_{\nu-1})$ спектральной плотности $f^{(\nu)}(\lambda)$ находится на пересечении не более чем m гиперплоскостей специального вида, каждая из которых проходит через точку $\lambda = (0, \dots, 0)$. Однако определения характеристики $m(\lambda)$, приведенные в статье [1] и в монографии того же автора [9], не согласуются между собой: вместо слов «максимальное целое число» в книге [9, с. 217] мы читаем «минимальное ... число» в статье [1, с. 641, правый столбец]. Не будем, однако, уточнять, которое из двух определений правильно: характеристика $m(\lambda)$ — это тупик, выход из которого в теорию статистического оценивания старших спектральных плотностей не просматривается. В частности, вопреки утверждению И. Г. Журбенко [1, с. 641], смещение непараметрической оценки той или иной спектральной плотности ни в малейшей мере от характеристики $m(\lambda)$ не зависит.

Критическую часть статьи мы на этом завершаем. Ее позитивная часть будет представлена двумя последующими разделами. Там же будут приведены все необходимые нам определения.

2. Спектральные плотности стационарного случайного процесса. В литературе, посвященной прикладному статистическому анализу ССП, в течение довольно долгого времени преобладали работы, не выходящие за рамки статистического оценивания математического ожидания исследуемого ССП, его корреляционной функции и спектральной плотности. В последние годы, однако, все большее число авторов работ прикладного характера проявляет интерес к оценкам старших моментов и старших спектральных плотностей, дающих важную дополнительную информацию относительно статистической структуры исследуемого ССП. В этой связи мы укажем на классифицированный библиографический список [10] и на монографии [11], [12]. В списке [10] мы находим 1757 работ, посвященных старшим моментам и кумулянтам, а также старшим спектральным плотностям стационарных и периодических нестационарных случайных процессов. Библиография к монографиям [11], [12] охватывает соответственно 494 и 34 названия. Все говорит о том, что интерес исследователей разных направлений к старшим спектральным плотностям реальных физических процессов неуклонно возрастает.

Итак, пусть, как и в п. 1, $\{X(t), t \in \mathbf{Z}\}$ — стационарный в узком смысле случайный процесс со средним $\mathbf{E}X(t) \equiv 0$. Будем, кроме того, предполагать в дальнейшем, что $\mathbf{E}|X(t)|^q < \infty$ для некоторого $q > 1$. В основу определения спектральных плотностей ССП $X(t)$ полагаются семиинварианты (кумулянты)

$$r^{(\nu)}(t_1, \dots, t_{\nu-1}) = S^{(\nu)}(t, t + t_1, \dots, t + t_1 + \dots + t_{\nu-1}),$$

где

$$S^{(\nu)}(t_1, \dots, t_{\nu-1}) = \frac{i^{-\nu} \partial \nu}{\partial u_1 \dots \partial u_\nu} \ln \mathbf{E} \exp \left\{ i \sum_{j=1}^{\nu} u_j X(t_j) \right\} \Bigg|_{u_1 = \dots = u_\nu = 0} \quad (1)$$

и $\nu \leq q$.

Таким образом, семиинвариант ν -го порядка $S^{(\nu)}(t_1, \dots, t_\nu)$ является коэффициентом при $i^\nu u_1 \dots u_\nu$ в разложении функции $\ln \mathbf{E} \exp \{ i u_1 X(t_1) + \dots + i u_\nu X(t_\nu) \}$ в ряд Тейлора в окрестности начала координат. Важнейшие свойства семиинвариантов, отвечающих произвольному случайному вектору $(X_1, \dots, X_k)$, приведены в [13, § 2.3].

Попутно укажем, что формула (1), определяющая семиинвариант $S^{(\nu)}(t_1, \dots, t_\nu)$, приведена в статьях [1], [2] с одной и той же грубой ошибкой. Автору статей [1], [2] следовало всего лишь добросовестно (без всяких изменений) переписать эту формулу из своей же монографии [9, с. 215]. Еще одно замечание к статье [2] состоит в том, что неравенство $k > 2$ в свойстве 4) семиинвариантов $S^k(X_1, \dots, X_k)$ следует заменить на $k \geq 2$. Точнее говоря, речь идет о том, что $S^{(2)}(X_1 + C, X_2) = S^{(2)}(X_1, X_2)$, если $C = \text{const}$.

Что же касается спектральной плотности порядка $\nu = 2, 3, \dots$ исследуемого ССП, то она, в предположении абсолютной сходимости ряда

$$\sum_{t_1=-\infty}^{\infty} \dots \sum_{t_{\nu-1}=-\infty}^{\infty} r^{(\nu)}(t_1, \dots, t_{\nu-1}),$$

определяется формулой

$$f^{(\nu)}(\lambda_1, \dots, \lambda_{\nu-1}) = (2\pi)^{-\nu+1} \sum_{t_1=-\infty}^{\infty} \dots \sum_{t_{\nu-1}=-\infty}^{\infty} r^{(\nu)}(t_1, \dots, t_{\nu-1}) \times \exp\{-i(t_1\lambda_1 + \dots + t_{\nu-1}\lambda_{\nu-1})\}. \quad (2)$$

Полагая $\nu = 2$ в формуле (2), мы получаем обычную спектральную плотность $f^{(2)}(\lambda) = f(\lambda)$, далее следуют биспектральная, триспектральная плотности и спектральные плотности порядков $\nu \geq 5$.

Ограничиваясь рассмотрением спектральных плотностей порядков $\nu = 3$ и $\nu = 4$, опишем область определения каждой из них. Следуя рекомендациям работы [6], будем считать, что областью определения спектральных плотностей $f^{(3)}(\lambda_1, \lambda_2)$ и $f^{(4)}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ являются соответственно шестиугольник Q_3 с площадью $4\pi^2$, определяемый системой неравенств

$$\begin{cases} |\lambda_1 - \lambda_2| \leq 2\pi, \\ |\lambda_j + 2\lambda_k| \leq 2\pi, \quad j, k = 1, 2, \quad j \neq k, \end{cases}$$

и 12-гранник (ромбододекаэдр) Q_4 с объемом $8\pi^3$, определяемый системой неравенств

$$\begin{cases} |\lambda_j - \lambda_k| \leq 2\pi, \quad j, k = 1, 2, 3, \quad j \neq k, \\ |\lambda_j + \lambda_k + 2\lambda_l| \leq 2\pi, \quad j \neq k \neq l \neq j. \end{cases}$$

Если расsects шестиугольник Q_3 прямыми $\lambda_1 \pm \lambda_2 = 0$, $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 0$, $2\lambda_1 + \lambda_2 = 0$ и $\lambda_1 + 2\lambda_2 = 0$, мы получим 12 равновеликих (по площади) треугольников. Пусть Δ — замыкание любого из них. Множество Δ является основным для биспектральной плотности в том смысле, что значения функции $f^{(3)}(\lambda_1, \lambda_2)$ в этом треугольнике полностью определяют ее значения во всем шестиугольнике Q_3 . Аналогичным образом, отсекая 12-гранник Q_4 плоскостями $\lambda_j \pm \lambda_k = 0$, $j, k = 1, 2, 3$, $j \neq k$, и $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_j = 0$, $j = 1, 2, 3$, мы получим разбиение множества Q_4 на 48 равновеликих (по объему) четырехгранников, замыкание каждого из которых является основным множеством триспектральной плотности $f^{(4)}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$. Рисунок, иллюстрирующий свойства симметрии биспектральной плотности $f^{(3)}(\lambda_1, \lambda_2)$, может быть найден в работе [4]. Графическое изображение ромбододекаэдра Q_4 читатель найдет в статье [14, рис. 3].

Предлагаемый нами подход к построению и исследованию статистических оценок биспектральной и триспектральной плотностей ССП $X(t)$ опирается на два краеугольных камня. Это, во-первых, использование свойств симметрии оцениваемой спектральной плотности и, во-вторых, выбор окна данных $\Theta = \{\theta(t)\}$ для домножения (неравномерного взвешивания) исходной реализации. Если окно данных Θ выбрать положительно определенным (имеющим неотрицательное дискретное преобразование Фурье), то исследование смещения оценки интересующей нас спектральной плотности существенным образом упрощается. В качестве положительно определенных окон данных могут быть рекомендованы, например, разложения в ряд Фурье ядер Фейера, Джексона и Джексона–Валле–Пуссена, определяемых соотношениями

$$F_n(\mu) = \frac{1}{n} \left\{ \frac{\sin(n\mu/2)}{\sin(\mu/2)} \right\}^2, \quad (3)$$

$$J_n(\mu) = \frac{3}{2n^3 + n} \left\{ \frac{\sin(n\mu/2)}{\sin(\mu/2)} \right\}^4, \quad (4)$$

$$P_n(\mu) = \frac{2 + \cos \mu}{2n^3} \left\{ \frac{\sin(n\mu/2)}{\sin(\mu/2)} \right\}^4 \quad (5)$$

соответственно.

Аргумент t разложений в ряд Фурье ядер (3)–(5), как и аргумент ССП $X(t)$, принимает целочисленные значения: $t \in \mathbf{Z}$.

Дальнейшее описание непараметрических оценок интересующих нас спектральных плотностей мы приведем с максимальной краткостью отдельно для случаев $\nu = 3$ (биспектральная плотность) и $\nu = 4$ (триспектральная плотность), отсылая при этом читателя за подробностями к соответствующим работам, дающим развернутое изложение.

С л у ч а й $\nu = 3$. По заданной нам выборке строятся две модификации периодограммы третьего порядка. Исследуются статистические свойства (смещение, дисперсия, ковариация) каждой из них. Оценка самой биспектральной плотности строится в виде свертки периодограммы третьего порядка с тем или иным двумерным спектральным окном. Предложен прием, позволяющий уменьшить смещение периодограммы третьего порядка в том случае, когда исходная выборка из N отсчетов разбивается на l неперекрывающихся или частично перекрывающихся массивов объема $M \ll N$ и в качестве оценки биспектральной плотности используется периодограмма, осредненная по всем l массивам из M отсчетов. Получаемая при этом оценка биспектральной плотности является аналогом оценки типа Уэлча (оценки, получаемой осреднением по сдвигу во времени, — в терминологии И. Г. Журбенко) обычной спектральной плотности $f(\lambda)$ (см. работы [15], [16]). Отдельно рассмотрен случай систематических пропусков в исходной выборке (p пропусков после каждых m отсчетов). Асимптотически (с ростом объема выборки) несмещенную оценку биспектральной плотности удастся здесь построить, если $m > 2p$.

Более подробное изложение читатель найдет в работах [17]–[22].

С л у ч а й $\nu = 4$. Здесь, в отличие от случая $\nu = 3$, мы используем две независимые или хотя бы достаточно далеко разнесенные во времени реализации ССП $X(t)$. Все дело в том, что триспектральная плотность $f^{(4)}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ является дискретным преобразованием Фурье семиинварианта четвертого порядка $r^{(4)}(t_1, t_2, t_3)$ (см. формулу (2)), который, даже в предположении $\mathbf{E}X(t) \equiv 0$, не совпадает с четвертым моментом. Согласно [23, гл. II, § 12, формула (46)], в предположении $\mathbf{E}X(t) \equiv 0$ и $\mathbf{E}|X(t)|^4 < \infty$ семиинвариант четвертого порядка ССП $X(t)$ может быть выражен через его четвертый момент и три произведения двух моментов второго порядка. Разумеется, по одной реализации ССП $X(t)$ мы можем оценить его второй и четвертый моменты, однако оценка произведения двух моментов второго порядка требует, чтобы каждый из них вычислялся по отдельной реализации. В противном случае оценки обоих моментов второго порядка оказались бы зависимыми, что отразилось бы на качестве оценки триспектральной плотности.

В основу построения оценки триспектральной плотности полагается кумулянтная периодограмма четвертого порядка (дискретное преобразование Фурье выборочного семиинварианта четвертого порядка). Исследуются статистические свойства (смещение, дисперсия, ковариация) кумулянтной периодограммы. Оценка самой триспектральной плотности строится в виде свертки кумулянтной периодограммы с тем или иным трехмерным спектральным окном. Как и в случае $\nu = 3$, предложен прием, позволяющий уменьшить смещение периодограммы, получаемой осреднением по сдвигу во времени. В случае систематических пропусков в обеих реализациях (p пропусков после каждых m отсчетов) удастся построить асимптотически несмещенную оценку триспектральной плотности, если $m > 3p$.

Более подробное изложение читатель найдет в работах [24]–[26].

Разумеется, в обоих случаях (т.е. в случаях $\nu = 3$ и $\nu = 4$) все предлагаемые нами непараметрические оценки состоятельны при любом значении аргумента λ , если только соблюдены условия соответствующих теорем. Даже в самой неблагоприятной точке $\lambda = (0, \dots, 0)$ (т.е. в общей вершине всех $2\nu!$ основных множеств спектральной плотности $f^{(\nu)}(\lambda_1, \dots, \lambda_{\nu-1})$) никаких принципиальных трудностей в исследовании смещения и дисперсии оценки интересующей нас спектральной плотности не возникает.

3. Спектральные плотности периодически нестационарного случайного процесса. До сих пор, говоря о старших спектральных плотностях, мы исходили из предположения, что исследуемый нами случайный процесс $X(t)$ стационарен. В настоящем пункте мы от этого последнего предположения откажемся. Будем предполагать отныне, что случайный процесс $\{X(t), t \in \mathbf{R}\}$ периодически нестационарен с известным периодом нестационарности $T > 0$ и имеет нулевое математическое ожидание. Напомним, что случайный процесс $\{X(t), t \in \mathbf{R}\}$ называется периодически нестационарным (в узком смысле) с периодом нестационарности T , если все его конечномерные распределения инвариантны относительно сдвига вдоль оси t на величину, кратную T . Ряд важнейших сфер приложения периодически нестационарных и периодически коррелированных (т.е. периодически нестационарных в широком смысле) случайных процессов указан в монографиях [27], [28, § 59] и в статье [29]. Нам представляется, что спектральные плотности периодически нестационарного случайного процесса (ПНСП) также могли бы быть упомянуты в статье [1], но их там нет. Будучи более сложной (в сравнении с ССП) моделью случайного процесса, введенный нами в рассмотрение ПНСП $X(t)$ имеет для каждого $\nu = 2, 3, \dots$ уже не одну спектральную плотность, а счетное множество спектральных плотностей $f_j^{(\nu)}(\lambda)$, $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_{\nu-1})$. Свойства симметрии спектральных плотностей $f_j^{(\nu)}(\lambda)$, $j \in \mathbf{Z}$, $\nu = 2 \div 6$, описаны в работах [30] и [31].

Полноценной теории статистического оценивания спектральных плотностей порядков $\nu \geq 3$ в нашем распоряжении пока еще нет. Поэтому мы ограничимся рассмотрением оценок спектральных плотностей минимального порядка $f_j^{(2)}(\lambda) = f_j^{(\lambda)}(\lambda)$. Как и в п. 2, наше изложение будет предельно кратким.

Для случая, когда

$$\sum_{j \in \mathbf{Z}} \int_{-\infty}^{\infty} |f_j(\lambda)| d\lambda < \infty$$

(т.е. ПНСП $X(t)$ гармонизуем в смысле Лозва), в работах [32], [33] предложены непараметрические оценки спектральных плотностей $f_j(\lambda)$, $j \in \mathbf{Z}$. При этом оценка каждой из спектральных плотностей $f_j(\lambda)$ сконструирована таким образом, что ее математическое ожидание не зависит от спектральных плотностей $f_k(\lambda)$, $k \neq j$. Благодаря этому исследование смещения оценки спектральной плотности $f_j(\lambda)$ существенным образом упрощается.

В качестве финитных положительно определенных окон данных для домножения (неравномерного взвешивания) исходной реализации мы используем на этот раз B -сплайны Шёнберга, т.е. разложения в интеграл Фурье функций

$$\Phi_l(\mu) = \left\{ \frac{\sin(\mu/2)}{\mu/2} \right\}^{2l}, \quad l = 1, 2, \dots$$

Аргумент t B -сплайнов Шёнберга, как и аргумент ПНСП $X(t)$, пробегает все вещественные значения: $t \in \mathbf{R}$.

Заключение. Приведенные нами критические замечания к статьям И. Г. Журбенко [1], [2] свидетельствуют о том, что эти статьи мало в чем могут быть полезны читателю, приступающему к статистическому анализу того или иного ССП или

ПНСП. Никакая теория статистического оценивания старших спектральных плотностей немислима сегодня без учета и использования свойств их симметрии. Располагая результатами цитируемых выше работ [6]–[8], [17]–[22], [24]–[26] и [30]–[33], читатель получает возможность построить непараметрическую оценку интересующей его спектральной плотности и при этом избежать огромного перерасхода времени счета. Качество (скорость сходимости к оцениваемой спектральной плотности) предлагаемых нами статистических оценок заведомо не уступает качеству оценок, предлагаемых И. Г. Журбенко [9]. Прямое сопоставление двух оценок триспектральной плотности ССП $X(t)$ читатель найдет в работе [18, с. 436].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Журбенко И. Г. Спектральный семиинвариант. — Теория вероятностей и математическая статистика. Энциклопедия. Гл. ред. Ю. В. Прохоров. М.: Большая Российская энциклопедия, 1999, с. 640–641.
2. Журбенко И. Г. Спектральный анализ случайных процессов и полей. — Теория вероятностей и математическая статистика. Энциклопедия. Гл. ред. Ю. В. Прохоров. М.: Большая Российская энциклопедия, 1999, с. 639–640.
3. Van Ness J. W. Asymptotic normality of bispectral estimates. — Ann. Math. Statist., 1966, v. 37, № 5, p. 1257–1272.
4. Алексеев В. Г. Некоторые вопросы биспектрального анализа стационарных случайных процессов и однородных случайных полей. — Проблемы передачи информации, 1985, т. 21, № 4, с. 34–40.
5. Subba Rao T., Gabr M. M. An Introduction to Bispectral Analysis and Bilinear Time Series Models. New York: Springer-Verlag, 1984, 280 p. (Lecture Notes in Statist., v. 24.)
6. Алексеев В. Г. О свойствах симметрии старших спектральных плотностей стационарных случайных процессов. — Матем. заметки, 1987, т. 41, № 5, с. 758–763.
7. Алексеев В. Г. О свойствах симметрии старших спектральных плотностей и их непараметрических оценках. — Теория случайных процессов. Вып. 16. Киев: Наукова думка, 1988, с. 1–4.
8. Алексеев В. Г. Свойства симметрии старших спектральных плотностей многомерного стационарного случайного процесса. — Теория случайных процессов и ее приложения. Киев: Наукова думка, 1990, с. 3–8.
9. Журбенко И. Г. Анализ стационарных и однородных случайных систем. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1987, 240 с.
10. Swami A., Giannakis G. B., Zhou G. Bibliography on higher-order statistics. — Signal Processing, 1997, v. 60, № 1, p. 65–126.
11. Новиков А. К. Полиспектральный анализ. СПб.: ЦНИИ им. акад. А. Н. Крылова, 2002, 179 с.
12. Латышев В. В., Рыжак И. С. Применение моментов, кумулянтов и спектров высоких порядков в современных методах обработки сигналов. М.: Изд-во МАИ, 1998, 75 с.
13. Бриллинджер Д. Временные ряды. Обработка данных и теория. М.: Мир, 1980, 536 с.
14. Иванов А. Б. Параллелоэдр. — Математическая энциклопедия, т. 4. Гл. ред. И. М. Виноградов. М.: Сов. энциклопедия, 1984, 206 с.
15. Алексеев В. Г. Ядра типа Джексона и Джексона–Валле-Пуссена и их вероятностные применения. — Теория вероятн. и ее примен., 1996, т. 41, в. 1, с. 170–177.
16. Алексеев В. Г. Оценка спектральной плотности типа Уэлча. Случай дискретного аргумента. — Автометрия, 2001, № 6, с. 91–97.
17. Алексеев В. Г. Некоторые вопросы оценивания биспектральной плотности стационарного случайного процесса. — Проблемы передачи информации, 1983, т. 19, № 3, с. 38–51.

18. Алексеев В. Г. О некоторых свойствах статистических оценок старших спектральных плотностей. — Теория вероятн. и ее примен., 1990, т. 35, в. 3, с. 431–437.
19. Алексеев В. Г. Биспектральный анализ стационарных случайных процессов: выборки большого объема. — Автометрия, 1990, № 5, с. 23–28.
20. Алексеев В. Г. О некоторых важнейших свойствах периодограмм старших порядков. — Теория вероятн. и ее примен., 1995, т. 40, в. 3, с. 481–494.
21. Алексеев В. Г. Новые модификации периодограмм второго и третьего порядков. — Теория вероятн. и ее примен., 1997, т. 42, в. 4, с. 657–667.
22. Алексеев В. Г. О непараметрических методах прикладного биспектрального анализа. — Автометрия, 2006, т. 42, № 1, с. 13–22.
23. Ширяев А. Н. Вероятность-1. М.: МЦНМО, 2004, 519 с.
24. Алексеев В. Г. Об оценках триспектральной плотности стационарного случайного процесса. — Проблемы передачи информации, 1990, т. 26, № 1, с. 12–18.
25. Алексеев В. Г. Триспектральный анализ стационарных случайных процессов. Выборки большого объема. — Проблемы передачи информации, 1991, т. 27, № 2, с. 69–74.
26. Алексеев В. Г. Новая модификация кумулянтной периодограммы четвертого порядка. — Проблемы передачи информации, 1999, т. 35, № 3, с. 48–53.
27. Драган Я. П., Рожков В. А., Яворский И. Н. Методы вероятностного анализа ритмики океанологических процессов. Л.: Гидрометеиздат, 1987, 319 с.
28. Рытов С. М. Введение в статистическую радиофизику, ч. I. М.: Наука, 1976, 494 с.
29. Яглом А. М. Периодически коррелированный случайный процесс. — Теория вероятностей и математическая статистика. Энциклопедия. Гл. ред. Ю. В. Прохоров. М.: Большая Российская энциклопедия, 1999, с. 451.
30. Алексеев В. Г. О свойствах симметрии старших спектральных плотностей стационарных и периодически нестационарных случайных процессов. — Проблемы передачи информации, 1987, т. 23, № 3, с. 48–53.
31. Алексеев В. Г. О свойствах симметрии старших спектральных плотностей периодически нестационарных случайных процессов. — Доклады по математике и ее приложениям, 1988, т. 2, № 4, с. 480–483.
32. Алексеев В. Г. Эмпирический спектральный анализ периодически коррелированных случайных процессов. Альтернативный подход. — Проблемы передачи информации, 1997, т. 33, № 4, с. 61–69.
33. Алексеев В. Г. Некоторые вопросы статистического анализа периодически коррелированных временных рядов. — Изв. РАН. Сер. Физика атмосферы и океана, 2005, т. 41, № 1, с. 125–130.

Поступила в редакцию
10.VIII.2005

Исправленный вариант
12.II.2007

© 2009 г.

ВОЛОДИН И. Н.* , ПОНФИЛЕНКО М. Н.*

УТОЧНЯЮЩИЕ АППРОКСИМАЦИИ БЕТА-РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ПРИ МАЛЫХ ЗНАЧЕНИЯХ ПАРАМЕТРОВ

Разрабатывается метод последовательного уточнения аппроксимации бета-распределения при малых значениях параметров, предложенной в работе [4]. Находится асимптотика ошибки аппроксимации в терминах равномерного расстояния между распределениями.

* Казанский государственный университет, факультет вычислительной математики и кибернетики, кафедра математической статистики, 420008 Казань, Россия; e-mail: igor.volodin@ksu.ru