Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. Н. Володин, М. В. Понфиленок, Уточняющие аппроксимации бета-распределения при малых значениях параметров, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2009, том 54, выпуск 3, 573–579

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp2811>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.90.164.192

26 апреля 2023 г., 13:40:33

18. Алексеев В. Г. О некоторых свойствах статистических оценок старших спектральных плотностей. — Теория вероятн. и ее примен., 1990, т. 35, в. 3, с. 431–437.
19. Алексеев В. Г. Биспектральный анализ стационарных случайных процессов: выборки большого объема. — Автометрия, 1990, № 5, с. 23–28.
20. Алексеев В. Г. О некоторых важнейших свойствах периодограмм старших порядков. — Теория вероятн. и ее примен., 1995, т. 40, в. 3, с. 481–494.
21. Алексеев В. Г. Новые модификации периодограмм второго и третьего порядков. — Теория вероятн. и ее примен., 1997, т. 42, в. 4, с. 657–667.
22. Алексеев В. Г. О непараметрических методах прикладного биспектрального анализа. — Автометрия, 2006, т. 42, № 1, с. 13–22.
23. Ширяев А. Н. Вероятность-1. М.: МЦНМО, 2004, 519 с.
24. Алексеев В. Г. Об оценках триспектральной плотности стационарного случайного процесса. — Проблемы передачи информации, 1990, т. 26, № 1, с. 12–18.
25. Алексеев В. Г. Триспектральный анализ стационарных случайных процессов. Выборки большого объема. — Проблемы передачи информации, 1991, т. 27, № 2, с. 69–74.
26. Алексеев В. Г. Новая модификация кумулянтной периодограммы четвертого порядка. — Проблемы передачи информации, 1999, т. 35, № 3, с. 48–53.
27. Драган Я. П., Рожков В. А., Яворский И. Н. Методы вероятностного анализа ритмики океанологических процессов. Л.: Гидрометеиздат, 1987, 319 с.
28. Рытов С. М. Введение в статистическую радиофизику, ч. I. М.: Наука, 1976, 494 с.
29. Яглом А. М. Периодически коррелированный случайный процесс. — Теория вероятностей и математическая статистика. Энциклопедия. Гл. ред. Ю. В. Прохоров. М.: Большая Российская энциклопедия, 1999, с. 451.
30. Алексеев В. Г. О свойствах симметрии старших спектральных плотностей стационарных и периодически нестационарных случайных процессов. — Проблемы передачи информации, 1987, т. 23, № 3, с. 48–53.
31. Алексеев В. Г. О свойствах симметрии старших спектральных плотностей периодически нестационарных случайных процессов. — Доклады по математике и ее приложениям, 1988, т. 2, № 4, с. 480–483.
32. Алексеев В. Г. Эмпирический спектральный анализ периодически коррелированных случайных процессов. Альтернативный подход. — Проблемы передачи информации, 1997, т. 33, № 4, с. 61–69.
33. Алексеев В. Г. Некоторые вопросы статистического анализа периодически коррелированных временных рядов. — Изв. РАН. Сер. Физика атмосферы и океана, 2005, т. 41, № 1, с. 125–130.

Поступила в редакцию
10.VIII.2005

Исправленный вариант
12.II.2007

© 2009 г.

ВОЛОДИН И. Н.*, ПОНФИЛЕНКО М. Н.*

УТОЧНЯЮЩИЕ АППРОКСИМАЦИИ БЕТА-РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ПРИ МАЛЫХ ЗНАЧЕНИЯХ ПАРАМЕТРОВ

Разрабатывается метод последовательного уточнения аппроксимации бета-распределения при малых значениях параметров, предложенной в работе [4]. Находится асимптотика ошибки аппроксимации в терминах равномерного расстояния между распределениями.

* Казанский государственный университет, факультет вычислительной математики и кибернетики, кафедра математической статистики, 420008 Казань, Россия; e-mail: igor.volodin@ksu.ru

Ключевые слова и фразы: бета-распределение, малые значения параметров, аппроксимация распределения, ошибка аппроксимации.

1. Введение. Асимптотическое исследование бета-распределения

$$I(x) = I(x; \alpha, \beta) = \frac{1}{B(\alpha, \beta)} \int_0^x t^{\alpha-1} (1-t)^{\beta-1} dt,$$

$0 \leq x \leq 1$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$, при $\varepsilon = \alpha + \beta \rightarrow 0$ было предпринято в работе [4] в связи с изданием на русском языке [3] таблиц К. Пирсона [2]. Интерполяция табличных данных при малых значениях параметров вызывала большие трудности и делала невозможным использование таблиц во всей области параметрического пространства. Естественно, в настоящее время вместо таблиц целесообразнее использовать компьютер, обращаясь, скажем, к пакету Mathematica. Тем не менее, применение таких асимптотик может оказаться полезным при решении ряда задач байесовского подхода, когда статистик имеет дело с последовательностями статистических экспериментов в рамках схемы Бернулли, причем вероятность успеха может принимать только значения, близкие к нулю или к единице (об использовании бета-распределения в рамках байесовского подхода см. [1, гл. 13]).

Для решения таких задач в работе [4] была построена аппроксимация

$$J(x) = J(x; \alpha, \beta) = (1 - \gamma) \left(\frac{x}{1-x} \right)^\alpha, \quad 0 \leq x \leq \frac{1}{2}, \quad \gamma = \frac{\alpha}{\varepsilon},$$

для которой, как и для функции бета-распределения, справедлива формула распространения $J(x; \alpha, \beta) = 1 - J(1-x; \beta, \alpha)$, если $\frac{1}{2} \leq x \leq 1$. Это обстоятельство позволяет нам в дальнейшем ограничиться рассмотрением только области $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$.

В [4] также исследовалась точность аппроксимации $J(x)$. Было показано, что при $\alpha, \beta \leq 1$ разность $\delta(x) = I(x) - J(x)$ имеет два экстремума: положительный максимум в точке $x_1 = 1 - A^{-1/\varepsilon} < 0.5$ и отрицательный минимум в точке $x_2 = A^{-1/\varepsilon} > 0.5$, где

$$A = \frac{\Gamma(1 + \varepsilon)}{\Gamma(1 + \alpha)\Gamma(1 + \beta)},$$

причем x_1 доставляет абсолютный максимум функций $|\delta(x)|$ (ошибки Δ аппроксимации в равномерной метрике), если $\alpha \leq \beta$. Интегральное представление

$$\delta(x) = A\beta \int_0^x t^\alpha (1-t)^{\beta-1} dt \tag{1}$$

позволило получить ряд возрастающих по величине оценок сверху для ошибки Δ , из которых самая простая и самая грубая такова: $\Delta \leq \varepsilon^2$. Все эти оценки приведены во введении к таблицам [3], а также в монографии [1] (см. с. 28–29), представляющей обширнейший материал по различным приложениям бета-распределения.

Следует заметить, что формула (1) позволяет также найти асимптотику ($\varepsilon \rightarrow 0$) ошибки Δ , что не было сделано в [4]. Предполагая в дальнейшем, что $\alpha \leq \beta$, и делая достаточно простые вычисления, связанные с разложением в ряд Тейлора, получаем

$$x_1 = \frac{\alpha\beta}{\alpha + \beta} \frac{\pi^2}{6} + O(\varepsilon^2),$$

откуда

$$\Delta = \delta(x_1) = \frac{\alpha\beta^2}{\varepsilon} \frac{\pi^2}{6} + O(\varepsilon^3). \tag{2}$$

Именно такую асимптотику имеют две наиболее точные оценки сверху для значений Δ , указанные в самом начале формулировки основной теоремы статьи [4].

Основная цель нашей статьи — построить ряд уточняющих аппроксимаций $J_n(x)$, $n = 1, 2, \dots$, бета-распределения, основанных на стохастическом представлении, полученном в начале п. 2 статьи [4], и найти асимптотическое представление для ошибки

полученной аппроксимации в равномерной метрике. Такая асимптотика позволяет за счет выбора большого значения n сделать главный член асимптотики (2) сколько угодно малым.

2. Построение уточняющих аппроксимаций. В п. 2 статьи [4] было показано, что если ξ — случайная величина с функцией распределения $I(x)$, то преобразование ξ вида $\eta = \varepsilon \ln[\xi/(1-\xi)]$ имеет следующее стохастическое представление:

$$\eta = \sum_{k=1}^n (\xi_{2,k} - \xi_{1,k}) + \xi_{3,n},$$

где случайные величины $\xi_{i,k}$, $k = 1, \dots, n$, $i = 1, 2$, и $\xi_{3,n}$ независимы в совокупности, $\xi_{1,k}$ имеет показательное распределение $1 - \exp\{-\theta x\}$ с параметром $\theta = (k + \alpha - 1)/\varepsilon$, случайная величина $\xi_{2,k}$ также распределена по показательному закону с параметром $\theta = (k + \beta - 1)/\varepsilon$, $k = 1, \dots, n$, а $\xi_{3,n} = \varepsilon \ln[\varphi_n/(1 - \varphi_n)]$, где φ_n имеет бета-распределение с параметрами $\alpha + n$ и $\beta + n$. Таким образом, φ_n асимптотически ($n \rightarrow \infty$) нормальна с параметрами

$$\mathbf{E} \varphi_n = \frac{\alpha + n}{\varepsilon + 2n}, \quad \mathbf{D} \varphi_n = \frac{(\alpha + n)(\beta + n)}{(1 + \varepsilon + 2n)(\varepsilon + 2n)^2},$$

так что при $n \rightarrow \infty$ имеем $\varphi_n \rightarrow \frac{1}{2}$, а $\xi_{3,n} \rightarrow 0$ по вероятности.

Наша ближайшая цель — сначала найти распределение случайной величины

$$\eta_n = \sum_{k=1}^n (\xi_{2,k} - \xi_{1,k}),$$

а затем распределение J_n случайной величины ξ_n , определяемой соотношением $\eta_n = \varepsilon \ln[\xi_n/(1 - \xi_n)]$. Таким образом мы получим уточнение $J_n(x)$ аппроксимации $J_1(x) = J(x)$, найденной в статье [4].

Лемма 1. Пусть $\xi_1, \dots, \xi_n$ независимы и каждое ξ_k имеет показательное распределение с параметром $\theta = (\alpha + k - 1)/\varepsilon$, $k = 1, \dots, n$. Тогда функция распределения их суммы

$$\begin{aligned} G_n(x, \alpha) &= \mathbf{P}\left(\sum_{k=1}^n \xi_k < x\right) \\ &= 1 - \exp\left\{-\frac{\alpha x}{\varepsilon}\right\} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\Gamma(\alpha + k)}{k! \Gamma(\alpha)} \left(1 - \exp\left\{-\frac{x}{\varepsilon}\right\}\right)^k. \end{aligned} \quad (3)$$

Доказательство легко провести, применяя метод полной математической индукции и используя очевидное рекуррентное соотношение

$$G_{n+1}(x, \alpha) = \frac{\alpha}{\varepsilon} \int_0^x \exp\left\{-\frac{\alpha t}{\varepsilon}\right\} G_n(x - t, \alpha + 1) dt. \quad (4)$$

Случай $n = 1$ не требует каких-либо вычислений, и предположение, что (3) справедливо для некоторого n приводит к необходимости проверить справедливость соотношения (4) для распределения (3), т.е. доказать равенство

$$\begin{aligned} &1 - \exp\left\{-\frac{\alpha x}{\varepsilon}\right\} - \frac{\alpha}{\varepsilon} \exp\left\{-\frac{(\alpha + 1)x}{\varepsilon}\right\} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\Gamma(k + \alpha + 1)}{k! \Gamma(\alpha + 1)} \\ &\quad \times \int_0^x \exp\left\{-\frac{t}{\varepsilon}\right\} \left(1 - \exp\left\{-\frac{x - t}{\varepsilon}\right\}\right)^k dt \\ &= 1 - \exp\left\{-\frac{\alpha x}{\varepsilon}\right\} \sum_{k=0}^n \frac{\Gamma(k + \alpha)}{k! \Gamma(\alpha)} \left(1 - \exp\left\{-\frac{x}{\varepsilon}\right\}\right)^k. \end{aligned}$$

Замена $x - t = s$ упрощает вычисление интеграла в левой части этого равенства, после чего его справедливость устанавливается сдвигом индекса суммирования.

Чтобы упростить интегрирование и вывод асимптотического разложения, удобнее представить функцию G_n в виде многочлена от переменной $\exp\{-x/\varepsilon\}$. Для этого в формуле (3) разложим в сумму бином $(1 - \exp\{-x/\varepsilon\})^k$, изменим порядок суммирования, суммируя сначала по индексу i , а потом по k , и введем обозначения

$$a_{n,i}(\alpha) = \sum_{k=i}^{n-1} (-1)^i C_k^i \frac{\Gamma(\alpha+k)}{k! \Gamma(\alpha)}.$$

В результате функция распределения принимает вид

$$G_n(x, \alpha) = \sum_{i=0}^{n-1} a_{n,i}(\alpha) \exp\left\{-\frac{(\alpha+i)x}{\varepsilon}\right\}.$$

Найдем теперь функцию распределения $F_n(x) = F_n(x; \alpha, \beta)$ случайной величины $\eta_n = \xi_2 - \xi_1$, где ξ_1 и ξ_2 независимы и имеют функции распределения $G_n(x, \alpha)$ и $G_n(x, \beta)$ соответственно (см. (3)). Так как, очевидно,

$$F_n(x; \alpha, \beta) = 1 - F_n(-x; \beta, \alpha), \quad (5)$$

то достаточно рассмотреть только один из случаев $x > 0$ или $x < 0$.

Лемма 2. Если $x < 0$, то

$$F_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} b_{n,k}(\alpha, \beta) \exp\left\{-\frac{(\alpha+k)x}{\varepsilon}\right\}, \quad (6)$$

где

$$b_{n,k}(\alpha, \beta) = a_{n,k}(\alpha) \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\beta+i}{\varepsilon+i+k} a_{n,i}(\beta). \quad (7)$$

Доказательство. Пусть g_n — функция плотности распределения G_n . Если $x > 0$, то искомое распределение имеет вид

$$F_n(x) = \int_0^\infty g_n(t, \alpha) G_n(t+x, \beta) dt = 1 - \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\alpha+i}{\varepsilon+i+k} \exp\left\{-\frac{(\beta+k)x}{\varepsilon}\right\}, \quad (8)$$

поскольку $\sum_{i=0}^{n-1} a_{n,i}(\alpha) = 1$.

Мы будем вычислять аппроксимацию $J_n(x)$ при $x < \frac{1}{2}$, а этим значениям соответствует область $x < 0$ функции $F_n(x)$. Применяя соотношение (5) к правой части формулы (8), получаем утверждение леммы.

Последовательность J_n , $n = 1, 2, \dots$, уточняющих аппроксимаций бета-распределения при $\varepsilon \rightarrow 0$ вычисляется в следующей теореме.

Теорема 1. Если $x < \frac{1}{2}$, то

$$J_n(x; \alpha, \beta) = \sum_{k=0}^{n-1} b_{n,k}(\alpha, \beta) \left(\frac{x}{1-x}\right)^{\alpha+k},$$

где $b_{n,k}(\alpha, \beta)$ вычисляется по формуле (7), и $J_n(x; \alpha, \beta) = 1 - J_n(1-x; \beta, \alpha)$, когда $x \geq \frac{1}{2}$.

Доказательство получается простой заменой в формуле (6) переменной x на $\varepsilon \ln[x/(1-x)]$.

Коэффициентам $b_{n,k} = b_{n,k}(\alpha, \beta)$, $k = 0, 1, \dots, n-1$, в записи аппроксимации J_n можно придать более простой вид, а именно,

$$b_{n,k} = \frac{(-1)^k}{k! (n-1-k)! (\alpha+k)} \prod_{i=0}^{n-1} \frac{(\alpha+i)(\beta+i)}{\varepsilon+k+i}. \quad (9)$$

Действительно, делая последовательно почленные сложения и применяя метод индукции, легко убедиться, что

$$a_{n,0}(\alpha) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\Gamma(\alpha+k)}{\Gamma(\alpha)k!} = \frac{(\alpha+1)(\alpha+2)\cdots(\alpha+n-1)}{(n-1)!}. \quad (10)$$

Для произвольного $i = 1, \dots, n-1$ осуществляем следующие преобразования:

$$a_{n,i}(\alpha) = \frac{(-1)^i}{i!} \sum_{k=i}^{n-1} \frac{\Gamma(\alpha+k)}{\Gamma(\alpha)(k-i)!} = \frac{(-1)^i}{i!} \sum_{k=0}^{n-1-i} \frac{\Gamma(\alpha+k+i)}{\Gamma(\alpha)k!}.$$

Теперь к последней сумме применяем те же почленные сложения, что и при выводе формулы (10). Следовательно,

$$a_{n,i}(\alpha) = (-1)^i \frac{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-1)}{i!(n-1-i)!(\alpha+i)}, \quad i = 0, 1, \dots, n-1.$$

После подстановки полученных выражений в правую часть (7) доказательство формулы (9) сводится к вычислению следующей суммы:

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i C_{n-1}^i \frac{1}{\varepsilon+k+i} &= \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i C_{n-1}^i \int_0^1 x^{\varepsilon+k+i-1} dx \\ &= \int_0^1 x^{\varepsilon+k-1} (1-x)^{n-1} dx = \frac{\Gamma(\varepsilon+k)\Gamma(n)}{\Gamma(\varepsilon+k+n)}. \end{aligned}$$

Приведем несколько первых аппроксимаций $J_n(x; \alpha, \beta)$ бета-распределения в области $x < \frac{1}{2}$:

$$\begin{aligned} J_1(x) &= \frac{\beta}{\alpha+\beta} \left(\frac{x}{1-x} \right)^\alpha, \\ J_2(x) &= \frac{\beta(\beta+1)}{\alpha+\beta+1} \left(\frac{x}{1-x} \right)^\alpha \left(\frac{\alpha+1}{\alpha+\beta} - \frac{\alpha}{\alpha+\beta+2} \frac{x}{1-x} \right), \\ J_3(x) &= \frac{\beta(\beta+1)(\beta+2)}{\alpha+\beta+2} \left(\frac{x}{1-x} \right)^\alpha \left[\frac{(\alpha+1)(\alpha+2)}{2(\alpha+\beta)(\alpha+\beta+1)} \right. \\ &\quad \left. - \frac{\alpha(\alpha+2)}{(\alpha+\beta+1)(\alpha+\beta+3)} \frac{x}{1-x} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\alpha(\alpha+1)}{2(\alpha+\beta+3)(\alpha+\beta+4)} \left(\frac{x}{1-x} \right)^2 \right]. \end{aligned}$$

3. Асимптотическое исследование точности аппроксимаций. Точность Δ аппроксимации J_n в равномерной метрике равна наибольшему по абсолютной величине экстремуму функции

$$\delta(x) = I(x; \alpha, \beta) - J_n(x; \alpha, \beta), \quad 0 \leq x \leq 1.$$

Исследуем сначала асимптотику точек достижения экстремумов функции $\delta(x)$ на отрезке $[0; \frac{1}{2}]$. Как будет видно в дальнейшем, полученная асимптотика будет соответствовать точке достижения абсолютного максимума $\delta(\cdot)$, если $\alpha \leq \beta$.

Лемма 3. Существует такое ε_0 , что при любом $\varepsilon < \varepsilon_0$ функция $\delta(x)$ на отрезке $[0; \frac{1}{2}]$ имеет единственный максимум в точке

$$x_m = \frac{\alpha\beta}{\varepsilon} n\psi'(n) + O(\varepsilon^2), \quad (11)$$

где ψ' — тригамма-функция Эйлера, при целочисленном аргументе определяемая формулой

$$\psi'(n) = \frac{\pi^2}{6} - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k^2}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Используя формулу (9) в записи аппроксимации J_n , представим уравнение $I'(x) = J'_n(x)$, определяющее экстремумы функции $\delta(x)$, в виде

$$(1-x)^\varepsilon = A \left[1 + \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^k C_{n-1}^k \left(\frac{x}{1-x} \right)^k \cdot \prod_{i=0}^{n-1} \frac{\varepsilon + i}{\varepsilon + k + i} \right], \quad (12)$$

где

$$A = \frac{\Gamma(\alpha+n)\Gamma(\beta+n)}{\Gamma(\varepsilon+n)\Gamma(n)} = \exp\{-\alpha\beta\psi(n) + O(\varepsilon^3)\}.$$

Данная асимптотика величины A и вид уравнения (12) показывают, что при $\varepsilon \rightarrow 0$ точка достижения максимума x_m стремится к 0. Следовательно, уравнение (12) можно представить в асимптотическом виде

$$(1-x)^\varepsilon = A \left(1 - \varepsilon \frac{n-1}{n} x + O(x^2) \right).$$

Логарифмируя обе части этого уравнения и применяя асимптотическую формулу $\ln(1+x) = x + O(x^2)$, находим, что $\ln A + \varepsilon x/n + O(x^2) = 0$, откуда непосредственно следует утверждение леммы.

Используя формулу распространения, нетрудно убедиться, что при $\varepsilon \rightarrow 0$ функция $\delta(x)$ в области $\frac{1}{2} < x \leq 1$ обладает отрицательным минимумом в точке $x = 1 - x_m$.

Точность аппроксимации J_n устанавливает следующая теорема.

Теорема 2. Если $\varepsilon \rightarrow 0$, то

$$\Delta = \max_{0 < x < 1} |\delta(x)| = \frac{\alpha\beta}{\varepsilon} \psi'(n) \cdot \max\{\alpha, \beta\} + O(\varepsilon^3).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если $0 < x < \frac{1}{2}$, то при $\alpha \leq \beta$ максимум ошибки аппроксимации достигается в точке $x_m < \frac{1}{2}$. Следовательно,

$$\begin{aligned} \Delta_{(0,1/2)} &= \frac{1}{\Gamma(n)} \prod_{i=0}^{n-1} \frac{(\alpha+i)(\beta+i)}{\varepsilon+i} \\ &\times \int_0^{x_m} \left[\frac{(1-x)^\varepsilon}{A} - 1 - \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^k C_{n-1}^k \left(\frac{x}{1-x} \right)^k \cdot \prod_{i=0}^{n-1} \frac{\varepsilon+i}{\varepsilon+k+i} \right] \\ &\times \left(\frac{x}{1-x} \right)^{\alpha-1} d\left(\frac{x}{1-x} \right). \end{aligned}$$

Выражение под интегралом, стоящее в квадратных скобках, обращается в нуль, когда $x = x_m$, и поэтому интегрирование по частям (множитель под интегралом, стоящий после квадратных скобок, берется за dv) дает

$$\begin{aligned} \Delta_{(0,1/2)} &= \frac{1}{\Gamma(n)} \prod_{i=0}^{n-1} \frac{(\alpha+i)(\beta+i)}{\varepsilon+i} \cdot \frac{1}{\alpha} \int_0^{x_m} \left(\frac{x}{1-x} \right)^\alpha \left[\frac{\varepsilon(1-x)^{\varepsilon-1}}{A} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{(1-x)^2} \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^k C_{n-1}^k k \left(\frac{x}{1-x} \right)^{k-1} \cdot \prod_{i=0}^{n-1} \frac{\varepsilon+i}{\varepsilon+k+i} \right] dx. \end{aligned}$$

Разложение Тейлора по степеням x_m с сохранением главных асимптотических членов показывает, что

$$\Delta_{(0,1/2)} = \frac{\alpha\beta^2}{\varepsilon} \psi'(n) + O(\varepsilon^3).$$

Аналогичные вычисления в области $\frac{1}{2} < x < 1$ дают

$$\Delta_{(1/2,1)} = \frac{\alpha^2\beta}{\varepsilon} \psi'(n) + O(\varepsilon^3).$$

Теорема доказана.

Поскольку при $n \rightarrow \infty$ справедлива асимптотика $\psi'(n) \sim n^{-1}$, то использование J_n вместо J_1 увеличивает точность аппроксимации приблизительно в n раз.

В таблице 1 приводятся точные значения величины Δ и ее асимптотики (в скобках), указанные в формулировке теоремы 2. Из данных таблицы можно заметить, что на точность аппроксимации влияют не столько большие значения n , сколько малые значения параметров α и β .

Таблица 1. Ошибки аппроксимации J_n

n	$\alpha = 0.5, \beta = 0.05$		$\alpha = 0.1, \beta = 0.5$		$\alpha = 0.01, \beta = 0.5$	
1	0.045273	(0.205617)	0.035898	(0.068539)	0.005684	(0.008063)
2	0.021820	(0.080617)	0.016692	(0.026872)	0.002602	(0.003161)
3	0.014208	(0.049367)	0.010781	(0.016456)	0.001674	(0.001936)
5	0.008323	(0.027665)	0.006288	(0.009222)	0.000975	(0.001085)
7	0.005876	(0.019193)	0.004434	(0.006398)	0.000687	(0.000753)
10	0.004074	(0.013146)	0.003073	(0.004382)	0.000476	(0.000516)
n	$\alpha = 0.001, \beta = 0.5$		$\alpha = 10^{-4}, \beta = 0.05$		$\alpha = 0.1, \beta = 0.1$	
1	0.000608	(0.000821)	0.000061	(0.000082)	0.005064	(0.008225)
2	0.000277	(0.000322)	0.000028	(0.000032)	0.002096	(0.003225)
3	0.000179	(0.000197)	0.000018	(0.000020)	0.001302	(0.001975)
5	0.000104	(0.000110)	0.000010	(0.000011)	0.000737	(0.001107)
7	0.000073	(0.000077)	0.000007	(0.000008)	0.000513	(0.000768)
10	0.000051	(0.000052)	0.000005	(0.000005)	0.000352	(0.000526)
n	$\alpha = 0.01, \beta = 0.1$		$\alpha = 0.001, \beta = 0.1$		$\alpha = 10^{-4}, \beta = 0.1$	
1	0.001315	(0.001495)	0.000151	(0.000163)	0.000015	(0.000008)
2	0.000537	(0.000589)	0.000061	(0.000064)	0.000006	(0.000006)
3	0.000333	(0.000359)	0.000038	(0.000039)	0.000004	(0.000004)
5	0.000188	(0.000201)	0.000022	(0.000022)	0.000002	(0.000002)
7	0.000131	(0.000140)	0.000015	(0.000015)	0.000002	(0.000002)
10	0.000090	(0.000096)	0.000010	(0.000010)	0.000001	(0.000001)
n	$\alpha = 0.01, \beta = 0.01$		$\alpha = 0.001, \beta = 0.01$		$\alpha = 10^{-4}, \beta = 0.01$	
1	0.000076	(0.000082)	0.000015	(0.000015)	0.000002	(0.000002)
2	0.000030	(0.000032)	0.000006	(0.000006)	0.000001	(0.000001)
3	0.000018	(0.000020)	0.000004	(0.000004)	0.000000	(0.000000)
5	0.000010	(0.000011)	0.000002	(0.000002)	0.000000	(0.000000)
7	0.000007	(0.000008)	0.000001	(0.000001)	0.000000	(0.000000)
10	0.000005	(0.000005)	0.000001	(0.000001)	0.000000	(0.000000)

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Gupta A. K., Nadarajah S.* (Eds.). Handbook of Beta Distribution and its Application. New York: Dekker, 2004, 571 p.
2. *Pearson K.* Tables of the Incomplete Beta Function. London: Cambridge Univ. Press, 1968, 505 p.
3. *Пирсон К.* Таблицы неполной бета-функции. М.: ВЦ АН СССР, 1974, 540 с.
4. *Володин И. Н.* Бета-распределение при малых значениях параметров. — Теория вероятн. и ее примен., 1970, т. 15, в. 3, с. 563–566.

Поступила в редакцию
29.III.2006

Исправленный вариант
14.IV.2009