Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Э. Л. Пресман, И. М. Сонин, Об одной задаче оптимальной остановки для случайных величин, заданных на цепи Маркова, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2009, том 54, выпуск 3, 599–608

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp2814>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.196.121.252

26 апреля 2023 г., 11:52:26

© 2009 г.

ПРЕСМАН Э. Л.* , СОНИН И. М.**

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ОПТИМАЛЬНОЙ ОСТАНОВКИ ДЛЯ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН, ЗАДАННЫХ НА ЦЕПИ МАРКОВА¹⁾

Настоящая работа преследует две цели: во-первых, описание нового класса задач оптимальной остановки, для которых решение может быть либо найдено в явном виде, либо получено за конечное число шагов, а во-вторых, обобщение на изучаемую ситуацию и демонстрация применения *алгоритма исключения состояний* (state elimination algorithm), разработанного ранее одним из авторов для задачи оптимальной остановки конечной или счетной марковской цепи.

Ключевые слова и фразы: цепи Маркова, оптимальная остановка, алгоритм исключения состояний, сезонные наблюдения.

1. Введение и формулировка результата. Рассмотрим три задачи, имеющие общую структуру, при этом каждая последующая является обобщением предыдущей. В каждой задаче статистик наблюдает последовательность $Z = (Z_n)_{n \geq 0}$ случайных величин. Цель — максимизировать $\mathbf{E} \beta^\tau g(Z_\tau)$ по всем моментам остановки τ , где β — коэффициент дисконтирования, $0 < \beta \leq 1$, а функция g определяет доход от остановки.

З а д а ч а 1: классическая задача оптимальной остановки независимых испытаний (см., например, [6]). Наблюдается последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин (н.о.р.с.в.) $(Z_n)_{n \geq 0}$ с известным распределением F и $\beta < 1$ (примером может служить последовательное подбрасывание шестигранной кости). Известно, что в этой задаче существует такое число $c^* = c^*(\beta)$, что оптимальным является момент первого попадания в множество $\{z: g(z) \geq c^*\}$.

З а д а ч а 2: «сезонные наблюдения». Примером является ситуация, когда имеется m различных неправильных костей, которые подбрасываются последовательно: первая, вторая, ..., m -я и опять — первая, вторая и т.д. Формально: заданы m независимых последовательностей $(Y_n^s)_{n \geq 0}$ н.о.р.с.в. с известными распределениями $F(s, \cdot)$, $s \in B = \{1, 2, \dots, m\}$, $\beta < 1$. Последовательность наблюдений $(Z_n)_{n \geq 0}$ имеет вид $Z_n = Y_n^s$, где $s \equiv n \pmod{m}$, $s \in B$. Задача 1 получается при $m = 1$.

З а д а ч а 3: «общие сезонные наблюдения». Примером является ситуация, когда состояние марковской цепи со значениями в множестве B определяет в каждый момент времени ту из неправильных костей, которая подбрасывается в этот момент. Как и ранее, заданы m независимых последовательностей $(Y_n^s)_{n \geq 0}$ н.о.р.с.в. с известными распределениями $F(s, \cdot)$, $s \in B$, и, кроме того, не зависящая от них марковская цепь $(\tilde{U}_n)_{n \geq 0}$, принимающая значения в B с заданными переходными вероятностями $\tilde{p}_{s,k}$, и задано $\beta < 1$. Последовательность наблюдений $(\tilde{Z}_n)_{n \geq 0}$ имеет вид $\tilde{Z}_n = (\tilde{U}_n, Y_n^{\tilde{U}_n})$. Задача 2 получается, когда $(\tilde{U}_n)_{n \geq 0}$ соответствует детерминированному циклическому движению по множеству B .

Напомним, что случай $\beta < 1$ сводится к случаю $\beta = 1$ введением *поглощающего состояния*. В рассматриваемом случае можно ввести поглощающее состояние

* Центральный экономико-математический институт РАН, Нахимовский проспект, 47, 117428 Москва, Россия; e-mail: presman@cemi.rssi.ru

** Dept. of Mathematics, Univ. of North Carolina at Charlotte, Charlotte, NC 28223, USA; ЦЭМИ РАН, Москва, Россия; e-mail: imsonin@uncc.edu

¹⁾ Работа первого автора выполнена при поддержке РФФИ (проект 07-01-00541).

$e = (\tilde{e}, 0)$, вместо $(\tilde{U}_n)_{n \geq 0}$ рассмотреть новую цепь $(U_n)_{n \geq 0}$ со значениями в $\tilde{e} \cup B$ и переходными вероятностями $p_{s,k} = \beta \tilde{p}_{s,k}$, $s, k \in B$; $p_{s,\tilde{e}} = 1 - \beta$, $s \in B$, и положить $Y_n^{\tilde{e}} \equiv 0$, $g(e) = 0$. Тогда для любого момента остановки τ

$$\mathbf{E}[\beta^\tau g(\tilde{U}_\tau, Y_\tau^{\tilde{e}})] = \mathbf{E}[g(U_\tau, Y_\tau^{U_\tau})].$$

В работе рассматривается несколько более общая постановка, чем задача 3, когда вероятность перехода в поглощающее состояние может зависеть от состояния марковской цепи $(U_n)_{n \geq 0}$. Мы считаем, что на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ задана такая последовательность случайных величин $Z = (Z_n)_{n \geq 0}$ со значениями в $X = \{e\} \cup (B \otimes \mathbf{R})$, что $Z_n = (U_n, Y_n)$, $n \geq 0$, и

$$\begin{aligned} \mathbf{P}[Z_{n+1} = e \mid Z_0, \dots, Z_{n-1}, Z_n = e] &= 1, \\ \mathbf{P}[U_{n+1} = j, Y_{n+1} \in A \mid Z_0, \dots, Z_{n-1}, Z_n = z = (i, y)] &= p_{ij} F(j, A), \\ \mathbf{P}[Z_{n+1} = e \mid Z_0, \dots, Z_{n-1}, Z_n = z = (i, y)] &= 1 - \sum_{j \in B} p_{ij} \end{aligned} \quad (1)$$

для $i, j \in B$, $y \in \mathbf{R}$, где $F(j, \cdot)$ — некоторые вероятностные меры на борелевской прямой $\mathbf{R}$, $F(j, \mathbf{R}) = 1$, $j \in B$, а $P = (p_{ij})$, $i, j \in B$ — строго субстохастическая матрица, т.е. такая матрица с неотрицательными элементами, что

$$\sum_{j \in B} p_{ij} < 1 \text{ для всех } i \in B. \quad (2)$$

Очевидно, что последовательности $(Z_n)_{n \geq 0}$ и $(U_n)_{n \geq 0}$ образуют цепи Маркова, при этом цепь $(U_n)_{n \geq 0}$, переходные вероятности которой вне поглощающего состояния определяются матрицей P , является в некотором смысле основной цепью, которая «управляет» последовательностью $(Y_n)_{n \geq 0}$. В этой ситуации обычно говорят о *последовательности случайных величин $(Y_n)_{n \geq 0}$, заданных на цепи Маркова $(U_n)_{n \geq 0}$* , или что *цепь Z определяется матрицей P и мерами $F(j, \cdot)$, $j \in B$* . Если $\sum_{j \in B} p_{ij} = \beta$ для всех $i \in B$, $0 < \beta < 1$, то получаем задачу, эквивалентную задаче 3, с переходными вероятностями $\tilde{p}_{ij} = p_{ij}/\beta$, $i, j \in B$. Отметим, что условие (2) можно ослабить, считая, например, что этому условию удовлетворяет не сама матрица P , а некоторая ее степень.

Мы считаем, что на X задана такая измеримая функция $g(\cdot)$, что $g(e) = 0$, $\int_{\mathbf{R}} |g(i, v)| F(i, dv) < \infty$ для всех $i \in B$, и рассматриваем задачу оптимальной остановки цепи Z , определяемой матрицей P и мерами $F(i, \cdot)$, с функцией платы $g(\cdot)$ и $\beta = 1$. Функцию выигрыша в этой задаче обозначим $V(z) = \sup_{\tau} \mathbf{E}[g(Z_\tau) \mid Z_0 = z]$.

Основным результатом данной работы является приводимая ниже теорема, которая дает описание множества остановки и функции выигрыша для рассматриваемой задачи. Прежде чем формулировать теорему, введем следующие обозначения. Для любого $A = \{(j, y) : j \in B, y \in A_j\}$, где A_j , $j \in B$, — некоторые (возможно пустые) множества из $\mathbf{R}$, обозначим через $F_d(A)$ диагональную матрицу

$$F_d(A) = (\delta_{ij} F(j, A_j)), \quad i, j \in B. \quad (3)$$

Теорема. Существует такой вектор $d^* = (d_1^*, \dots, d_m^*)$, что

- оптимальный момент остановки τ^* — это момент первого попадания цепи Z в множество $\{e\} \cup D^*$, где $D^* = \{z = (i, y) : i \in B, y \in D_i^*\}$, $D_i^* = \{y : g(i, y) \geq d_i^*\}$;
- функция выигрыша удовлетворяет соотношению

$$V(z) = g(z), \quad z \in D^*, \quad V(i, y) = d_i^* > g(i, y), \quad z = (i, y) \notin D^*, \quad (4)$$

и d^* удовлетворяет соотношению

$$d_i^* = \sum_{j \in B} p_{ij}^* \int_{D_j^*} g(j, v) F(j, dv), \quad (5)$$

где матрица $P^* = (p_{ij}^*, i, j \in B)$ определяется равенством

$$P^* = [I + PF_d(D^*) - P]^{-1}P \quad (6)$$

и при фиксированном начальном состоянии i величина $F(j, D_j^*)p_{ij}^* = \mathbf{P}[U_{\tilde{\tau}} = j | U_0 = i]$ определяет распределение первой координаты в момент $\tilde{\tau}$ первого после нуля попадания цепи Z в множество D^* ;

в) существует алгоритм нахождения вектора d^* , а значит, и построения функции выигрыша и множества остановки, который в случае дискретных распределений с носителями, не имеющими конечных предельных точек, приводит к построению множества остановки и функции выигрыша за конечное число шагов.

Доказательство теоремы приводится в разделе 3. Там мы не только доказываем теорему, но и приводим упомянутый в пункте в) алгоритм (см. (22)–(24) и лемму 3). Алгоритм основан на общем алгоритме исключения состояний в задаче оптимальной остановки. Соответственно, в разделе 2 мы напомним основные факты из теории оптимальной остановки и обсудим общий алгоритм. Предварительные результаты данной работы для дискретного случая были сформулированы в [12].

2. Задача оптимальной остановки и алгоритм исключения состояний. Существуют два подхода к изучению задачи оптимальной остановки — мартингалный и марковский. Оба подхода интенсивно развивались в середине шестидесятых годов. Мартингалный подход был изложен в книге Г. Роббинса, Д. Сигмунда и И. Чао (1971) [3] (изложение этого подхода можно найти также в книге Т. С. Фергюсона [6]). Марковский подход был изложен в книгах А. Н. Ширяева (1969, 1976) [4] и Е. Б. Дынкина и А. А. Юшкевича (1969) [1]. Из многочисленных книг и монографий с главами или разделами, посвященными задаче оптимальной остановки, упомянем [5] и [8]. Современное изложение обоих подходов приведено в монографии Г. Пешкира и А. Н. Ширяева [7]. Наше изложение использует марковский подход.

Пусть на измеримом пространстве $(\Omega, \mathcal{F})$ заданы такая последовательность случайных элементов $(Z_n)_{n \geq 0}$ со значениями в фазовом пространстве $(X, \mathcal{B})$ и такая совокупность мер $\mathbf{P}_z$, измеримым образом зависящая от $z \in X$, что $Z = (Z_n, \mathcal{F}_n, \mathbf{P}_z)_{n \geq 0}$ образует однородную марковскую цепь, где $\mathbf{P}_z[Z_0 = z] = 1$, а $\mathcal{F}_n$ обозначает σ -алгебру, порожденную величинами $Z_0, \dots, Z_n$. Заметим, что в этом разделе цепь Z носит общий характер и не обязана совпадать с цепью из предыдущего раздела. Обозначим через $\mathcal{P}$ переходной оператор цепи Z , так что $\mathcal{P}f(z) = \mathbf{E}_z[f(Z_1)]$. Оператор $\mathcal{P}$ переводит любую заданную на X измеримую функцию f , для которой соответствующее математическое ожидание определено, в измеримую функцию, заданную на X .

Считаются заданными число β , $0 < \beta \leq 1$, и измеримые функции $g(z)$ и $c(z)$. Моменты остановки рассматриваются относительно последовательности σ -алгебр $\mathcal{F}_n$, $n \geq 0$. Предполагается, что для любого $z \in X$ и любого момента остановки τ определена величина $V_\tau(z) = \mathbf{E}_z[g(Z_\tau)\beta^\tau - \sum_{k=0}^{\tau-1} c(Z_k)\beta^k]$. Здесь $g(z)$ — это доход от остановки в точке z , а $c(z)$ — это плата за проведение очередного наблюдения (обе функции могут принимать как положительные, так и отрицательные значения). Задача оптимальной остановки состоит в нахождении функции выигрыша

$$V(z) = \sup_{\tau} V_\tau(z) = \sup_{\tau} \mathbf{E}_z \left[g(Z_\tau)\beta^\tau - \sum_{k=0}^{\tau-1} c(Z_k)\beta^k \right], \quad (7)$$

где супремум берется по всем моментам остановки, и нахождении оптимального момента остановки, т.е. момента, в котором достигается этот супремум, если такой момент существует. Как и в предыдущем разделе, случай $0 < \beta < 1$ сводится к случаю $\beta = 1$ введением поглощающего состояния. Поэтому в дальнейшем без ограничения общности мы будем считать, что $\beta = 1$.

Определим оператор $\mathcal{T}$ следующим образом:

$$\mathcal{T}f(z) = -c(z) + \mathcal{P}f(z). \quad (8)$$

Оператор $\mathcal{T}$ называется оператором переоценки.

Хорошо известно, что при выполнении естественных условий функция $V(z)$ конечна и справедливо следующее утверждение (см. [7, теорема 1.11, следствие 1.12 и раздел 11 гл. 1]).

Утверждение 1. а) Функция $V(z)$ является минимальным решением уравнения оптимальности (уравнения Беллмана)

$$V(z) = \max[g(z), \mathcal{T}V(z)]. \quad (9)$$

б) Если $\mathbf{P}_z[\tau^* < \infty] = 1$ для всех $z \in X$, где $\tau^* = \inf\{n \geq 0: Z_n \in D^*\}$, $D^* = \{z: V(z) = g(z)\}$, то момент остановки τ^* является оптимальным и $\tau^* \leq \tau'$ $\mathbf{P}_z$ -п.н. для любого z и любого оптимального момента остановки τ' .

в) Для последовательности $\tilde{V}^{(0)}(z) = g(z)$, $\tilde{V}^{(k+1)}(z) = \max[g(z), \mathcal{T}\tilde{V}^{(k)}(z)]$ справедливо $\tilde{V}^{(k)} \uparrow V$.

Множество D^* называется множеством остановки, а множество $C^* = X \setminus D^* = \{z: V(z) > g(z)\}$ — множеством продолжения.

Обычно говорят, что утверждение в) дает конструктивный метод вычисления функции $V(z)$. Заметим, однако, что, как правило, $\tilde{V}^{(k+1)} \neq \tilde{V}^{(k)} \neq V$ для всех k . Это справедливо, даже если Z_n принимает только два значения z_1 и z_2 , цепь связна и $g(z_1) \neq g(z_2)$. Если Z_n принимает конечное число значений, то уравнение (9) можно решать, используя методы линейного программирования, но при таком подходе теряется вероятностный смысл решения задачи и непонятно, как обобщить такой подход хотя бы на счетный случай. В работах [9]–[11] для конечного, а в некоторых ситуациях для счетного случая был предложен алгоритм построения функции $V(z)$, который основан на исключении состояний и гарантирует, что если Z_n принимает m значений, $m < \infty$, то после не более чем $(m-1)$ шагов будет найдено D^* , а затем после того же числа шагов будет найдено $V(z)$ для всех z . Там же говорится, что иногда этот алгоритм позволяет находить $V(z)$ и D^* за конечное число шагов и тогда, когда фазовое пространство является счетным.

Алгоритм основан на следующих соображениях (см. [10], [11]).

1. В задаче оптимальной остановки трудно найти множество, где нужно останавливаться, но сравнительно легко найти множество, где останавливаться заведомо не нужно. В самом деле, останавливаться нужно в таких точках z , что $g(z) \geq \mathcal{T}V(z)$, но функция V неизвестна, если задача еще не решена. С другой стороны, заведомо не нужно останавливаться в тех точках z , для которых $g(z) < \mathcal{T}g(z)$, т.е. когда доход от остановки в данный момент меньше, чем ожидаемый доход от остановки в следующий момент.

2. После того, как найдено некоторое множество C точек z , в которых заведомо не нужно останавливаться, можно рассматривать начальное состояние цепи только из дополнительного множества $D = X \setminus C$, а саму исходную цепь только в моменты попадания в это дополнительное множество, т.е. рассматривать вложенную марковскую цепь. При этом нужно найти переходной оператор новой цепи и сделать переоценку платы за испытания, рассматривая в качестве новой платы математическое ожидание суммы старых плат, взятой между моментами последовательных попаданий в дополнительное множество. Тем самым мы исключаем состояния, в которых заведомо не нужно останавливаться, ибо новая цепь принимает значения в множестве D . Почти очевидно (и ниже мы это доказываем), что множество остановки для новой цепи совпадает с множеством остановки для старой и что функция выигрыша для старой цепи совпадает с функцией выигрыша для новой на множестве D , а на исключенном множестве C равна сумме математического ожидания от значений функции выигрыша

в новой задаче в момент первого попадания в множество D и суммарной платы за наблюдения до этого момента.

3. Может оказаться, что после конечного числа применений указанной процедуры мы придем к ситуации, когда для новой цепи при всех z из оставшегося множества $\tilde{D}$ будет выполняться неравенство

$$g(z) \geq \tilde{\mathcal{T}}g(z), \quad z \in \tilde{D}, \quad (10)$$

где $\tilde{c}(z)$ — плата за испытание, а $\tilde{\mathcal{T}}$ — оператор переоценки новой цепи. Если $Z_0 \in \tilde{D}$, то, тем самым, соотношение (10) будет выполняться для всего фазового пространства новой цепи. Заметим, что если у исходной цепи фазовое пространство состоит из m элементов, то указанная ситуация получится не позже, чем через $m - 1$ шагов. Но из утверждения 1 вытекает, что если соотношение (10) выполняется для всего фазового пространства новой цепи, то множество остановки совпадает со всем фазовым пространством, а функция выигрыша совпадает с платой за остановку. Тем самым будет найдена функция выигрыша исходной цепи на новом фазовом пространстве и останется пересчитать ее для z из множества продолжения.

В работе [10] приведена вычислительная процедура реализации указанного алгоритма для конечного числа состояний и указано на возможность обобщения на счетный случай, если после конечного числа итераций получится соотношение (10). В работе [2] была предложена модификация этого алгоритма, позволяющая рассматривать произвольное пространство состояний. Эта модификация связана с рассмотрением новой цепи с произвольным начальным состоянием, которое может не принадлежать множеству, дополнительно к исключаемому согласно исходному алгоритму. Она основана на приводимых ниже лемме 1 и следствии к ней (см. [2]). Отметим, что вариант этой леммы, отвечающий сужению на множество D , был получен для счетного случая в [13]. Для простоты рассмотрим случай $c(z) \equiv 0$.

Для любого $A \subset X$ наряду с оператором $\mathcal{P}$ будем рассматривать также оператор $\mathcal{P}_A$, определяемый равенством

$$\mathcal{P}_A f = \mathcal{P} I_A f, \quad (11)$$

где I_A — оператор умножения на характеристическую функцию множества A .

Пусть задано некоторое $D \subset X$. Обозначим через C дополнение множества D , т.е. $C = X \setminus D$. В дальнейшем дополнение любого множества D (с индексами и/или с указанием зависимости от параметров) будем обозначать через C с теми же индексами и/или с указанием той же зависимости от параметров.

Пусть $\tau_0 = 0$, и пусть $\tau_n > 0$, $n \geq 1$, — моменты последовательного попадания цепи Z в множество D (если $Z_0 = z$ и $z \in D$, то τ_1 — это момент первого возвращения). Пусть известно, что $\mathbf{P}_z[\tau_1 < \infty] = 1$ для любого $z \in X$. Рассмотрим марковскую цепь $Z' = (Z'_n)_{n \geq 0}$, где $Z'_n = Z_{\tau_n}$, $n \geq 0$. Обозначим через $\mathcal{P}'$ переходной оператор цепи Z' , а через I тождественный оператор, т.е. $I = I_X$.

Лемма 1. *Справедливы соотношения*

$$\mathcal{P}' f = \sum_{l=0}^{\infty} (\mathcal{P}_C)^l \mathcal{P}_D f = (I - \mathcal{P}_C)^{-1} \mathcal{P}_D f, \quad (12)$$

$$\mathcal{P}' f = \mathcal{P} f + (I - \mathcal{P}_C)^{-1} \mathcal{P}_C (\mathcal{P} f - f). \quad (13)$$

Доказательство. Второе равенство в (12) вытекает из определения оператора $(I - \mathcal{P}_C)^{-1}$, а первое соответствует формуле полной вероятности по системе событий $\{\tau_1 = l + 1\}$, $l \geq 0$, поскольку $(\mathcal{P}_C)^l \mathcal{P}_D f(z)$ — это результат усреднения $f(Z_{l+1})$ по траекториям, которые начинаются в точке z , затем l моментов проводят в C , а затем переходят в D .

Подставляя в правую часть (12) равенство $\mathcal{P}_D = \mathcal{P} - \mathcal{P}_C$, а затем используя равенство $(I - \mathcal{P}_C)^{-1} = I + (I - \mathcal{P}_C)^{-1} \mathcal{P}_C$, получаем

$$\begin{aligned} \mathcal{P}' &= (I - \mathcal{P}_C)^{-1} \mathcal{P} - (I - \mathcal{P}_C)^{-1} \mathcal{P}_C \\ &= (I + (I - \mathcal{P}_C)^{-1} \mathcal{P}_C) \mathcal{P} - (I - \mathcal{P}_C)^{-1} \mathcal{P}_C \\ &= \mathcal{P} + (I - \mathcal{P}_C)^{-1} \mathcal{P}_C \mathcal{P} - (I - \mathcal{P}_C)^{-1} \mathcal{P}_C, \end{aligned} \quad (14)$$

что эквивалентно (13). Это завершает доказательство леммы 1.

Заметим, что в случае конечного числа состояний оператору $(I - \mathcal{P}_C)^{-1}$ отвечает матрица, которая называется фундаментальной матрицей для матрицы, отвечающей $\mathcal{P}_C$. Элементы этой матрицы равны среднему числу посещений состояния до момента выхода из множества C .

Из (13) вытекает следующее утверждение.

Следствие 1. Если $C \subseteq \{z: \mathcal{P}f(z) > f(z)\}$, то $\mathcal{P}'f(z) \geq \mathcal{P}f(z)$ для любого $z \in X$.

В следующем разделе мы демонстрируем, как лемму 1 можно использовать для построения множества остановки и функции выигрыша для задачи оптимальной остановки, рассмотренной в разделе 1.

3. Случайные величины, заданные на цепи Маркова. Пусть марковская цепь Z определяется строго субстохастической матрицей P и вероятностными мерами $F(i, \cdot)$, $i \in B$, заданными на всей прямой. Рассмотрим переходной оператор $\mathcal{P}$ нашей цепи на множестве таких функций, что $f(e) = 0$. Поскольку состояние e поглощающее, то для описания переходного оператора достаточно рассмотреть его сужение на множество функций, заданных на $B \otimes \mathbf{R}$. Соответствующее сужение мы также обозначаем через $\mathcal{P}$. Функции, заданные на $B \otimes \mathbf{R}$, можно рассматривать как вектор-функции $f(y) = (f(1, y), \dots, f(m, y))$, заданные на $\mathbf{R}$. На множестве таких функций определим оператор $\mathcal{L}$ по формуле

$$\mathcal{L}f(i, y) = \int_{\mathbf{R}} f(i, v) F(i, dv), \quad (i, y) \in B \otimes \mathbf{R}. \quad (15)$$

Из определения оператора $\mathcal{L}$ вытекает, что он переводит любую вектор-функцию в вектор-функцию, координаты которой равны константам, а значит, этим же свойством обладает оператор $\mathcal{P}$ и

$$\mathcal{P}f = P\mathcal{L}f. \quad (16)$$

Поэтому в дальнейшем мы будем говорить, что марковская цепь Z определяется строго субстохастической матрицей P и оператором $\mathcal{L}$ в (15).

Для любого $A = \{(j, y): j \in B, y \in A_j\}$ наряду с оператором $\mathcal{L}$ будем рассматривать также оператор $\mathcal{L}_A$, определяемый равенством

$$\mathcal{L}_A f = \mathcal{L}I_A f. \quad (17)$$

Отсюда и из (11) и (15) следует, что

$$\mathcal{P}_A f = P\mathcal{L}_A f. \quad (18)$$

Прежде чем доказывать теорему, сформулируем ряд вспомогательных утверждений. Пусть задано некоторое $D = \{(j, y): j \in B, y \in D_j\}$. Пусть $\tau_0 = 0$, и пусть $\tau_n > 0$, $n \geq 1$, — моменты последовательного попадания цепи Z в множество $\{e\} \cup D$ (если $Z_0 = z$ и $z \in \{e\} \cup D$, то τ_1 — это момент первого возвращения). Очевидно, что $\tau_1 \leq \tau_e$, где τ_e — момент первого попадания в состояние e . Так как P строго субстохастична, то $\mathbf{P}_z[\tau_e < \infty] = 1$, а значит, $\mathbf{P}_z[\tau_1 < \infty] = 1$ для любого $z \in B \otimes \mathbf{R}$ и, следовательно, применима лемма 1.

Рассмотрим марковскую цепь $Z' = (Z'_n)_{n \geq 0}$, где $Z'_n = (U'_n, Y'_n)$, $U'_n = U_{\tau_n}$, $Y'_n = Y_{\tau_n}$, $n \geq 0$. Если $Z_0 = z$, то для любого $z \in X$ при $n \geq 1$ значения Z'_n принадлежат $\{e\} \cup D$. Обозначим через $\mathcal{P}'$ переходной оператор цепи Z' .

Из леммы 1 вытекает следующая ключевая лемма, которая показывает, как изменяется факторизация (16) при «исключении» множества $C = (B \otimes \mathbf{R}) \setminus D$.

Лемма 2. *Марковская цепь Z' определяется строго субстохастической матрицей P' и оператором $\mathcal{L}'$, где*

$$P' = [I - PF_d(C)]^{-1} PF_d(D), \quad (19)$$

$$\mathcal{L}' f(i, y) = (F(i, D_i))^{-1} \int_{D_i} f(i, v) F(i, dv), \quad \text{если } F(i, D_i) \neq 0, \quad (20)$$

а если $F(i, D_i) = 0$, то $\mathcal{L}' f(i, y)$ можно определить произвольным образом, при этом матрица $F_d(A)$ была определена в (3) для любого множества A .

Доказательство. Здесь вектор-функции, координаты которых равны константам, мы будем обозначать полужирным шрифтом. В этих обозначениях из (15) следует, что $\mathcal{L}f = f$. Из (15), (18) и (3) следует, что $\mathcal{L}_A f = F_d(A)f$, отсюда и из (18) вытекает, что $\mathcal{P}_A f = PF_d(A)f$, а значит, $(\mathcal{P}_A)^l f = (PF_d(A))^l f$ для любого $l \geq 1$. Из последнего равенства с $A = C$ и из равенства (18) с $A = D$, учитывая, что $\mathcal{P}_D f$ является вектор-функцией, координаты которой равны константам, получаем, что $(\mathcal{P}_C)^l \mathcal{P}_D f = (PF_d(C))^l P \mathcal{L}_D f$. Подставляя это выражение в правую часть первого равенства в (12), получаем, что

$$\mathcal{P}' f = \tilde{P}' \mathcal{L}_D f, \quad \text{где } \tilde{P}' = [I - PF_d(C)]^{-1} P. \quad (21)$$

Нормируя меры, определяющие оператор $\mathcal{L}_D$, получаем (19) и (20), при этом если $F(i, D_i) = 0$ для некоторого i , то соответствующую меру $F'(i, \cdot)$ можно выбрать произвольно. Лемма 2 доказана.

Перейдем к доказательству теоремы. Следуя работе [2], мы построим такую последовательность марковских цепей Z^k и такую невозрастающую последовательность множеств D^k , $k \geq 0$, что начальное состояние каждой цепи совпадает с начальным состоянием исходной цепи, а состояние цепи Z^k (при $k \geq 1$) в любой момент $r > 0$ совпадает с состояниями исходной цепи в момент r -го попадания исходной цепи в множество D^k . При этом последовательность функций $V^k(z)$, $k \geq 0$, где $V^k(z)$ соответствует выигрышу от остановки при первом попадании цепи Z^k в множество D^k , будет сходиться к функции выигрыша исходной цепи, а последовательность множеств D^k будет сходиться к множеству остановки исходной цепи.

Пусть $Z^0 = Z$ и $\mathcal{P}^0 = \mathcal{P}$ — переходной оператор цепи Z^0 . Положим $d^1 = \mathcal{P}^0 g$. Заметим, что d^1 — это вектор-функция, определенная при всех $z \in B \otimes \mathbf{R}$, координаты которой равны константам. Можно рассматривать d^1 просто как числовой вектор с соответствующими координатами. Положим $D^1 = \{g(z) \geq d^1\}$. Если $F_d(D^1) = I$, то положим $Z^1 = Z^0$.

Если $F_d(D^1) \neq I$, то в точках множества $C^1 = (B \otimes \mathbf{R}) \setminus D^1$ останавливаться не имеет смысла, поскольку выигрыш от продолжения на один шаг в этих точках заведомо больше, чем выигрыш от остановки. Поэтому мы «исключим» это множество, рассмотрев цепь Z^1 , которая соответствует цепи Z' из леммы 2 с $D = D^1$. С цепью Z^1 поступим точно так же, как с цепью Z^0 , и получим цепь Z^2 , и т.д. В результате получим последовательность цепей $(Z^k)_{k \geq 0}$, $Z_0^k = Z_0^0$, соответствующую им последовательность переходных операторов $(\mathcal{P}^k)_{k \geq 0}$, последовательность векторов $(d^k)_{k \geq 1}$, где

$$d^k = \mathcal{P}^{k-1} g, \quad k \geq 1, \quad (22)$$

и последовательность множеств $(D^k)_{k \geq 1}$, где

$$D^k = \{z: g(z) \geq d^k\}, \quad k \geq 1. \quad (23)$$

При $k \geq 1$ рассмотрим последовательность вектор-функций

$$V^k(z) = g(z), \quad z \in D^k, \quad V^k(z) = d^k, \quad z \in C^k = (B \otimes \mathbf{R}) \setminus D^k. \quad (24)$$

Лемма 3. а) Последовательность $(V^k(z))_{k \geq 1}$ не убывает и сходится к функции $V(z)$, которая является ценой игры в задаче оптимальной остановки любой из цепей Z^k , $k \geq 0$.

б) Последовательность $(d^k)_{k \geq 1}$ не убывает, ограничена и сходится к некоторому d^* . Последовательность множеств $(D^k)_{k \geq 1}$ не возрастает и сходится к такому множеству D^* , что $\{e\} \cup D^*$ является множеством остановки в задаче оптимальной остановки любой из цепей Z^k , $k \geq 0$, и цепи Z^* , соответствующей моментам попадания цепи Z^0 в множество D^* . Если $d^{l+1} = d^l$ для некоторого l , то $d^k = d^*$, $D^k = D^*$ при $k \geq l$.

в) Переходной оператор цепи Z^k при $k \geq 1$ и при $k = *$ имеет вид

$$\mathcal{P}^k f = \tilde{P}^k \mathcal{L}_{D^k} f, \quad \text{где } \tilde{P}^k = [I - P F_d(C^k)]^{-1} P, \quad (25)$$

так что цепь Z^k определяется матрицей $P^k = \tilde{P}^k F(D^k)$ и оператором $\mathcal{L}^k$, который в случае существования $[F(D^k)]^{-1}$ имеет вид $\mathcal{L}^k = [F(D^k)]^{-1} \mathcal{L}_{D^k}$, а в общем случае определяется согласно лемме 2.

г) Пусть $d^* = (d_1^*, \dots, d_m^*)$, и пусть $G(i, \cdot)$, $i \in B$, — распределение величины $g(i, \hat{Y}_i)$, где $\hat{Y}_i$ имеет распределение $F(i, \cdot)$. Если существует такое $\varepsilon > 0$, что $G(i, \{(-\varepsilon + d_i^*, d_i^*)\}) = 0$ для всех $i \in B$, то существует такое k^* , что $Z^s = Z^{k^*}$ при $s \geq k^*$.

Доказательство. Из (22), (23) и следствия 1 получаем, что

$$d^{k+1} \geq d^k, \quad k \geq 1, \quad (26)$$

а значит, из (23) следует, что

$$D^{k+1} \subseteq D^k, \quad k \geq 1. \quad (27)$$

Заметим теперь, что цепь Z^k получается из цепи Z^{k-1} «исключением» множества C^k , т.е. значение Z^k в момент $n \geq 1$ совпадает со значением Z^{k-1} в момент n -го попадания цепи Z^{k-1} в множество D^k . Из (27) следует, что эта же цепь получится из цепи Z^0 , если сразу «исключить» множество C^k , а значит, в соответствии с (21)

$$\mathcal{P}^k f = [I - P F_d(C^k)]^{-1} P \mathcal{L}_{D^k} f. \quad (28)$$

Из строгой субстохастичности матрицы P следует, что элементы матриц $[I - P F_d(C^k)]^{-1}$ ограничены. Согласно предположению, сделанному при формулировке модели, $\int_{\mathbf{R}} g(i, v) F(i, dv)$ определен и конечен при каждом $i \in B$. Отсюда и из (28) и (22) следует, что последовательность векторов $(d^k)_{k \geq 1}$ ограничена. В силу (26) она сходится к некоторому вектору d^* . А значит, в силу (23) и (27), последовательность множеств $(D^k)_{k \geq 1}$ сходится к некоторому множеству D^* , и, в силу (23), последовательность матриц $(P^k)_{k \geq 1}$ сходится к матрице $P^* = [I - P F_d(C^*)]^{-1} P$, где $C^* = (B \otimes \mathbf{R}) \setminus D^*$. Цепь, отвечающая соответствующему $\mathcal{P}^*$, получается исключением C^* из любой из цепей Z^k , $k \geq 0$. Если $d^{l+1} = d^l$ для некоторого l , то из (23), (22), (25) и доказанной сходимости следует, что $d^k = d^*$, $D^k = D^*$ при $k \geq l$.

Заметим теперь, что $V^k(z)$, $k \geq 1$, есть выигрыш от остановки в момент первого попадания любой из цепей Z^s , $0 \leq s \leq k$, в множество D^k . Поэтому $V^k(z) \leq V(z)$, $k \geq 1$. Отсюда и из (24), (22) и (26) следует, что $V^k(z)$ сходится к некоторой функции $V^*(z)$, для которой $V^*(z) \leq V(z)$. Из (23) и (24) следует, что $V^k(z) = g(z) \geq d^k = \mathcal{P}^{k-1} g(z)$ при $z \in D^k$ и $V^k(z) = d^k = \mathcal{P}^{k-1} g(z) > g(z)$ при $z \in C^k$. Переходя в этих соотношениях к пределу, получаем, что $V^*(z)$ удовлетворяет уравнению оптимальности (9). Но, согласно утверждению 1, $V(z)$ — минимальное решение уравнения оптимальности. Из $V^*(z) \leq V(z)$ получаем, что $V^*(z) = V(z)$. Утверждения а), б) и в) доказаны.

Докажем пункт г). Из условия этого пункта и из сходимости d^k к d^* следует, что существует такое k^* , что $d^k > -\varepsilon I + d^*$ при всех $k \geq k^*$. Но тогда $\mathcal{L}_{D^k} = \mathcal{L}_{D^*}$ при всех $k \geq k^*$. А значит, $d^k = d^*$, $D^k = D^*$ при всех $k \geq k^*$. Лемма 3 доказана.

Утверждение теоремы очевидно следует из утверждений леммы.

Соотношения (22)–(25) дают эффективный алгоритм построения функции выигрыша и множества остановки за конечное число шагов для случая, когда носители распределений всех величин $g(i, \tilde{Y}_i)$ не имеют конечных предельных точек. Продемонстрируем это на следующем примере, заметив предварительно, что при проведении расчетов при переходе от k к $k+1$ не обязательно сразу исключать все множество, где $d^k \leq g(z) < d^{k+1}$, а можно на каждом шаге исключать только его часть.

П р и м е р. Рассмотрим задачу 3, в которой множество B состоит из двух элементов. Если цепь $\tilde{U}$ находится в состоянии 1, то подбрасывается правильная кость, так что распределение $F(1, \cdot)$ сосредоточено с равными вероятностями в точках 1, 2, 3, 4, 5, 6, а если цепь $\tilde{U}$ находится в состоянии 2, то подбрасывается правильный тетраэдр, так что распределение $F(2, \cdot)$ сосредоточено с равными вероятностями в точках 1, 2, 3, 4. Задано значение β параметра дисконтирования и вероятности p_i того, что цепь $\tilde{U}$ останется в состоянии i , так что вероятность перехода из состояния i в состояние 3 – i равна $q_i = 1 - p_i$, $i = 1, 2$. Соответствующая цепь Z определяется матрицей $P = \begin{bmatrix} p_1\beta & q_1\beta \\ q_2\beta & p_2\beta \end{bmatrix} = \beta\tilde{P}$. Рассматривается задача оптимальной остановки с $g(1, y) = g(2, y) = y$.

Для целых чисел k_1, k_2 , $0 \leq k_1 \leq 6$, $0 \leq k_2 \leq 4$, положим $D(k_1, k_2) = \{z = (i, j): i = 1, k_1 < j \leq 6; i = 2, k_2 < j \leq 4\}$. Для оператора $\mathcal{P}'$, соответствующего согласно лемме 2 множеству $D = D(k_1, k_2)$, обозначим $d(k_1, k_2) = \begin{bmatrix} d_1(k_1, k_2) \\ d_2(k_1, k_2) \end{bmatrix} = \mathcal{P}'g$. В этом случае в (21) $P = \beta \begin{bmatrix} p_1 & q_1 \\ q_2 & p_2 \end{bmatrix}$, $F_d(C) = \begin{bmatrix} k_1/6 & 0 \\ 0 & k_2/4 \end{bmatrix}$, $\mathcal{L}_D g = \begin{bmatrix} 3.5 - a_{k_1} \\ 2.5 - a_{k_2} \end{bmatrix}$, где $a_{k_1} = k_1(k_1 + 1)/12$, $a_{k_2} = k_2(k_2 + 1)/8$.

Используя явную формулу для обращения фигурирующей в (21) матрицы размера 2×2 и приводя подобные члены в определителе, получаем

$$[I - PF_d(C)]^{-1} = \frac{1}{\gamma} \begin{bmatrix} 1 - \beta p_2 k_2 / 4 & \beta q_1 k_2 / 4 \\ \beta q_2 k_1 / 6 & 1 - \beta p_1 k_1 / 6 \end{bmatrix},$$

где $\gamma \equiv \gamma(k_1, k_2) = 1 - \beta(p_1 k_1 / 6 + p_2 k_2 / 4) + \beta^2(p_1 - q_2)k_1 k_2 / 24$ — это определитель матрицы $I - PF_d(C)$. Отсюда, используя (21) и определение вектора $d(k_1, k_2)$, получаем в результате умножения матриц, что

$$\begin{aligned} d_1(k_1, k_2) &= \frac{\beta}{\gamma} \left(2.5 - a_{k_2} + p_1(1 + a_{k_2} - a_{k_1}) + \beta(q_2 - p_1) \frac{k_2}{4} (3.5 - a_{k_1}) \right), \\ d_2(k_1, k_2) &= \frac{\beta}{\gamma} \left(2.5 - a_{k_2} + q_2(1 + a_{k_2} - a_{k_1}) + \beta(q_2 - p_1) \frac{k_1}{6} (2.5 - a_{k_2}) \right). \end{aligned}$$

Пусть $[a]$ обозначает целую часть числа a . Согласно (22)–(24), имеем: $d^1 \equiv (d_1^1, d_2^1) = d(0, 0)$, $d^{i+1} \equiv (d_1^{i+1}, d_2^{i+1}) = d(k_1^i, k_2^i)$, где $k_1^i = [d_1^i]$, $k_2^i = [d_2^i]$. Приведем результат вычислений для некоторых конкретных значений.

№	β	p_1	p_2	d^1	d^2	d^3	d^4	d^5
1	0.7	0.60	0.30	2.17, 2.24	2.44, 2.50	2.44, 2.50		
2	0.8	0.60	0.30	2.48, 2.56	2.96, 3.01	2.957, 3.014	2.957, 3.014	
3	0.8	0.64	0.20	2.51, 2.64	2.99, 3.09	3.005, 3.092	3.006, 3.093	3.006, 3.093
4	0.9	0.80	0.05	2.97, 3.11	3.76, 3.81	3.938, 4.001	3.938, 4.001	3.938, 4.001

Из последнего утверждения пункта б) леммы 3 вытекают следующие результаты. В случае 1 множество остановки находится за один шаг и после подбрасывания как

кости, так и тетраэдра нужно останавливаться при выпадении числа, большего или равного трем. В случае 2 множество остановки находится за два шага и после подбрасывания кости нужно останавливаться при выпадении числа, большего или равного трем, а после подбрасывания тетраэдра нужно останавливаться только при выпадении четверки. В случае 3 множество остановки находится за три шага и после подбрасывания как кости, так и тетраэдра нужно останавливаться при выпадении числа, большего или равного четырем. В случае 4 множество остановки находится за три шага и после подбрасывания кости нужно останавливаться при выпадении числа, большего или равного четырем, а после подбрасывания тетраэдра останавливаться не нужно.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Дынкин Е. Б., Юшкевич А. А. Теоремы и задачи о процессах Маркова. М.: Наука, 1967, 232 с.
2. Пресман Э. Л. Об алгоритме Сони́на решения задачи оптимальной остановки. — Труды Четвертой международной конференции по проблемам управления (26–30 января 2009 г.). М.: Институт проблем управления им. В. А. Трапезникова РАН, 2009, с. 300–309.
3. Роббинс Г., Сигмунд Д., Чао И. Теория оптимальных правил остановки. М.: Наука, 1977, 168 с.; пер. с англ.: Chow Y. S., Robbins H., Sigmund D. Great Expectations: The Theory of Optimal Stopping. Boston: Houghton Mifflin, 1971, 141 p.
4. Ширяев А. Н. Статистический последовательный анализ: оптимальные правила остановки. М.: Наука, 1969, 232 с.; 2-е изд.: М.: Наука, 1976, 272 с.
5. Çinlar E. Introduction to Stochastic Processes. Englewood Cliffs: Prentice-Hall, 1975, 402 p.
6. Ferguson T. S. Optimal Stopping and Applications. <http://www.math.ucla.edu/~tom/>
7. Peskir G., Shiryaev A. N. Optimal Stopping and Free-Boundary Problems. Basel: Birkhäuser, 2006, 500 p.
8. Puterman M. L. Markov Decision Processes: Discrete Stochastic Dynamic Programming. New York: Wiley, 1994, 649 p.
9. Sonin I. M. Two simple theorems in the problems of optimal stopping. — Proceedings of the 8th INFORMS Appl. Probab. Conf., Atlanta, Georgia, 1995, p. 27.
10. Sonin I. M. The elimination algorithm for the problem of optimal stopping. — Math. Methods Oper. Res., 1999, v. 49, № 1, p. 111–123.
11. Sonin I. M. The state reduction and related algorithms and their applications to the study of Markov chains, graph theory, and the optimal stopping problem. — Adv. Math., 1999, v. 145, № 2, p. 159–188.
12. Sonin I. M. The optimal stopping of «seasonal» observations. — Proceedings of the 11th INFORMS Appl. Probab. Conf., New York, 2001, p. 28.
13. Sonin I. M. The optimal stopping of a Markov chain and recursive solution of Poisson and Bellman equations. — From Stochastic Calculus to Mathematical Finance. Berlin: Springer-Verlag, 2006, p. 609–621.

Поступила в редакцию
28.III.2008

Исправленный вариант
26.III.2009