Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Я. А. Люлько, Стохастические представления функционалов “максимального” типа от случайного блуждания, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2009, том 54, выпуск 3, 580–589

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp2812>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.127.20

26 апреля 2023 г., 06:57:27

© 2009 г.

ЛЮЛЬКО Я. А.*

СТОХАСТИЧЕСКИЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ФУНКЦИОНАЛОВ «МАКСИМАЛЬНОГО» ТИПА ОТ СЛУЧАЙНОГО БЛУЖДЕНИЯ

В работе исследованы вопросы отыскания стохастических представлений для функционалов $F = F(\omega)$ от случайного блуждания. Получены как обычные, так и многократные представления следующих функционалов: $F_N = \max_{k \leq N} S_k$, $F_{\tau_{-a}} = \max_{k \leq \tau_{-a}} S_k$, где τ_{-a} — первый момент достижения случайным блужданием уровня $-a$, $a \in \mathbf{N}$, а также представление функционала $F_{g_N} = \max_{k \leq g_N} S_k$, где g_N — момент последнего нуля случайного блуждания на множестве $(0, N]$.

Ключевые слова и фразы: случайное блуждание, многократное стохастическое представление, мах-функционалы, марковские моменты.

Введение. Рассмотрим бернуллиевское случайное блуждание $S_k = \xi_1 + \dots + \xi_k$, $S_0 = 0$, где $\mathbf{P}(\xi_i = 1) = \mathbf{P}(\xi_i = -1) = 1/2$, $i \geq 1$, и величины $\xi_1, \dots, \xi_n, \dots$ независимы. Пусть блуждание $(S_k)_{k \geq 0}$ задано на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$. Будем обозначать через $\mathbf{F}$ фильтрацию $(\mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$, $\mathcal{F}_n = \sigma(\xi_i, i \leq n)$, порожденную случайным блужданием. Положим также $\mathcal{F}_\infty = \sigma(\bigcup_{n \geq 0} \mathcal{F}_n)$, $\Delta S_k = S_k - S_{k-1}$.

Однократные представления для функционалов от случайного блуждания, полученные в настоящей работе, являются дискретными аналогами представлений для функционалов от броуновского движения $(B_t)_{t \geq 0}$, полученных в работах [1], [2]. В случае непрерывного времени существование однократных представлений для класса квадратично интегрируемых $\mathcal{F}_T^B$ -измеримых функционалов (где $(\mathcal{F}_t^B)_{t \in [0, T]}$ — естественная фильтрация броуновского движения) гарантирует теорема Ито–Кларка (см. [4, с. 303]).

Многократные стохастические представления в непрерывном времени строятся на основе многомерных интегралов Ито от *детерминированных* функций $f \in L^2([0, T]^n)$. Идея построения этих интегралов та же, что и в случае одномерных интегралов Ито: сначала интеграл определяется для класса ступенчатых функций специального вида (см. [6]), а затем предельным переходом в $L^2(\Omega)$ он определяется и для функций $f \in L^2([0, T]^n)$. В итоге получается многомерный стохастический интеграл

$$I_n(f) = \int_{[0, T]^n} f(t_1, \dots, t_n) dB_{t_1} \cdots dB_{t_n}$$

со следующими свойствами:

1) $I_n(f) = I_n(\hat{f})$, где $\hat{f}(t_1, \dots, t_n) = (n!)^{-1} \sum_{\sigma \in \Sigma_n} f(t_{\sigma(1)}, \dots, t_{\sigma(n)})$ — *симметризация* функции $f \in L^2([0, T]^n)$ (Σ_n обозначает совокупность всех подстановок на множестве $\{1, \dots, n\}$);

2) $\mathbf{E}[I_n(f)] = 0$ для $f \in L^2([0, T]^n)$;

3) $\mathbf{E}[I_n^2(f)] = n! \|\hat{f}\|^2$ для $f \in L^2([0, T]^n)$;

4) если $n \neq m$ и $f, g \in L^2([0, T]^n)$, то $\mathbf{E}[I_n(f)I_m(g)] = 0$.

Обозначим $L_{\text{sym}}^2([0, T]^n)$ класс квадратично интегрируемых симметричных функций, т.е. таких функций $f \in L^2([0, T]^n)$, что для любой подстановки $\sigma \in \Sigma_n$ выполнено равенство $f(t_{\sigma(1)}, \dots, t_{\sigma(n)}) = f(t_1, \dots, t_n)$. Справедлива следующая теорема (см. [6]), являющаяся многомерным аналогом теоремы Ито–Кларка.

* Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, механико-математический факультет, кафедра теории вероятностей, Ленинские горы 1, 119992 Москва, Россия; e-mail: yaroslav.lyulko@gmail.ru

Теорема 1 (Винера–Ито). Пусть функционал $F = F(\omega)$ является $\mathcal{F}_T^B$ -измеримым и $\mathbf{E} F^2 < \infty$. Тогда для него существует, и притом единственное, многократное стохастическое представление

$$F = \mathbf{E} F + \sum_{n=1}^{+\infty} I_n(f_n), \quad \text{где } f_n \in L_{\text{sym}}^2([0, T]^n),$$

называемое представлением хаоса.

Однако сразу же возникает вопрос о нахождении явного вида функций f_n . Ответ дается с помощью понятия вариационной производной $\frac{\delta}{\delta t}$:

$$f_n(t_1, \dots, t_n) = \frac{1}{n!} \mathbf{E} \left[\frac{\delta^n}{\delta t_1 \cdots \delta t_n} F \right],$$

где F — $\mathcal{F}_T^B$ -измеримый квадратично интегрируемый функционал, для которого ищется представление (подробнее см. в [6], [7]).

В настоящей работе строятся многократные представления для функционалов от случайного блуждания. В п. 2.1 находится многократное представление случайной величины $f(\xi_1, \dots, \xi_n)$ (где $f: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ — произвольная функция), а в пп. 2.2 и 2.3 с помощью этого представления получаются многократные представления функционалов F_N и $F_{\tau-a}$. При этом существенно используются полученные в разделе 1 однократные представления.

1. Однократные представления.

1.1. Случай $F_N = \max_{0 \leq k \leq N} S_k$. Всюду далее будем использовать следующие обозначения: $C_x^n = x(x-1) \cdots (x-n+1)/n!$ для $x \in \mathbf{R}$, $n \in \mathbf{N}$; $[a]$ — целая часть числа a , $\lceil a \rceil$ — наименьшее целое, не меньшее a .

Теорема 2. Для $F_N = \max_{k \leq N} S_k$ справедливо следующее стохастическое представление:

$$\max_{0 \leq n \leq N} S_n = \mathbf{E} \left(\max_{0 \leq n \leq N} S_n \right) + \sum_{k=1}^N G_{N-k+1}(F_{k-1} - S_{k-1}) \Delta S_k, \quad (1)$$

где

$$\begin{aligned} & G_{N-k+1}(F_{k-1} - S_{k-1}) \\ &= \sum_{r=F_{k-1}-S_{k-1}+1}^{N-k+1} \sum_{l=0}^{\lfloor (N-k+1-r)/2 \rfloor} (-1)^{\lfloor (N-k+1-r)/2 \rfloor - l} C_{-1/2}^{\lfloor (N-k+1-r)/2 \rfloor - l} \varphi_{r+2l}(r), \\ & \varphi_k(m) = \frac{m}{k \cdot 2^k} C_k^{(m+k)/2}, \quad \mathbf{E} \left(\max_{0 \leq n \leq N} S_n \right) \sim \sqrt{\frac{2N}{\pi}} \quad \text{при } N \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Доказательство. Пусть ξ — неотрицательная случайная величина, тогда для нее справедливо представление $\xi = \int_0^{+\infty} I(\xi \geq a) da$. Отсюда имеем

$$F_N = \int_0^{+\infty} I \left(\max_{0 \leq k \leq N} S_k \geq a \right) da = \int_0^{+\infty} I(N_a \leq N) da,$$

где $N_a = \inf\{k \geq 0: S_k \geq a\} = \inf\{k \geq 0: S_k = \lceil a \rceil\} = N_{\lceil a \rceil}$, $a \geq 0$.

Получим теперь представление для $I(N_a \leq N)$, для чего рассмотрим дискретную стохастическую экспоненту, определенную для $\lambda \in (0, 1)$ следующим образом;

$$\mathcal{E}_n(S) = \prod_{k=1}^n (1 + \lambda \Delta S_k) = (\sqrt{1 - \lambda^2})^n \left(\sqrt{\frac{1 + \lambda}{1 - \lambda}} \right)^{S_n}, \quad \mathcal{E}_0(S) := 1.$$

Заметим, что эта функция удовлетворяет разностному уравнению $\Delta \mathcal{E}_n(S) = \lambda \mathcal{E}_{n-1}(S) \Delta S_n$ и является мартингалом относительно фильтрации $(\mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$. Обозначим $\alpha = \sqrt{1 - \lambda^2}$, $\beta = \sqrt{(1 + \lambda)/(1 - \lambda)}$. Тогда $\mathbf{E}[\mathcal{E}_n(S) | I(N_a > n)] =$

$\mathbf{E}[\mathcal{E}_n(S)I(\max_{0 \leq k \leq n} S_k < a)] \leq \mathbf{E}[\mathcal{E}_n(S)I(S_n < a)] = \alpha^n \mathbf{E}[\beta^{S_n} I(S_n < a)] \leq \alpha^n \beta^a$. Так как $\alpha < 1$, то получаем, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{E}(|\mathcal{E}_n(S)|I(N_a > n)) = 0$. Поэтому выполнены условия теоремы Дуба об остановке для мартингалов и справедливы соотношения (P-п.н.)

$$\mathbf{E}(\mathcal{E}_{N_a} | \mathcal{F}_n) = \mathcal{E}_{N_a \wedge n} = 1 + \sum_{k=1}^{N_a \wedge n} \Delta \mathcal{E}_k = 1 + \lambda \sum_{k=1}^{N_a \wedge n} \mathcal{E}_{k-1} \Delta S_k.$$

В силу того, что $S_{N_a} = [a]$, имеем

$$\mathbf{E}(\mathcal{E}_{N_a} | \mathcal{F}_n) = (\sqrt{(1+\lambda)/(1-\lambda)})^{[a]} \mathbf{E}((\sqrt{1-\lambda^2})^{N_a} | \mathcal{F}_n).$$

Так как для всех $n \in \mathbf{N}$ справедливо $\mathcal{E}_{N_a \wedge n}(S) \leq (\sqrt{(1+\lambda)/(1-\lambda)})^{[a]}$, то из теоремы Дуба об остановке для мартингалов следует, что $\mathbf{E} \mathcal{E}_{N_a} = \mathbf{E} \mathcal{E}_n = 1$, поэтому $\mathbf{E}(\sqrt{1-\lambda^2})^{N_a} = (\sqrt{(1+\lambda)/(1-\lambda)})^{-[a]}$. Следовательно,

$$\begin{aligned} & \mathbf{E}((\sqrt{1-\lambda^2})^{N_a} | \mathcal{F}_n) \\ &= \mathbf{E}(\sqrt{1-\lambda^2})^{N_a} + \lambda \sum_{k=1}^{N_a \wedge n} \left(\sqrt{\frac{1+\lambda}{1-\lambda}} \right)^{-(\lceil a \rceil - S_{k-1})} (\sqrt{1-\lambda^2})^{k-1} \Delta S_k. \end{aligned}$$

Из [3, с. 55] известно распределение N_a : $\mathbf{P}(N_a = k) = \varphi_k(\lceil a \rceil)$, поэтому для всех $a \geq 0$ справедливо равенство

$$\sum_{l=0}^{+\infty} (\sqrt{1-\lambda^2})^{\lceil a \rceil + 2l} \varphi_{\lceil a \rceil + 2l}(\lceil a \rceil) = \left(\sqrt{\frac{1+\lambda}{1-\lambda}} \right)^{-\lceil a \rceil}. \quad (2)$$

Сделаем замену $\sqrt{1-\lambda^2} = s$ и воспользуемся разложением $\lambda = \sqrt{1-s^2} = \sum_{m=0}^{+\infty} (-1)^m C_{1/2}^m s^{2m}$. С учетом (2) получим для всех $s \in (0, 1)$

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(s^{N_a} | \mathcal{F}_n) &= \mathbf{E} s^{N_a} + \sum_{k=1}^{N_a \wedge n} \sum_{l,m=0}^{+\infty} (-1)^m C_{1/2}^m \varphi_{\lceil a \rceil - S_{k-1} + 2l}(\lceil a \rceil - S_{k-1}) \\ &\quad \times s^{\lceil a \rceil - S_{k-1} + 2(m+l) + k-1} \Delta S_k. \end{aligned} \quad (3)$$

Таким образом, формула (3) верна для функций $f_s(x) = s^x$, $x \geq 0$, $s \in (0, 1)$. Беря последовательно $s = e^{-n}$, $n = 1, 2, \dots$, получим, что эта формула верна и для любой функции из семейства $\mathcal{L} = \{e^{-nx}\}_{n \geq 0}$. Введем пространство $C_0[0, +\infty)$ непрерывных на $[0, +\infty)$ функций $f(x)$ таких, что $f(x) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow +\infty$. Метрика в этом пространстве порождается нормой $\|f\| = \sup_{x \geq 0} |f(x)|$. Из [5, с. 321] известно, что система $\mathcal{L}$ полна в пространстве $C_0[0, +\infty)$. Введем в рассмотрение функцию

$$g(t) = \begin{cases} 1, & \text{если } 0 \leq t \leq N, \\ N+1-t, & \text{если } N \leq t \leq N+1, \\ 0, & \text{если } t \geq N+1. \end{cases}$$

Ясно, что $g(t) \in C_0[0, +\infty)$. Тогда существует последовательность функций $x_k(t) = \sum_{l=1}^{n_k} \alpha_l(k) e^{-lt}$ таких, что $x_k(t) \rightarrow g(t)$ в $C_0[0, +\infty)$. В частности, из сходимости в $C_0[0, +\infty)$ следует равномерная сходимость $x_k(n)$ к $g(n) = I(n \leq N)$ при $k \rightarrow +\infty$ на $\mathbf{Z}_+$. В силу линейности условного математического ожидания, формула (3) справедлива для всех функций $x_k(t)$. Совершим в (3) предельный переход от $x_k(n)$ к $g(n) = I(n \leq N)$. Из равномерной сходимости получаем, что $x_k(N_a) \rightarrow g(N_a) = I(N_a \leq N)$ п.н. при $k \rightarrow +\infty$, а также то, что последовательность $\{x_k\}_{k \geq 1}$ равномерно ограничена. Поэтому по теореме Лебега о мажорируемой сходимости

$$\begin{aligned} \mathbf{E}[x_k(N_a) | \mathcal{F}_N] &\rightarrow I(N_a \leq N) && \text{при } k \rightarrow +\infty \quad \mathbf{P}\text{-п.н.}, \\ \mathbf{E} x_k(N_a) &\rightarrow \mathbf{P}(N_a \leq N) && \text{при } k \rightarrow +\infty. \end{aligned}$$

Далее,

$$\begin{aligned} & \sum_{l,m=0}^{+\infty} (-1)^m C_{1/2}^m \varphi_{[a]-S_{k-1}+2l}([a]-S_{k-1}) x_r([a]-S_{k-1}+2(m+l)+k-1) \\ &= \sum_{m=0}^{+\infty} (-1)^m C_{1/2}^m a_m(r), \end{aligned} \quad (4)$$

где $a_m(r) = \mathbf{E}[x_r(N_x + 2m + k - 1)]|_{x=[a]-S_{k-1}}$.

Так как существует $c > 0$ такое, что $|x_k(n)| \leq c$ для всех k, n , то $|a_m(r)| \leq c$ для всех r, m . Тогда по признаку Вейерштрасса из сходимости ряда $\sum_{m=1}^{+\infty} (-1)^{m-1} C_{1/2}^m$ вытекает равномерная по r сходимость ряда (4). Значит, во втором слагаемом правой части (3) можно сделать предельный переход от $x_r(n)$ к $g(n)$ и получить справедливость формулы (3) для функции $g(n) = I(n \leq N)$. Таким образом, справедлива следующая лемма.

Лемма 1. *С вероятностью единица имеет место представление*

$$\begin{aligned} I(N_a \leq N) &= \mathbf{P}(N_a \leq N) + \sum_{k=1}^{N_a \wedge N} \sum_{l,m: l+m \leq \lfloor (N-k+1)/2 \rfloor} (-1)^m C_{1/2}^m \\ &\quad \times \varphi_{[a]-S_{k-1}+2l}([a]-S_{k-1}) I([a]-S_{k-1} \leq N-k+1-2(l+m)) \Delta S_k. \end{aligned}$$

Используя эту лемму, получаем:

$$\begin{aligned} F_N &= \int_0^{+\infty} I(N_a \leq N) da = \int_0^{+\infty} \mathbf{P}(F_N \geq a) da \\ &\quad + \sum_{k=1}^N \sum_{l+m \leq \lfloor (N-k+1)/2 \rfloor} \int_0^{S_{k-1}+N-k+1-2(l+m)} (-1)^m \\ &\quad \times C_{1/2}^m \varphi_{[a]-S_{k-1}+2l}([a]-S_{k-1}) I(k \leq N_a) da \Delta S_k \\ &= \mathbf{E} F_N + \sum_{k=1}^N \sum_{l+m \leq \lfloor (N-k+1)/2 \rfloor} (-1)^m C_{1/2}^m \\ &\quad \times \left(\int_{F_{k-1}-S_{k-1}}^{N-k+1-2(l+m)} \varphi_{[a]+2l}([a]) da \right) \Delta S_k \\ &= \mathbf{E} F_N + \sum_{k=1}^N \left(\sum_{l+m \leq \lfloor (N-k+1)/2 \rfloor} \sum_{r=F_{k-1}-S_{k-1}+1}^{N-k+1-2(l+m)} (-1)^m C_{1/2}^m \varphi_{r+2l}(r) \right) \Delta S_k. \end{aligned} \quad (5)$$

Меняя порядок суммирования в скобках и пользуясь тем, что для всех $x \in \mathbf{R}$ справедливо $(-1)^n C_{x-1}^n = \sum_{m=0}^n (-1)^m C_x^m$, получим, что теорема 2 доказана.

Если в (5) поменять порядок суммирования, ввести случайную величину η с распределением $\mathbf{P}(\eta = m) = (-1)^{m-1} C_{1/2}^m$, не зависящую от σ -алгебры $\mathcal{F}_N$, и произвести тождественные преобразования, то мы получим еще одно представление для $G_{N-k+1}(F_{k-1} - S_{k-1})$.

Лемма 2. *С вероятностью единица имеет место представление*

$$G_{N-k+1}(F_{k-1} - S_{k-1}) = \int_{F_{k-1}-S_{k-1}}^{N-k+1} (\mathbf{P}(F_{N-k+1} \geq a) - \mathbf{P}(F_{N-k+1-2\eta} \geq a)) da,$$

где η — не зависящая от $\mathcal{F}_N$ случайная величина с распределением $\mathbf{P}(\eta = m) = (-1)^{m-1} C_{1/2}^m$, $m = 1, 2, \dots$.

1.2. Случай $F_{\tau_{-a}} = \max_{0 \leq k \leq \tau_{-a}} S_k$. Найдем представление для $F_{\tau_{-a}}$, $a \in \mathbf{N}$, где $\tau_{-a} = \inf\{k \geq 0: S_k = -a\}$ — первый момент выхода случайного блуждания на уровень $-a$. Поскольку $\mathbf{E} F_{\tau_{-a}} = \infty$, то этот случай иллюстрирует ситуацию, когда требуется найти стохастическое представление функционала с бесконечным математическим ожиданием.

Теорема 3. Для $F_{\tau_{-a}}$ имеет место стохастическое представление

$$\max_{0 \leq k \leq \tau_{-a}} S_k = - \sum_{k=2}^{\tau_{-a}} H(F_{k-1}) \Delta S_k,$$

где $H(n) = \sum_{l=1}^n (a+l)^{-1}$, $H(0) := 0$, $F_k = \max_{0 \leq l \leq k} S_l$.

Доказательство. Так как $I(F_{\tau_{-a}} \geq z) = I(N_z \leq \tau_{-a})$ для каждого $z > 0$, то справедливо равенство

$$(a + \lceil z \rceil) I(F_{\tau_{-a}} \geq z) = a + S_{\tau_{-a} \wedge N_z},$$

из которого следуют соотношения

$$\begin{aligned} S_{\tau_{-a} \wedge N_z} + a &= \sum_{k=1}^{\tau_{-a} \wedge N_z} \Delta S_k + a = \sum_{k=1}^{\tau_{-a}} I(k \leq N_z) \Delta S_k + a \\ &= \sum_{k=1}^{\tau_{-a}} I(F_{k-1} < z) \Delta S_k + a = - \sum_{k=2}^{\tau_{-a}} I(F_{k-1} \geq z) \Delta S_k. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$I(F_{\tau_{-a}} \geq z) = \frac{a + S_{\tau_{-a} \wedge N_z}}{a + \lceil z \rceil} = - \sum_{k=2}^{\tau_{-a}} \frac{I(F_{k-1} \geq z)}{a + \lceil z \rceil} \Delta S_k,$$

откуда

$$\begin{aligned} F_{\tau_{-a}} &= \int_0^{+\infty} I(F_{\tau_{-a}} \geq z) dz = - \int_0^{+\infty} \sum_{k=2}^{\tau_{-a}} \frac{I(F_{k-1} \geq z)}{a + \lceil z \rceil} \Delta S_k dz \\ &= - \sum_{k=2}^{\tau_{-a}} \left(\int_0^{F_{k-1}} \frac{dz}{a + \lceil z \rceil} \right) \Delta S_k = - \sum_{k=2}^{\tau_{-a}} H(F_{k-1}) \Delta S_k. \end{aligned}$$

Теорема 3 доказана.

1.3. Случай $F_{g_N} = \max_{0 \leq k \leq g_N} S_k$, где $g_N = \sup\{0 < k \leq N: S_k = 0\}$.

Теорема 4. Для F_{g_N} справедливо следующее стохастическое представление:

$$\begin{aligned} \max_{0 \leq k \leq g_N} S_k &= \sum_{k=1}^{\lfloor N/2 \rfloor} \mathbf{P}(F_N \geq 2k) + \sum_{k=1}^N L_{N-k+1}(F_{k-1}, S_{k-1}) \Delta S_k \\ &\quad - \sum_{k=1}^N M_{N-k+1}(S_{k-1})(F_{k-1} - F_{g_{k-1}}) \Delta S_k, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} L_{N-k+1}(F_{k-1}, S_{k-1}) &= \sum_{n=F_{k-1}-S_{k-1}+1}^{N-k+1} \sum_{m=0}^{\lfloor (N-k+1-n)/2 \rfloor} \sum_{l=0}^{N-k+1-2m} (-1)^m C_{1/2}^m \\ &\quad \times \varphi_l(2n + S_{k-1}), \\ M_{N-k+1}(S_{k-1}) &= \sum_{l, m: l+m \leq \lfloor (N-k+1)/2 \rfloor} (-1)^m C_{1/2}^m \varphi_{S_{k-1}+2l}(S_{k-1}) \\ &\quad \times I(S_{k-1} \leq N - k + 1 - 2(l+m)). \end{aligned}$$

Доказательство. Аналогично предыдущим случаям имеем

$$\begin{aligned} \max_{0 \leq n \leq g_N} S_n &= \int_0^{+\infty} I\left(\max_{0 \leq n \leq g_N} S_n \geq a\right) da = \int_0^{+\infty} I(N_a \leq g_N) da \\ &= \int_0^{+\infty} I(d_{N_a} \leq N) da, \end{aligned}$$

где $d_{N_a} = \inf\{k \geq N_a: S_k = 0\}$. Поэтому для доказательства утверждения достаточно получить представление для $I(d_{N_a} \leq N)$. Справедливо соотношение $d_{N_a} = N_a + \inf\{k \geq 0: S_{k+N_a} = 0\} = N_a + \hat{N}_{-a}$, где $(\hat{S}_k)_{k \geq 0}$ с $\hat{S}_k = S_{N_a+k} - [a]$ является случайным блужданием, не зависящим от σ -алгебры $\mathcal{F}_{N_a} = \{A \in \mathcal{F}: A \cap \{N_a = n\} \in \mathcal{F}_n, n > 0\}$, а $\hat{N}_{-a} = \inf\{k \geq 0: \hat{S}_k = -[a]\}$. Тогда имеем

$$d_{N_a} = N_a + \hat{N}_{-a}, \quad I(d_{N_a} \leq N) = I(\hat{N}_{-a} \leq N - N_a).$$

Обозначим $\hat{N}_{-a} = \hat{N}_{-a}(\hat{S})$. Тогда $\hat{N}_{-a}(\hat{S}) = \hat{N}_a(-\hat{S})$. Так как марковские моменты $\hat{N}_{-a}$ и N_a независимы и одинаково распределены, то с помощью леммы 1 найдем представление для $I(\hat{N}_a(-\hat{S}) \leq b) = I(\hat{N}_{-a} \leq b)$, где $b \in \mathbf{Z}_+$. Подставляя в полученное выражение $b = N - N_a$, получим следующее представление для $I(d_{N_a} \leq N)$:

$$\begin{aligned} I(d_{N_a} \leq N) &= \sum_{l=0}^{+\infty} I(l \leq N - N_a) \varphi_l([a]) - \sum_{k=(N_a+1)}^{d_{N_a} \wedge N} \sum_{l+m \leq [(N-k+1)/2]} (-1)^m \\ &\quad \times C_{1/2}^m \varphi_{S_{k-1}+2l}(S_{k-1}) I(S_{k-1} \leq N - k + 1 - 2(l+m)) \Delta S_k. \end{aligned} \quad (6)$$

Применяя лемму 1 к выражению $I(N_a \leq N - l)$ и подставляя полученное представление в (6), получим три суммы. Пользуясь соотношениями

$$\begin{aligned} \sum_{l=0}^N \mathbf{P}(N_a \leq N - l) \varphi_l([a]) &= \mathbf{P}(N_2[a] \leq N), \\ \sum_{l=0}^{[(N-k+1-n)/2]-m} \varphi_{n+2l}(n) \mathbf{P}(N_{n+x} \leq N - k + 1 - 2m - n - 2l) &|_{x=S_{k-1}} \\ &= \sum_{l=0}^{N-k+1-2m} \varphi_l(2n + S_{k-1}), \end{aligned}$$

проинтегрируем по a и преобразуем каждую из трех сумм, после чего получим утверждение теоремы.

2. Многократные представления. Нам понадобятся следующие обозначения: $B^n = \{\bar{i} = (i_1, \dots, i_n): i_k \in \{-1, 1\}, k = 1, \dots, n\}$, $U_n^m = \{(t_1, \dots, t_m): 1 \leq t_1 < \dots < t_m \leq n, t_i \in \mathbf{N}\}$.

Определение 1. Пусть $h: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$. Определим по индукции ее разделенную разность n -го порядка:

$$\begin{aligned} D^{(1)}h(x_1, \dots, x_n) &= \frac{1}{2} (h(1, x_2, \dots, x_n) - h(-1, x_2, \dots, x_n)), \\ D^{(k)}h(x_1, \dots, x_n) &= \frac{1}{2} D^{(k-1)}(h(x_1, \dots, x_{k-1}, 1, x_{k+1}, \dots, x_n) \\ &\quad - h(x_1, \dots, x_{k-1}, -1, x_{k+1}, \dots, x_n)), \quad k \leq n. \end{aligned}$$

Например, $D^{(2)}h(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{4} (h(1, 1, x_3, \dots, x_n) - h(1, -1, x_3, \dots, x_n) - h(-1, 1, x_3, \dots, x_n) + h(-1, -1, x_3, \dots, x_n))$. Также отметим, что $D^{(k)}h(x_1, \dots, x_n): \mathbf{R}^{n-k} \rightarrow \mathbf{R}$, $D^{(n)}h(x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{R}$.

2.1. Основная лемма. Установим одно свойство разделенной разности, которое понадобится нам в дальнейшем.

Предложение 1. Для каждого натурального n и для любой функции $f: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ справедливо соотношение

$$\frac{1}{2^n} \sum_{\bar{i} \in B^n} i_{t_1} \cdots i_{t_k} f(\bar{i}) = D^{(k)} \left(\mathbf{E} [f(\bar{\xi}) |_{\xi_{t_1}=x_1, \dots, \xi_{t_k}=x_k}] \right),$$

где $1 \leq t_1 < \dots < t_k \leq n$, $\bar{\xi} = (\xi_1, \dots, \xi_n)$.

Доказательство. Воспользуемся индукцией по k . При $k = 1$ имеем

$$\begin{aligned} \frac{1}{2^n} \sum_{\bar{i} \in B^n} i_{t_1} f(\bar{i}) &= \frac{1}{2^n} \sum_{\bar{i} \in B^n: i_{t_1}=1} f(\bar{i}) - \frac{1}{2^n} \sum_{\bar{i} \in B^n: i_{t_1}=-1} f(\bar{i}) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{\bar{i} \in B^n: i_{t_1}=1} f(\bar{i}) \mathbf{P}(\xi_1 = i_1, \dots, \widehat{\xi_{t_1}} \dots, \xi_n = i_n) \\ &\quad - \frac{1}{2} \sum_{\bar{i} \in B^n: i_{t_1}=-1} f(\bar{i}) \mathbf{P}(\xi_1 = i_1, \dots, \widehat{\xi_{t_1}} \dots, \xi_n = i_n) \\ &= \frac{1}{2} \left(\mathbf{E} [f(\bar{\xi}) |_{\xi_{t_1}=1}] - \mathbf{E} [f(\bar{\xi}) |_{\xi_{t_1}=-1}] \right) = D^{(1)} \left(\mathbf{E} [f(\bar{\xi}) |_{\xi_{t_1}=x}] \right). \end{aligned}$$

Здесь символ $\widehat{\xi_{t_1}}$ обозначает отсутствие величины ξ_{t_1} в соответствующем выражении.

Шаг индукции. Пусть для всех номеров, не больших k , утверждение верно. Тогда справедливо равенство

$$\begin{aligned} \frac{1}{2^n} \sum_{\bar{i} \in B^n} i_{t_1} \cdots i_{t_k} i_{t_{k+1}} f(\bar{i}) \\ = \frac{1}{2^n} \sum_{\bar{i} \in B^n: i_{t_{k+1}}=1} i_{t_1} \cdots i_{t_k} f(\bar{i}) - \frac{1}{2^n} \sum_{\bar{i} \in B^n: i_{t_{k+1}}=-1} i_{t_1} \cdots i_{t_k} f(\bar{i}). \end{aligned}$$

Заметим, что в последних двух суммах переменная $i_{t_{k+1}}$ фиксирована. Поэтому суммирование ведется по $n - 1$ переменной, и функцию f в каждой сумме можно рассматривать как функцию только $n - 1$ переменной. По индукции получим

$$\begin{aligned} \frac{1}{2^n} \sum_{\bar{i} \in B^n: i_{t_{k+1}}=1} i_{t_1} \cdots i_{t_k} f(\bar{i}) &= \frac{1}{2} D^{(k)} \left(\mathbf{E} [f(\bar{\xi}) |_{\xi_{t_1}=x_1, \dots, \xi_{t_k}=x_k, \xi_{t_{k+1}}=1}] \right), \\ \frac{1}{2^n} \sum_{\bar{i} \in B^n: i_{t_{k+1}}=-1} i_{t_1} \cdots i_{t_k} f(\bar{i}) &= \frac{1}{2} D^{(k)} \left(\mathbf{E} [f(\bar{\xi}) |_{\xi_{t_1}=x_1, \dots, \xi_{t_k}=x_k, \xi_{t_{k+1}}=-1}] \right). \end{aligned}$$

Следовательно, имеем соотношения

$$\begin{aligned} \frac{1}{2^n} \sum_{\bar{i} \in B^n} i_{t_1} \cdots i_{t_{k+1}} f(\bar{i}) &= \frac{1}{2} \left(D^{(k)} \left(\mathbf{E} [f(\bar{\xi}) |_{\xi_{t_1}=x_1, \dots, \xi_{t_k}=x_k, \xi_{t_{k+1}}=1}] \right) \right. \\ &\quad \left. - D^{(k)} \left(\mathbf{E} [f(\bar{\xi}) |_{\xi_{t_1}=x_1, \dots, \xi_{t_k}=x_k, \xi_{t_{k+1}}=-1}] \right) \right) \\ &= D^{(k+1)} \left(\mathbf{E} [f(\bar{\xi}) |_{\xi_{t_1}=x_1, \dots, \xi_{t_{k+1}}=x_{k+1}}] \right), \end{aligned}$$

которые доказывают утверждение 1.

Лемма 3. Пусть $f: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$. Тогда справедливо следующее представление:

$$f(\bar{\xi}) = \mathbf{E} f(\bar{\xi}) + \sum_{k=1}^n \sum_{\bar{i} \in U_n^k} D^{(k)} \left(\mathbf{E} [f(\bar{\xi}) |_{\xi_{t_1}=x_1, \dots, \xi_{t_k}=x_k}] \right) \Delta S_{t_1} \cdots \Delta S_{t_k},$$

где $\bar{\xi} = (\xi_1, \dots, \xi_n)$.

Доказательство. Заметим, что $I(\xi_k = i_k) = (1 + i_k \xi_k)/2$ для $i_k \in \{-1, 1\}$. Поэтому имеем представление

$$\begin{aligned} f(\bar{\xi}) &= \sum_{\bar{i} \in B^n} f(i_1, \dots, i_n) I(\xi_1 = i_1) \cdots I(\xi_n = i_n) \\ &= \sum_{\bar{i} \in B^n} f(\bar{i}) \frac{1 + i_1 \xi_1}{2} \cdots \frac{1 + i_n \xi_n}{2} = \frac{1}{2^n} \sum_{\bar{i} \in B^n} f(\bar{i}) (1 + i_1 \xi_1) \cdots (1 + i_n \xi_n) \\ &= \frac{1}{2^n} \sum_{\bar{i} \in B^n} f(\bar{i}) \left(1 + \sum_{k=1}^n \sum_{1 \leq t_1 < \dots < t_k \leq n} i_{t_1} \xi_{t_1} \cdots i_{t_k} \xi_{t_k} \right) = \frac{1}{2^n} \sum_{\bar{i} \in B^n} f(\bar{i}) \\ &\quad + \sum_{k=1}^n \sum_{1 \leq t_1 < \dots < t_k \leq n} \left[2^{-n} \sum_{\bar{i} \in B^n} i_{t_1} \cdots i_{t_k} f(\bar{i}) \right] \Delta S_{t_1} \cdots \Delta S_{t_k}. \end{aligned}$$

Вычислим коэффициенты в суммах. Имеем соотношения

$$\mathbf{E} f(\bar{\xi}) = \sum_{\bar{i} \in B^n} f(\bar{i}) \mathbf{P}(\xi_1 = i_1) \cdots \mathbf{P}(\xi_n = i_n) = \frac{1}{2^n} \sum_{\bar{i} \in B^n} f(\bar{i}).$$

Из предложения 1 следует равенство

$$2^{-n} \sum_{\bar{i} \in B^n} i_{t_1} \cdots i_{t_k} f(\bar{i}) = D^{(k)} \left(\mathbf{E} [f(\bar{\xi}) | \xi_{t_1} = x_1, \dots, \xi_{t_k} = x_k] \right).$$

Подставляя полученные коэффициенты в выражение

$$f(\bar{\xi}) = \frac{1}{2^n} \sum_{\bar{i} \in B^n} f(\bar{i}) + \sum_{k=1}^n \sum_{\bar{i} \in U_n^k} \left[2^{-n} \sum_{\bar{i} \in B^n} i_{t_1} \cdots i_{t_k} f(\bar{i}) \right] \Delta S_{t_1} \cdots \Delta S_{t_k},$$

получаем утверждение леммы.

Так как $\max_{k \leq N} S_k$ является функцией от переменных $\xi_1, \dots, \xi_N$, то справедливо следующее утверждение.

Следствие 1. Для $F_N = \max_{0 \leq k \leq N} S_k$ имеет место представление

$$F_N = \mathbf{E} F_N + \sum_{k=1}^N \sum_{1 \leq t_1 < \dots < t_k \leq N} D^{(k)} \left(\mathbf{E} [F_N | \xi_{t_1} = x_1, \dots, \xi_{t_k} = x_k] \right) \Delta S_{t_1} \cdots \Delta S_{t_k}.$$

2.2. Многократное представление функционала $F_N = \max_{0 \leq k \leq N} S_k$. Получим теперь другое многократное представление F_N из однократного. Как видно из теоремы 2, достаточно получить многократное представление для случайной величины $G_{N-k+1}(F_{k-1} - S_{k-1})$.

Теорема 5. Для $F_N = \max_{0 \leq k \leq N} S_k$ справедливо следующее многократное стохастическое представление:

$$\begin{aligned} F_N &= \mathbf{E} F_N + \sum_{k=1}^N \mathbf{E} [G_{N-k+1}(F_{k-1} - S_{k-1})] \Delta S_k \\ &\quad + \sum_{m=2}^N \sum_{1 \leq k_1 < \dots < k_m \leq N} c_m(k_1, \dots, k_m) \Delta S_{k_1} \cdots \Delta S_{k_m}, \end{aligned}$$

где

$$c_m(k_1, \dots, k_m) = D^{(m-1)} \mathbf{E} [G_{N-k_m+1}(F_{k_m-1} - S_{k_m-1}) | \xi_{k_1} = x_1, \dots, \xi_{k_{m-1}} = x_{m-1}].$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Применим лемму 3 к $G_{N-k+1}(F_{k-1} - S_{k-1})$. Получим

$$G_{N-k+1}(F_{k-1} - S_{k-1}) = \mathbf{E}[G_{N-k+1}(F_{k-1} - S_{k-1})] + \sum_{m=1}^{k-1} \sum_{\bar{i} \in U_{k-1}^m} D^{(m)} \mathbf{E}[G_{N-k+1}(F_{k-1} - S_{k-1}) |_{\xi_{t_1}=x_1, \dots, \xi_{t_m}=x_m}] \Delta S_{t_1} \cdots \Delta S_{t_m}.$$

Сделав замену $m = l - 1$, получим

$$G_{N-k+1}(F_{k-1} - S_{k-1}) = \mathbf{E}[G_{N-k+1}(F_{k-1} - S_{k-1})] + \sum_{l=2}^k \sum_{\bar{i} \in U_{k-1}^{l-1}} c_l(t_1, \dots, t_{l-1}, k) \Delta S_{t_1} \cdots \Delta S_{t_{l-1}}.$$

Подставляя получившееся представление для $G_{N-k+1}(F_{k-1} - S_{k-1})$ в формулу (1), имеем

$$\begin{aligned} F_N &= \mathbf{E} F_N + \sum_{k=1}^N G_{N-k+1}(F_{k-1} - S_{k-1}) \Delta S_k \\ &= \mathbf{E} F_N + \sum_{k=1}^N \mathbf{E}[G_{N-k+1}(F_{k-1} - S_{k-1})] \Delta S_k \\ &\quad + \sum_{k=1}^N \sum_{l=2}^k \sum_{\bar{i} \in U_{k-1}^{l-1}} c_l(t_1, \dots, t_{l-1}, k) \Delta S_{t_1} \cdots \Delta S_{t_{l-1}} \Delta S_k \\ &= \mathbf{E} F_N + \sum_{k=1}^N \mathbf{E}[G_{N-k+1}(F_{k-1} - S_{k-1})] \Delta S_k \\ &\quad + \sum_{l=2}^N \sum_{k=l}^N \sum_{\bar{i} \in U_{k-1}^{l-1}} c_l(t_1, \dots, t_{l-1}, k) \Delta S_{t_1} \cdots \Delta S_{t_{l-1}} \Delta S_k \\ &= \mathbf{E} F_N + \sum_{k=1}^N \mathbf{E}[G_{N-k+1}(F_{k-1} - S_{k-1})] \Delta S_k \\ &\quad + \sum_{l=2}^N \sum_{\bar{i} \in U_N^l} c_l(t_1, \dots, t_l) \Delta S_{t_1} \cdots \Delta S_{t_l}. \end{aligned}$$

Теорема 5 доказана.

2.3. Многократное представление функционала $F_{\tau-a} = \max_{0 \leq k \leq \tau-a} S_k$. Построим теперь представление функционала $F_{\tau-a}$ в виде многократного стохастического интеграла. Имеет место следующая теорема.

Теорема 6. Для $F_{\tau-a}$ справедливо следующее представление:

$$\begin{aligned} F_{\tau-a} &= - \sum_{k=2}^{\tau-a} \mathbf{E}[H(F_{k-1})] \Delta S_k \\ &\quad - \sum_{m=2}^{\tau-a} \sum_{1 \leq k_1 < \dots < k_m} h_m(k_1, \dots, k_m) I(\tau-a \geq k_m) \Delta S_{k_1} \cdots \Delta S_{k_m}, \end{aligned}$$

где $h_m(k_1, \dots, k_m) = D^{(m-1)}(\mathbf{E}[H(F_{k_m-1}) |_{\xi_{k_1}=x_1, \dots, \xi_{k_{m-1}}=x_{m-1}}])$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пользуясь леммой 3, для случайной величины $H(F_{k-1})$ получим представление

$$\begin{aligned}
H(F_{k-1}) &= \mathbf{E}[H(F_{k-1})] \\
&+ \sum_{m=1}^{k-1} \sum_{\bar{t} \in U_{k-1}^m} D^{(m)} \left(\mathbf{E}[H(F_{k-1}) | \xi_{t_1}=x_1, \dots, \xi_{t_m}=x_m] \right) \Delta S_{t_1} \cdots \Delta S_{t_m} \\
&= \mathbf{E}[H(F_{k-1})] + \sum_{l=2}^k \sum_{\bar{t} \in U_{k-1}^{l-1}} h_l(t_1, \dots, t_{l-1}, k) \Delta S_{t_1} \cdots \Delta S_{t_{l-1}}.
\end{aligned}$$

Просуммировав это выражение по k и применив теорему 3, получим утверждение теоремы 6.

Автор выражает благодарность А. Н. Ширяеву за постановку задачи и ценные замечания.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ширяев А. Н., Йор М. К вопросу о стохастических интегральных представлениях функционалов от броуновского движения. I. — Теория вероятн. и ее примен., 2003, т. 48, в. 2, с. 375–385.
2. Граверсен С. Э., Ширяев А. Н., Йор М. К вопросу о стохастических интегральных представлениях функционалов от броуновского движения. II. — Теория вероятн. и ее примен., 2006, т. 51, в. 1, с. 64–77.
3. Ширяев А. Н. Задачи по теории вероятностей. М.: МЦНМО, 2006, 416 с.
4. Булинский А. В., Ширяев А. Н. Теория случайных процессов. М.: Физматлит, 2003, 400 с.
5. Седлецкий А. М. Классы аналитических преобразований Фурье и экспоненциальные аппроксимации. М.: Физматлит, 2005, 504 с.
6. Kuo H.-H. Introduction to Stochastic Integration. New York: Springer, 2006, 278 p.
7. Privault N. Stochastic Analysis in Discrete and Continuous Settings: With Normal Martingales. Springer, 2009, 300 p. (Lecture Notes in Math., v. 1982.)

Поступила в редакцию
4.XII.2008

Исправленный вариант
24.V.2009

© 2009 г.

НОАРОВ А. И.*

О НЕКОТОРЫХ ДИФФУЗИОННЫХ ПРОЦЕССАХ СО СТАЦИОНАРНЫМИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯМИ

В работе на основе исследования стационарного уравнения Фоккера–Планка $\Delta u - \operatorname{div}(uf) = 0$ для стохастического дифференциального уравнения получено условие на коэффициенты сноса, достаточное для существования инвариантной вероятностной меры. Этому условию удовлетворяют некоторые векторные поля $\mathbf{f}$ (коэффициенты сноса) со стремящейся к бесконечности последовательностью неподвижных локально устойчивых точек. В ряде случаев предложенный подход оказывается более эффективным, чем ранее известные методы, основанные на построении функции Ляпунова.

* Институт вычислительной математики РАН, Губкина, 8, 119991 Москва, Россия.

¹⁾ Работа выполнена при поддержке Фонда содействия отечественной науке.