Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Н. Колмогоров, Некоторые неравенства, связанные с усиленным законом больших чисел, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2003, том 48, выпуск 2, 249–253

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp283>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.93.64.190

26 апреля 2023 г., 17:27:19

Из архивных материалов

© 2003 г.

КОЛМОГОРОВ А. Н.

НЕКОТОРЫЕ НЕРАВЕНСТВА, СВЯЗАННЫЕ С
УСИЛЕННЫМ ЗАКОНОМ БОЛЬШИХ ЧИСЕЛ

История публикуемой ниже заметки А. Н. Колмогорова, написанной более 40 лет назад (она датируется автором апрелем 1962 г.), такова. В то время, будучи аспирантом Андрея Николаевича, я занимался обобщением и уточнением известного неравенства Чебышева. С результатами моих размышлений я выступил на семинаре А. Н. Колмогорова в МГУ. В 1962 году по просьбе С. Н. Бернштейна я написал комментарий к его статье «О некоторых видоизменениях неравенства Чебышева» (эта статья и комментарий к ней включены в четвертый том собрания сочинений С. Н. Бернштейна). Андрей Николаевич с интересом отнесся к моей работе, опубликованной в том же году в трудах МФТИ, и во время моего посещения Комаровки с отчетом о проделанной работе Андрей Николаевич дал мне рукопись небольшой его заметки. Он попросил меня ознакомиться с нею и подумать на эту тему, близкую к тому, о чем я рассказывал в моем докладе на его семинаре и писал в комментарии к работе С. Н. Бернштейна. Через некоторое время я сообщил А. Н. о своих соображениях и спросил его, не собирается ли он подготовить свою заметку к публикации. А. Н. ответил, что пока это не входит в его планы. Его рукопись осталась у меня и сохранилась в моем архиве.

Хотя она не содержит фундаментальных результатов, какими обычно отличались работы А. Н. Колмогорова, знакомство с тем, о чем он думал и над чем работал в этот плодотворный период его деятельности, несомненно, будет интересно и полезно как для сложившихся специалистов, так и для тех, кто только связывает свою научную деятельность с теорией вероятностей.

В рукописи, среди прочего, содержится формула (9), в которой $\varepsilon > 0$ и $p \in (0, 1)$, где μ_n — число успехов в n испытаниях Бернулли с вероятностью успеха p . Для $p = \frac{1}{2}$ в рукописи также указано более точное неравенство (8).

Следует отметить, что сходные неравенства приводятся в опубликованных позднее учебниках: Боровков А. А. Теория вероятностей. М.: Наука, 1986; Ширяев А. Н. Вероятность. М.: Наука, 1989.

В частности, на с. 131 первого учебника приведены неравенства

$$\mathbf{P}(\mu_n - np \geq \varepsilon) \leq e^{-nH(p+\varepsilon/n)}, \quad \mathbf{P}(\mu_n - np \leq -\varepsilon) \leq e^{-nH(p-\varepsilon/n)},$$

где H — некоторая функция, удовлетворяющая условию $H(x) \geq 2x^2$. На с. 81 второго учебника приведено неравенство $\mathbf{P}(|\mu_n/n - p| \geq \varepsilon)$

А. Н. Колмогоров.

Некоторые неравенства, связанные с усиленным законом больших чисел.

1. Мы будем исходить из двух общеизвестных фактов:

а) Если при $k = 1, 2, \dots, n$

$$M(\xi_k | \xi_{k-1}, \xi_{k-2}, \dots, \xi_1) \leq \theta_k,$$

где θ_k константы, то

$$M(\xi_1 \xi_2 \dots \xi_n) \leq \theta_1 \theta_2 \dots \theta_n.$$

б) $P(\xi \geq z) \leq e^{-az} M e^{a\xi}$

при любом $a \geq 0$.

ТЕОРЕМА. Пусть для последовательности случайных

величин

$$\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots$$

и константы $a \geq 0$ при каждом $n = 1, 2, \dots$

$$M(e^{a\xi_n} | \xi_{n-1}, \xi_{n-2}, \dots, \xi_1) \leq \theta,$$

где θ некоторая константа. Тогда

$$\log P\left(\sup_{n \geq N} \frac{\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n}{n} \geq c\right) \leq N(\log \theta - ac) \quad (1)$$

при любых c и N .

3. В заключение рассмотрим схему Бернулли: последовательность независимых испытаний с постоянной вероятностью

p положительного исхода. Как обычно, положим

$\xi_n = 1$ в случае положительного исхода n -ого испытания и

$\xi_n = 0$ в случае отрицательного,

$$M_n = \xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n.$$

В этой обстановке теорема п. 1 приводит к неравенству

$$\log P\left(\sup_{n \geq N} \frac{M_n}{n} \geq p + \epsilon\right) \leq N[\log(pe^a + q) - a(p + \epsilon)]. \quad (2)$$

Выбор наиболее выгодного, при данных p, ϵ и N значения a приводит к довольно простому вычислению.

$\leq 2e^{-2n\epsilon^2}$. Более внимательное исследование приема А. Н. Колмогорова, по всей видимости, может привести к неравенству $P(\sup_{k \geq n} |\mu_k/k - p| \geq \epsilon) \leq 2e^{-2n\epsilon^2}$ для всех $p \in (0, 1)$.

В заключение благодарю В. Ю. Королева и В. М. Круглова за помощь при подготовке рукописи к печати.

В. М. Золотарев

1. Мы будем исходить из двух общеизвестных фактов:

а) если при $k = 1, 2, \dots, n$

$$M(\zeta_k | \xi_{k-1}, \xi_{k-2}, \dots, \xi_1) \leq b_k,$$

где¹⁾ b_k — константы, то

$$M(\zeta_1 \zeta_2 \dots \zeta_n) \leq b_1 b_2 \dots b_n,$$

б) $P(\zeta \geq z) \leq e^{-az} M e^{a\zeta}$

при любом $a \geq 0$.

Теорема. Пусть для последовательности случайных величин

$$\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots$$

и константы $a \geq 0$ при каждом $n = 1, 2, \dots$

$$M(e^{a\xi_n} | \xi_{n-1}, \xi_{n-2}, \dots, \xi_1) \leq b,$$

где b — некоторая константа. Тогда

$$\log P\left(\sup_{n \geq N} \frac{\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n}{n} \geq c\right) \leq N(\log b - ac) \quad (1)$$

при любых c и N .

Мы будем доказывать (1) для случая конечной последовательности

$$\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots, \xi_s.$$

Предельный переход к случаю бесконечной последовательности не представляет затруднений. В случае конечной последовательности верхняя грань в (1) достигается и (1) можно переписать в виде

$$\log P\{E(n): N \leq n \leq s, \xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n - nc \geq 0\} \leq N(\log b - ac). \quad (1a)$$

Если $\log b - ac \geq 0$, то неравенство (1) тривиально, так как всегда $\log P \leq 0$. Будем поэтому предполагать, что

$$\log b - ac \leq 0. \quad (2)$$

Пусть ν равно наименьшему n , $N \leq n \leq s$, для которого

$$\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n - nc \geq 0,$$

¹⁾ Здесь и далее предполагается, что $\zeta_k = e^{a\xi'_k}$ (a и ξ'_k определены ниже). — В. Золотарев.

если же такого нет, пусть $\nu = s$. Существенно заметить, что для того, чтобы установить, будет $n \leq \nu$, или нет, достаточно знания величин $\xi_{n-1}, \xi_{n-2}, \dots, \xi_1$.

Положим

$$\xi'_n = \begin{cases} \xi_n - c & \text{при } n \leq \nu, \\ 0 & \text{при } n > \nu. \end{cases}$$

Тогда

$$\Delta_n = \mathbf{M}(e^{a\xi'_n} | \xi'_{n-1}, \dots, \xi'_1) \begin{cases} \leq be^{-ac} & \text{при } n \leq \nu, \\ = 1 & \text{при } n > \nu. \end{cases}$$

В силу (2) всегда

$$\Delta_n \leq 1,$$

но так как $\nu \geq N$, то при $n \leq N$ заведомо

$$\Delta_n \leq be^{-ac}.$$

Поэтому для

$$\zeta = \xi'_1 + \xi'_2 + \dots + \xi'_s = \xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_\nu - \nu c$$

получаем

$$\mathbf{M}e^{a\zeta} \leq (be^{-ac})^N, \quad \log \mathbf{P}(\zeta \geq 0) \leq N(\log b - ac).$$

Но

$$\mathbf{P}(\zeta \geq 0) = \mathbf{P}(\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_\nu - \nu c \geq 0)$$

и есть та вероятность, которая оценивается в теореме. Теорема доказана.

2. Предположим, что величины последовательности

$$\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots$$

удовлетворяют условиям

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{M}(\xi_n | \xi_{n-1}, \xi_{n-2}, \dots, \xi_1) &\leq 0, \\ \mathbf{M}(\xi_n^2 | \xi_{n-1}, \xi_{n-2}, \dots, \xi_1) &\leq \sigma^2, \\ \xi_n &\leq l. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Тогда (в выкладках $|\xi_{n-1}, \dots, \xi_1$ опущено)

$$\mathbf{M}(e^{a\xi_n} | \xi_{n-1}, \dots, \xi_1) = \mathbf{M}\left(1 + a\xi_n + \frac{a^2\xi_n^2}{2} + \frac{a^3\xi_n^3}{6} e^{\theta al}\right),$$

где $\theta \leq 1$, и при $al \leq 1$

$$\begin{aligned} \mathbf{M}e^{a\xi_n} &\leq 1 + \frac{a^2\sigma^2}{2} + \frac{a^3\sigma^2 l}{6} e \leq 1 + \frac{a^2\sigma^2}{2} (1 + al), \\ \log \mathbf{M}e^{a\xi_n} &\leq \frac{a^2\sigma^2}{2} (1 + al). \end{aligned} \quad (4)$$

При помощи доказанной в п. 1 теоремы и (4) получаем, что при $al \leq 1$

$$\log \mathbf{P} \left(\sup_{n \geq N} \frac{\xi_1 + \dots + \xi_n}{n} \geq \varepsilon \right) \leq N \left[\frac{a^2 \sigma^2}{2} (1 + al) - a\varepsilon \right]. \quad (5)$$

Полагая

$$a = \frac{\varepsilon}{\sigma^2},$$

мы видим, что

$$\log \mathbf{P} \left(\sup_{n \geq N} \frac{\xi_1 + \dots + \xi_n}{n} \geq \varepsilon \right) \leq -\frac{N\varepsilon^2}{2\sigma^2} \left(1 - \frac{\varepsilon l}{\sigma^2} \right) \quad \text{при } \varepsilon l \leq \sigma^2. \quad (6)$$

3. В заключение рассмотрим схему Бернулли: последовательность независимых испытаний с постоянной вероятностью p положительного исхода. Как обычно, положим $\xi_n = 1$ в случае положительного исхода n -го испытания и $\xi_n = 0$ в случае отрицательного,

$$\mu_n = \xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n.$$

В этой обстановке теорема п. 1 приводит к неравенству²⁾

$$\log \mathbf{P} \left(\sup_{n \geq N} \frac{\mu_n}{n} \geq p + \varepsilon \right) \leq N [\log(pe^a + q) - a(p + \varepsilon)]. \quad (7)$$

Выбор наиболее выгодного (при данных p , ε и N) значения a приводит к довольно громоздким вычислениям. Не гонясь за полным использованием неравенства (7), при $p = \frac{1}{2}$ можно получить

очень простое неравенство

$$\log \mathbf{P} \left(\sup_{n \geq N} \frac{\mu_n}{n} \geq p + \varepsilon \right) \leq -2N\varepsilon^2. \quad (8)$$

Следующее неравенство верно при любом p , $0 \leq p \leq 1$:

$$\log \mathbf{P} \left(\sup_{n \geq N} \frac{\mu_n}{n} \geq p + \varepsilon \right) \leq -2N\varepsilon^2(1 - \varepsilon). \quad (9)$$

8 апреля 1962 .

²⁾ в котором $q = 1 - p$ — В. Золотарев.