Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Боровков, Асимптотика вероятности пересечения границы траекторией цепи Маркова. Экспоненциально убывающие хвосты скачков, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2003, том 48, выпуск 2, 254–273

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp284>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.27.143

26 апреля 2023 г., 16:40:33

© 2003 г.

БОРОВКОВ А. А.*

АСИМПТОТИКА ВЕРОЯТНОСТИ ПЕРЕСЕЧЕНИЯ ГРАНИЦЫ ТРАЕКТОРИЕЙ ЦЕПИ МАРКОВА. ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНО УБЫВАЮЩИЕ ХВОСТЫ СКАЧКОВ

Пусть $X(n) = X(u, n)$, $n = 0, 1, \dots$, — однородная во времени эргодическая вещественнозначная цепь Маркова с переходной вероятностью $P(u, B)$ и начальным значением $u \equiv X(u, 0) = X(0)$. Изучается асимптотика вероятности пересечения траекторией $X(k)$, $k = 0, 1, \dots, n$, заданной границы $g(k)$, $k = 0, 1, \dots, n$, т.е. вероятности $\mathbf{P}\{\max_{k \leq n} (X(k) - g(k)) > 0\}$, где граница $g(\cdot)$ зависит, вообще говоря, от n , а также от некоторого растущего параметра x таким образом, что $\min_{k \leq n} g(k) \rightarrow \infty$ при $x \rightarrow \infty$. Относительно цепи предполагается, что она частично однородна в пространстве, т.е. при некотором $N \geq 0$ переходная вероятность $P(u, dv)$ при $u > N$, $v > N$ зависит лишь от разности $v - u$. Предполагается также, что при некотором $\lambda > 0$

$$\sup_{u \leq 0} \mathbf{E} e^{(u + \xi(u))\lambda} < \infty, \quad \sup_{u \geq 0} \mathbf{E} e^{\lambda \xi(u)} < \infty,$$

где $\xi(u) = X(u, 1) - u$ есть приращение цепи из точки u за один шаг.

Настоящая работа является продолжением статьи [1], где были рассмотрены регулярные хвосты распределений $\xi(u)$. В работе получены предельные теоремы, описывающие асимптотику изучаемых вероятностей при весьма широких условиях в области как больших, так и нормальных отклонений. Изучены также асимптотические свойства циклов по возвращению в положительный атом. Установлен аналог закона повторного логарифма.

Ключевые слова и фразы: цепи Маркова, большие отклонения, пересечение границы, экспоненциально убывающие хвосты, закон повторного логарифма.

§ 1. Введение

Пусть $X(k) = X(u, k)$, $k = 0, 1, \dots$, — однородная во времени вещественнозначная, эргодическая цепь Маркова с начальным значением $u \equiv X(u, 0)$ и переходной вероятностью

$$P(u, B) = \mathbf{P}\{X(u, 1) \in B\}.$$

* Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, просп. Академика Коптюга, 4, 630090 Новосибирск, Россия; e-mail: borovkov@math.nsc.ru

Изучается асимптотика вероятности пересечения траекторией $X(k)$ заданной границы $g(k)$, $k = 0, 1, \dots, n$:

$$\mathbf{P}\left\{\max_{k \leq n} (X(k) - g(k)) > 0\right\}. \quad (1.1)$$

Граница $g(\cdot)$ зависит, вообще говоря, от n , а также от некоторого растущего параметра x таким образом, что $\min_{k \leq n} g(k) \rightarrow \infty$ при $x \rightarrow \infty$. Относительно цепи предполагается, что она является N -частично однородной (или просто *частично однородной*) в пространстве, т.е. при некотором $N \geq 0$ переходная вероятность $P(u, dv)$ при $u > N$, $v > N$ зависит лишь от разности $v - u$. Другими словами, при $u > N$ проекция распределения приращения $\xi(u) = X(u, 1) - u$ на множество $(N - u, \infty)$ совпадает с проекцией на это множество распределения некоторой случайной величины ξ . Это значит, что в области $u > N$ траектория цепи ведет себя, как процесс суммирования независимых одинаково распределенных случайных величин $\xi_1, \xi_2, \dots$, распределенных как ξ . Например, цепь $Y(k)$ вида

$$Y(k+1) = \max(0, Y(k) + \xi_{k+1}) \quad (1.2)$$

является 0-частично однородной.

Осциллирующее блуждание, для которого

$$\xi(u) \stackrel{d}{=} \xi \quad \text{при } u > 0, \quad \xi(u) \stackrel{d}{=} \zeta \quad \text{при } u < 0, \quad (1.3)$$

также является 0-частично однородной цепью.

Кроме того, мы будем предполагать, что приращения цепи удовлетворяют «правостороннему» условию Крамера в виде

$$\sup_{u < 0} \mathbf{E} e^{(u + \xi(u))\lambda} < \infty, \quad \sup_{u > 0} \mathbf{E} e^{\lambda \xi(u)} < \infty \quad (1.4)$$

при некотором $\lambda > 0$.

Настоящая работа является продолжением работы [1], где рассматривался более широкий класс так называемых асимптотически однородных в пространстве цепей Маркова, когда $\xi(u) \Rightarrow \xi$ по распределению при $u \rightarrow \infty$, но вместо (1.4) накладывалось условие регулярности хвостов $V_u(t) = \mathbf{P}\{\xi(u) > t\}$. В работе [1] см. также более полную библиографию.

N -частично однородные и асимптотически однородные (в пространстве) цепи являются естественными обобщениями цепей вида (1.2), (1.3). Эти понятия детально обсуждались и использовались в [1]–[4], [11], [13] и ряде других работ.

Как известно, цепи (1.2) описывают работу целого ряда систем обслуживания. Например, $Y(u)$ можно интерпретировать как время ожидания n -го вызова в системе $G/G/1$, если положить $\xi = s - \tau$, где s —

время обслуживания, τ — интервал времени между приходами вызовов. (Для несколько иных систем $Y(n)$ будет описывать длину очереди; цепи (1.2) появляются и во многих других задачах). *N-частично однородные цепи* могут описывать поведение «управляемых» систем того же вида. Простейшее управление в системе $G/G/1$ может состоять, например, в том, что интенсивность обслуживания в области $Y \geq N$ при каком-нибудь $N > 0$ увеличивается в b раз. Тогда мы должны положить

$$\xi(u) = \begin{cases} \zeta = s - \tau & \text{при } u < N, \\ \xi = \frac{s}{b} - \tau & \text{при } u \geq N. \end{cases}$$

Такого вида управление при $b > 1$ может уменьшить потери, если затраты в системе растут вместе с ростом очереди, или уменьшить вероятность «переполнения» системы (попадания в область $Y > M > N$) при ограниченной «в среднем» интенсивности обслуживания.

Класс границ $\{g(k)\}$ в настоящей работе также будет несколько уже, чем в [1]. Будут рассматриваться главным образом границы вида

$$g(k) = xf\left(\frac{k}{n}\right), \quad k = 1, \dots, n, \quad (1.5)$$

где f — достаточно гладкая функция на $[0, 1]$. Основное же внимание будет уделено постоянной границе $f(t) = 1$, т.е. распределению

$$\mathbf{P}\{\bar{X}(u, n) > x\}, \quad (1.6)$$

где $\bar{X}(u, n) = \max_{k \leq n} X(u, k)$.

Асимптотика вероятностей $\mathbf{P}\{X(u) > x\}$ для описанного выше класса цепей была достаточно полно изучена в [2], [3], [11]. Чтобы сформулировать результаты этих работ, которые нам понадобятся, введем ряд обозначений. Пусть

$$\varphi(\lambda) = \mathbf{E}e^{\lambda\xi}, \quad \lambda_+ = \sup\{\lambda: \varphi(\lambda) < \infty\} > 0.$$

Для эргодической цепи с необходимостью выполняется $a = \mathbf{E}\xi = \varphi'(0) < 0$. Если $\varphi(\lambda_+) \geq 1$, то всегда существует единственное $\beta > 0$ такое, что $\varphi(\beta) = 1$. Мы всюду будем предполагать, что

$$\varphi(\lambda_+) \geq 1, \quad \varphi'(\beta) < \infty. \quad (1.7)$$

Случай, когда $\beta = \sup\{\lambda: \varphi(\lambda) \leq 1\} > 0$, $\varphi(\beta) < 1$, является более сложным, он также может быть изучен, но в этой работе не рассматривается.

Важную роль, особенно при описании вероятностей больших отклонений сумм

$$S(n) = \sum_{i=1}^n \xi_i,$$

играет функция уклонений

$$\Lambda(\alpha) = \sup_{\lambda} (\alpha\lambda - \ln \varphi(\lambda)), \quad (1.8)$$

являющаяся выпуклой неотрицательной функцией, аналитической при $0 < \alpha < \alpha_+ = \varphi'(\lambda_+)/\varphi(\lambda_+)$. Точка $\lambda(\alpha)$, в которой достигается супремум в (1.8), единственна и обладает свойством $\lambda(\alpha) = \Lambda'(\alpha) \uparrow$. Важную роль будет играть также функция

$$V(\alpha) = \frac{\Lambda(\alpha)}{\alpha}. \quad (1.9)$$

Она имеет единственный минимум в точке $\alpha_0 = \varphi'(\beta)$,

$$\lambda(\alpha_0) = \beta, \quad \Lambda(\alpha_0) = \beta\alpha_0, \quad V(\alpha_0) = \beta$$

(см. [3]). Одно из основных утверждений [3] состоит в следующем.

Теорема 1.1. Пусть цепь $\{X(k)\}$ эргодична в смысле сходимости по вариации, $|u| < c$, распределение ξ нерешетчато и выполнено условие (1.7).

1. Пусть дополнительно выполнено условие (1.4) при каком-нибудь $\lambda > \beta$ и

$$n = \frac{x}{\alpha_0} + y\sqrt{x}, \quad (1.10)$$

где $y \geq y(x)$, $y(x) \rightarrow -\infty$, $|y(x)| = o(x^{1/6})$ при $x \rightarrow \infty$. Тогда

$$\pi_n(x) \equiv \mathbf{P}\{X(u, n) > x\} = (b + o(1)) e^{-\beta x} \Phi\left(\frac{y\alpha_0^{3/2}}{\sigma(\alpha_0)}\right) \quad (1.11)$$

при $x \rightarrow \infty$, где остаточный член $o(1)$ равномерен по всем n таким, что $y \geq y(x)$, $\Phi(\cdot)$ — функция распределения стандартного нормального закона,

$$(\sigma^{(\alpha)})^2 = (\Lambda''(\alpha))^{-1}, \quad b = \frac{1}{\beta\alpha_0} \int_{-\infty}^N \pi(du) \int_N^{\infty} b(N-u, \alpha_0) e^{\beta v} P(u, dv),$$

$\pi(\cdot)$ — стационарное распределение цепи, $b(v, \alpha) = \mathbf{P}\{m^{(\alpha)} > v\}$, $m^{(\alpha)} = \min_{k \geq 0} S^{(\alpha)}(k)$, $S^{(\alpha)}(k) = \sum_{i=1}^k \xi_i^{(\alpha)}$, $\xi_i^{(\alpha)}$ — независимые случайные величины с распределением

$$\mathbf{P}\{\xi^{(\alpha)} \in dv\} = \frac{e^{\lambda(\alpha)v} dv}{\varphi(\lambda(\alpha))}.$$

В частности,

$$\pi_n(x) = (b + o(1)) e^{-\beta x}$$

равномерно по $n \geq x/\alpha_0 + y_1(x)\sqrt{x}$, если $y_1(x) \rightarrow \infty$ при $x \rightarrow \infty$.

2. Пусть

$$\frac{x}{n} \rightarrow \alpha \in (\alpha_0, \alpha_+)$$

и выполнено (1.4) при некотором $\lambda > \lambda_1 > \lambda(\alpha)$. Пусть α_1 — решение уравнения $\lambda(\alpha) = \lambda_1$. Тогда при $\alpha \in (\alpha_0, \alpha_1)$

$$\pi_n(x) = (b(\alpha) + o(1)) n^{-1/2} e^{-xV(x/n)},$$

где непрерывная функция $b(\alpha)$, как и постоянная b , известна в явном виде, но в отличие от b зависит также от начального значения u (см. (4.14) в [3]).

Если цепь Маркова $X(\cdot)$ решетчатая, то все утверждения сохраняются при $x \rightarrow \infty$ по соответствующей решетке.

Что касается граничных задач для $\{X(k)\}$ при условиях (1.4), то нам известны лишь результаты, касающиеся предельного распределения $\bar{Y}(n) = \max_{k \leq n} Y(k)$ для процесса $Y(k)$ вида (1.2) (см. [5]). Установлено, что при $n \rightarrow \infty$

$$\mathbf{P}\{\bar{Y}(0, n) - \beta^{-1} \ln n < t\} \rightarrow e^{-e^{-\beta t}}.$$

Доказательство в [5] использует, как и в [6], (где изучались цепи с регулярными хвостами) асимптотические свойства циклов по возвращению в точку 0. Для общих регенерирующих процессов Y_k (и, в частности, для положительно возвратных харрисовых цепей) асимптотика распределений $\bar{Y}_n = \max_{k \leq n}$ в терминах распределений максимумов по циклам получена в [16]. Метод изучения общих положительно возвратных по Харрису цепей (см. [11], [14], [15]) с помощью циклов по возвращению в положительный атом восходит к работам Колмогорова и Дёблина и стал классическим. Он использовался также в [1], [11], [13].

Параграф 2 посвящен главным образом локальным теоремам для времени первого прохождения сначала не зависящего от времени растущего уровня x , а затем и криволинейной границы вида (1.5). Из этих результатов немедленно вытекают интегральные теоремы или теоремы об асимптотике вероятности пересечения границы за время n .

В § 3 для цепей Маркова, положительно возвратных по Харрису, аналогичные результаты о вероятности пересечения не зависящей от времени границы получены в терминах циклов по возвращению в положительный атом. Сопоставление этих результатов с результатами § 2 позволяет найти важную для дальнейшего асимптотику хвостов для «высот» этих циклов. Это, в свою очередь, дает возможность получить предельные теоремы о распределении $\bar{X}(u, n)$ в области нормальных уклонений, а также универсальную теорему о распределении $\bar{X}(u, n)$, действующую равномерно на всей оси (для всех уклонений), с правой частью, найденной в явном виде.

В § 4 установлен закон повторного логарифма для $\{X(k)\}$.

§ 2. Асимптотика вероятности пересечения границы

Основное содержание этого параграфа — отыскание асимптотик вероятностей (1.1), (1.6). Однако сначала мы получим более полные и точные результаты, относящиеся к этим задачам. Мы имеем в виду локальные теоремы для времени первого прохождения уровня x :

$$\eta(x) = \min \{k: X(u, k) \geq x\}$$

(так что $\mathbf{P}\{\bar{X}(u, n) > x\} = \sum_{k=1}^n \mathbf{P}\{\eta(x) = k\}$) и, более общо, границы g :

$$\eta(g(\cdot)) = \min \{k: X(u, k) \geq g(k)\}.$$

2.1. Случай $g(\cdot) = x$. Буквой c с индексами или без мы будем в дальнейшем обозначать различные постоянные, не всегда одни и те же, если они используются в разных формулах. Соотношение $a(x, n) \sim b(x, n)$ будет означать, что $a(x, n)/b(x, n) \rightarrow 1$ при $x \rightarrow \infty$ и указанных интервалах значений n .

Теорема 2.1. Пусть цепь Маркова $\{X(k)\}$ эргодична в смысле сходимости по вариации, $|u| < c$, распределение ξ нерешетчато и выполнено условие (1.7).

1. Пусть дополнительно выполнено условие (1.4) при каком-нибудь $\lambda > \beta$ и

$$k = \frac{x}{\alpha_0} + y\sqrt{x}, \quad x - \frac{1}{\beta} \ln k \rightarrow \infty, \quad (2.1)$$

где $y \geq y(x)$, $y(x) \rightarrow \infty$ (сколь угодно медленно). Тогда

$$\mathbf{P}\{\eta(x) = k\} = (b_1 + o(1))e^{-\beta x}, \quad (2.2)$$

где остаточный член $o(1)$ равномерен по всем k таким, что $y \geq y(x)$,

$$b_1 = \beta b c(\alpha_0), \quad (2.3)$$

в определено в теореме 1.1, $c(\alpha)$ — в формуле (2.23).

2. Пусть

$$\frac{x}{k} \rightarrow \alpha \in (\alpha_0, \alpha_+)$$

и выполнено (1.4) при некотором $\lambda > \lambda_1 > \lambda(\alpha)$. Пусть α_1 — решение уравнения $\lambda(\alpha) = \lambda_1$. Тогда при $\alpha \in (\alpha_0, \alpha_1)$

$$\mathbf{P}\{\eta(x) = k\} \sim b_1(\alpha) \frac{e^{-xV(x/k)}}{\sqrt{k}}, \quad (2.4)$$

где $b_1(\alpha)$ определено в (2.31), $xV(x/k) \equiv k\Lambda(x/k)$.

3. Если цепь $\{X(k)\}$ решетчатая, то утверждение теоремы полностью сохранится, если x принимает значения из соответствующей решетки.

З а м е ч а н и е 2.1. Из теорем 1.1, 2.1 вытекает, что при выполнении названных в этих теоремах условий вероятности $\mathbf{P}\{\eta(x) = k\}$ и $\mathbf{P}\{X(u, k) > x\}$ имеют один и тот же порядок малости, т.е. существует положительный конечный $\lim_{k \rightarrow \infty, x \rightarrow \infty} [\mathbf{P}\{\eta(x) = k\} / \mathbf{P}\{X(u, k) > x\}]$.

В свою очередь, асимптотика $\mathbf{P}\{X(u, k) > x\}$ при выполнении (2.1) совпадает с точностью до постоянного множителя с асимптотикой $\mathbf{P}\{\sup_{n \geq 0} S(n) > x\}$.

Из теоремы 2.1 будет следовать

Теорема 2.2. 1. Пусть выполнены условия п. 1 теоремы 2.1 при замене k на n . Тогда

$$\mathbf{P}\{\bar{X}(u, n) > x\} \sim (n - \alpha_0^{-1}x) b_1 e^{-\beta x}, \quad (2.5)$$

$$\mathbf{P}\{n^{-1}\eta(x) < t \mid \eta(x) \leq n\} \rightarrow t$$

при $t \in [0, 1]$.

Если положить $\chi(x) = X(u, \eta(x)) - x$, то при $n \rightarrow \infty$

$$\mathbf{P}\{\chi(x) > t \mid \eta(x) \leq n\} \rightarrow e^{-\beta t}. \quad (2.6)$$

2. Пусть выполнены условия п. 2 теоремы 2.1 при замене k на n . Тогда

$$\mathbf{P}\{\bar{X}(u, n) > x\} \sim \frac{b_2(\alpha)}{\sqrt{n}} e^{-xV(x/n)}, \quad (2.7)$$

где $b_2(\alpha) = b_1(\alpha) \sum_{j=0}^{\infty} e^{-\alpha^2 j V'(\alpha)}$.

Условные распределения $\eta(x)/n$ при условии $\eta(x) \leq n$ сходятся к вырожденному распределению, сосредоточенному в точке 1.

3. Если цепь решетчатая, то справедливо утверждение п. 3 теоремы 2.1.

Д о к а з а т е л ь с т в о т е о р е м ы 2.1. Основная идея доказательства здесь существенно иная, чем при изучении аналогичных задач в [1], где рассматривались регулярные хвосты. Но она очень близка к тому, что делалось в [2], [3], и состоит в использовании формулы полной вероятности по последнему попаданию в область $[-\infty, N]$. Будем считать, не ограничивая общности, что $u \leq N$. Тогда названная формула будет иметь вид

$$\begin{aligned} P_k \equiv \mathbf{P}\{\eta(x) = k\} &= \sum_{j=0}^{k-2} \int_{v=-\infty}^N \mathbf{P}\{\bar{X}(u, j) \leq x, X(u, j) \in dv\} \\ &\int_{w=N}^x \mathbf{P}\{v + \xi(v) \in dw\} \int_{z=N}^x \mathbf{P}\{X(w, k-j-2) \in dz, \\ &\bar{X}(w, k-j-2) \leq x, \underline{X}(w, k-j-2) > N\} \mathbf{P}\{z + \xi > x\}, \end{aligned} \quad (2.8)$$

где $\underline{X}(w, l) = \min_{j \leq l} X(w, j)$.

В [3] для изучения $\mathbf{P}\{X(u, n) > x\}$ использовалась аналогичная формула, которая была несколько проще и имела вид

$$\mathbf{P}\{X(u, k) > x\} = \sum_{j=0}^{k-1} \int_{-\infty}^N \mathbf{P}\{X(u, j) \in dv\} \int_{w=N}^{\infty} \mathbf{P}\{v + \xi(v) \in dw\} \\ \mathbf{P}\{X(w, k-j-1) > x, \underline{X}(w, k-j-1) > N\}. \quad (2.9)$$

Вычисление правых частей в (2.8) и (2.9) происходит совершенно аналогично, и асимптотический анализ первой может быть во многом сведен к анализу второй. В связи с тем, что вычисление (2.9) подробно изложено в [3], наши дальнейшие рассуждения не всегда будут детальными. Рассмотрим сначала случай

$$k = \frac{x}{\alpha_0} + y\sqrt{x}, \quad y \geq y(x) \rightarrow \infty, \quad (2.10)$$

и введем меру

$$Q_k(B) = \sum_{j=0}^{k-1} \int_{-\infty}^N \mathbf{P}\{X(u, j) \in dv\} \\ \int_{w=N}^x P(v, dw) \mathbf{P}\{X(w, k-j-1) \in B, \\ \underline{X}(w, k-j-1) > N\}. \quad (2.11)$$

Дальнейшее доказательство разобьем на несколько этапов, в которых, в частности, будут прояснены сходство и различия между функционалами (2.8), (2.9), (2.11).

1. Обозначим $\Delta(z) = (z, z + \Delta)$, где $\Delta \rightarrow 0$ достаточно медленно. При $z < x$ для последнего множителя в (2.11), как и в (2.9), согласно частичной однородности $\{X(k)\}$ и результатам [7], [8] при

$$B = \Delta(z), \quad k-j-1 = l, \quad \gamma = \frac{z-w}{l} < \alpha_+, \quad S(l) = \sum_{j=1}^l \xi_j, \\ \underline{S}(l) = \min_{i \leq l} S(i), \quad m^{(\gamma)}(l) = \min_{i \leq l} S^{(\gamma)}(i), \quad m^{(\gamma)} = m^{(\gamma)}(\infty),$$

выполняется (ср. также с [3])

$$\mathbf{P}\{X(w, l) \in \Delta(z), \underline{X}(w, l) > N\} = \mathbf{P}\{w + S(l) \in \Delta(z), w + m(l) > N\} \\ \sim \mathbf{P}\{S(l) \in \Delta(z) - w\} \mathbf{P}\{m^{(\gamma)}(l) > N - w\}. \quad (2.12)$$

По тем же соображениям аналогичная вероятность для (2.8) имеет вид

$$\mathbf{P}\{X(w, l) \in \Delta(z), \underline{X}(w, l) > N, \overline{X}(w, l) \leq x\} \\ = \mathbf{P}\{w + S(l) \in \Delta(z), w + \underline{S}(l) > N, w + \overline{S}(l) \leq x\} \\ \sim \mathbf{P}\{S(l) \in \Delta(z) - w\} \mathbf{P}\{m^{(\gamma)}(l) > N - w\} \mathbf{P}\{m^{(\gamma)}(l) \geq z - x\}. \quad (2.13)$$

Здесь в обоих случаях $\mathbf{P}\{m^{(\gamma)}(l) > N - w\} \rightarrow \mathbf{P}\{m^{(\gamma)} > N - w\}$, $\mathbf{P}\{m^{(\gamma)}(l) \geq z - x\} \rightarrow \mathbf{P}\{m^{(\gamma)} \geq z - x\}$ при $l \rightarrow \infty$. Так как основной вклад в сумму (2.9) вносят слагаемые, для которых $\gamma = (z - w)/l \sim \alpha_0$ (см. [3]), то то же самое будет происходить и при вычислении (2.8) и $Q_k(B)$ и, стало быть, значимыми для нас будут лишь $\gamma \sim \alpha_0$.

2. Если интеграл $\int_{w=N}^{\infty}$ в (2.9) заменить на $\int_{w=N}^x$, то асимптотика $ce^{-\beta x}$ правой части в (2.9) не изменится. Действительно, при $v < N$ и $w > x$ сомножители под знаком интегралов в (2.9) допускают следующие оценки:

(а) в силу (1.4)

$$\mathbf{P}\{v + \xi(v) > w\} \leq ce^{-\lambda w},$$

где $\lambda > \beta$, c не зависит от v ;

$$(b) \mathbf{P}\{X(w, l) > x, \underline{X}(w, l) > N\} \leq \mathbf{P}\{S(l) > x - w\} \leq e^{-l\Lambda((x-w)/l)}.$$

Так как $\int_{-\infty}^N \mathbf{P}\{X(u, j) \in dv\} \leq 1$, то сумма (2.9), где $\int_{w=N}^{\infty}$ заменен на $\int_{w=x}^{\infty}$, не превосходит

$$\begin{aligned} ce^{-\lambda x} + \sum_{l=1}^{k-1} \sum_{i=[x]-1}^{\infty} ce^{-l\Lambda((x-i)/l) - \lambda i} \\ \leq c_1 x e^{-\lambda x} + \sum_{l=vx}^{k-1} \sum_{i=[x]-1}^{\infty} ce^{-l\Lambda((x-i)/l) - \lambda i}. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Здесь в силу выпуклости $\Lambda(\alpha)$ и монотонности $\Lambda(\alpha)$ и $\lambda(\alpha)$ в области $\alpha \geq 0$

$$l\Lambda\left(\frac{x-i}{l}\right) \geq l\Lambda\left(\frac{x}{l}\right) - i\lambda\left(\frac{x}{l}\right) \geq l\Lambda(0) - i\lambda\left(\frac{1}{v}\right),$$

поэтому при v таком, что $\lambda(1/v) < \lambda$, сумма в (2.14) не превосходит

$$ce^{-(\lambda - \lambda(1/v))x - vx\Lambda(0)} \leq c_1 e^{-\lambda x}$$

при $v > \lambda(1/v)/\Lambda(0)$.

Так как $\lambda > \beta$, а вся сумма в (2.9) имеет порядок малости $e^{-\beta x}$, то полученные оценки для (2.14) доказывают требуемое утверждение о том, что замена $\int_{w=N}^{\infty}$ на $\int_{w=N}^x$ в (2.9) не меняет асимптотику (2.9).

3. Сопоставляя сказанное с (2.11)–(2.13), получаем, что $\mathbf{P}\{X(u, k) > x\}$ в (2.9) можно записать при $x \rightarrow \infty$ в виде

$$\mathbf{P}\{X(u, k) > x\} \sim Q_k((x, \infty)). \quad (2.15)$$

4. Допустим теперь, что

$$\mathbf{P}\{\bar{X}(u, k) > x\} \rightarrow 0. \quad (2.16)$$

Тогда мера

$$\mathbf{P}\{\bar{X}(u, j) \leq x, X(u, j) \in dv\} \leq \mathbf{P}\{X(u, j) \in dv\}$$

в (2.8), как и $\mathbf{P}\{X(u, j) \in dv\}$ в (2.9) сходится по вариации при $j \rightarrow \infty$, $j \leq k$, к мере $\pi(dv)$. Поэтому наряду с (2.15) можно записать

$$P_k \sim \int_N^x Q_k(dz) \mathbf{P}\{m^{(\alpha_0)} > z - x\} \mathbf{P}\{\xi > x - z\} \equiv Q_k. \quad (2.17)$$

Заметим теперь, что в силу (2.15) знание экспоненциальной асимптотики

$$Q_k((x, \infty)) \sim be^{-\beta x} \quad (2.18)$$

(см. (2.15), (1.11) при $y \rightarrow \infty$, $x \rightarrow \infty$) позволяет найти асимптотику $Q_k(\Delta(z))$ при $\Delta(z) = (z, z + \Delta)$, $z \rightarrow \infty$, $z \leq x$ и любом фиксированном Δ :

$$Q_k(\Delta(z)) \sim b\beta\Delta e^{-\beta z}. \quad (2.19)$$

Это соотношение в свою очередь позволяет при малых Δ найти приближение для значения Q_k , представив его как сумму

$$\sum_{i=0}^{x/\Delta} Q_k(\Delta(z_i)) \mathbf{P}\{m^{(\alpha_0)} > z_i - x\} \mathbf{P}\{\xi > x - z_i\},$$

где $z_i = N + i\Delta$. Это дает

$$Q_k \sim \int_N^x b\beta e^{-\beta z} \mathbf{P}\{m^{(\alpha)} > z - x\} \mathbf{P}\{\xi > x - z\} dz, \quad (2.20)$$

поскольку основной вклад в этот интеграл вносит интегрирование в окрестности точки x . Последнее видно из того, что при $t = x - z$

$$Q_k \sim b\beta e^{-\beta x} \int_0^{x-N} \mathbf{P}\{m^{(\alpha_0)} > -t\} e^{\beta t} \mathbf{P}\{\xi > t\} dt, \quad (2.21)$$

где $\mathbf{P}\{m^{(\alpha)} > -t\} \rightarrow 1$ при $t \rightarrow \infty$, а интеграл $\int_0^\infty e^{\beta t} \mathbf{P}\{\xi > t\} dt$ сходится в силу условия (1.7). Таким образом, при выполнении (2.10), (2.16)

$$\mathbf{P}\{\eta(x) = k\} \sim Q_k \sim \beta bc(\alpha_0) e^{-\beta x}, \quad (2.22)$$

где

$$c(\alpha) = \int_0^\infty \mathbf{P}\{m^{(\alpha_0)} > -t\} e^{\beta t} \mathbf{P}\{\xi > t\} dt. \quad (2.23)$$

5. Чтобы выяснить, когда выполняется (2.16), нам надо оценить

$$\mathbf{P}\{\bar{X}(u, k) > x\} = \sum_{l=1}^k \mathbf{P}\{\eta(x) = l\}. \quad (2.24)$$

В силу неравенства $\mathbf{P}\{\eta(x) = l\} \leq \mathbf{P}\{X(u, l) > x\}$ и теоремы 1.1 мы получаем, что при $l > x/(\alpha_0 + \varepsilon)$ выполняется

$$\mathbf{P}\{\eta(x) = l\} < ce^{-\beta x}.$$

Если $l < x/(\alpha_0 + \varepsilon)$, то, вновь согласно теореме 1.1,

$$\mathbf{P}\{\eta(x) = l\} < \frac{c(x/l)}{\sqrt{l}} e^{-xV(x/l)},$$

где в силу свойств функции $V(t)$ (см. (1.9) и далее)

$$V\left(\frac{x}{l}\right) > \beta + \delta(\varepsilon) \quad \text{при} \quad \frac{x}{l} > \alpha_0 + \varepsilon, \quad \delta(\varepsilon) > 0.$$

Возвращаясь к (2.24), мы получим

$$\mathbf{P}\{\bar{X}(u, k) > x\} \leq c\left(k - \frac{x}{\alpha_0}\right) e^{-\beta x}. \quad (2.25)$$

Таким образом, условие (2.16) будет выполнено, если $x - \beta^{-1} \ln k \rightarrow \infty$, что всегда имеет место в силу (2.1). Первая часть теоремы 2.1 доказана.

Рассмотрим теперь случай, когда выполнены условия п. 2 теоремы 2.1, т.е. когда

$$\alpha_+ - \varepsilon > \frac{x}{k} > \alpha_0 + \varepsilon \quad (2.26)$$

при некотором $\varepsilon > 0$. Мы будем использовать опять формулу (2.8), но теперь, в отличие от предыдущего, основной вклад в сумму будут вносить первые слагаемые. При $j < \delta n$, $l = k - j - 2$, $x > z \geq x(1 - \delta)$, где δ таково, что для z/l , как и для x/k , выполняется неравенство вида (2.26), будем иметь, как и прежде (ср. с (2.13)),

$$\begin{aligned} & \mathbf{P}\{X(w, l) \in \Delta(z), \underline{X}(w, l) > N, \bar{X}(w, l) \leq x\} \\ & \sim \mathbf{P}\{S(l) \in \Delta(z) - w\} \mathbf{P}\{m^{(\gamma)} > N - w\} \mathbf{P}\{m^{(\gamma)} \geq z - x\}, \end{aligned}$$

где $\gamma \sim \alpha$ при $l \sim k$. Здесь при малых Δ , $\gamma \sim \alpha$ в силу известных теорем о больших отклонениях $S(l)$ (см., например, [9], [10])

$$\mathbf{P}\{S(l) \in \Delta(z) - w\} \sim \frac{\Delta}{\sqrt{2\pi l} \sigma^{(\alpha)}} e^{-l\Lambda((z-w)/l)},$$

где $(\sigma^{(\alpha)})^2 = (\Lambda''(\alpha))^{-1}$. Поэтому часть $\int_{x(1-\delta)}^x$ последнего интеграла в (2.8) при малых δ будет асимптотически эквивалентна

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi l} \sigma^{(\alpha)}} \int_{x(1-\delta)}^x \mathbf{P}\{m^{(\alpha)} > z - x\} e^{-l\Lambda((z-w)/l)} \mathbf{P}\{z + \xi > x\} dz.$$

Остальная часть $\int_N^{x(1-\delta)}$ будет оцениваться значением

$$\int_N^{x(1-\delta)} e^{-l\Lambda((z-w)/l)} \mathbf{P}\{z + \xi > x\} dz.$$

Здесь $l\Lambda((z-w)/l) \geq l\Lambda(x/l) + \lambda(x/l)(z-x-w)$ и при $z/x, l/k$, близких к 1,

$$l\Lambda\left(\frac{z-w}{l}\right) = l\Lambda\left(\frac{x}{l}\right) + \lambda(\alpha)(z-x-w)(1+o(1)).$$

Поэтому интегрирование по w частей этих функций, зависящих от w , в (2.8) дает (в силу того, что $\lambda > \lambda(\alpha)$ в (1.4))

$$\begin{aligned} \int_N^x e^{\lambda(\alpha)w} \mathbf{P}\{v + \xi(v) \in dw\} &\sim \int_N^\infty e^{\lambda(\alpha)w} \mathbf{P}\{v + \xi(v) \in dw\} \\ &\equiv c_1(\alpha, v) \leq c_1(\alpha), \end{aligned}$$

где $c_1(\alpha)$ от v не зависит. Стало быть, последний повторный интеграл в (2.8) асимптотически эквивалентен (мы полагаем $x - z = t$)

$$\frac{c_1(\alpha, v) e^{-l\Lambda(x/l)}}{\sqrt{2\pi l} \sigma(\alpha)} \int_0^\infty \mathbf{P}\{m^{(\alpha)} > -t\} e^{\lambda(\alpha)t} \mathbf{P}\{\xi > t\} \equiv \frac{c_2(\alpha, v) e^{-l\Lambda(x/l)}}{\sqrt{l}},$$

где $c_2(\alpha, v) < \infty$, так как $\lambda(\alpha) < \lambda_+$. В итоге получаем, что часть $P_k^{(1)}$ суммы P_k в (2.8), взятая по $j < \delta k$, будет асимптотически эквивалентной при малых δ сумме

$$\sum_{j=0}^{\delta k} \int_{v=-\infty}^N \mathbf{P}\{X(u, j) \in dv\} \frac{c_2(\alpha, v)}{\sqrt{k}} e^{-(k-j-2)\Lambda(x/(k-j-2))}. \quad (2.27)$$

Остальная часть $P_k^{(2)}$ суммы оценивается следующим образом:

$$\begin{aligned} P_k^{(2)} &\leq \sum_{j \geq k\delta}^{k-1} \int_{v=-\infty}^N \mathbf{P}\{X(u, j) \in dv\} \\ &\quad \times \int_{w=N}^x \mathbf{P}\{v + \xi(v) \in dw\} \mathbf{P}\{w + S(k-j-1) > x\}, \end{aligned} \quad (2.28)$$

где при $k - j - 1 = l$

$$\mathbf{P}\{S(l) > x - w\} < e^{-l\Lambda((x-w)/l)} < e^{-l\Lambda((x-w)/(k\delta))}. \quad (2.29)$$

Правая часть в (2.28) оценивается с помощью (2.29) совершенно аналогично предыдущему и удовлетворяет соотношению

$$P_k^{(2)} = O(e^{-k\delta\Lambda(x/(k\delta))}).$$

Чтобы закончить вычисления суммы $P_k = P_k^{(1)} + P_k^{(2)}$, остается заметить, что в (2.27)

$$\begin{aligned} (k-j-2) \Lambda\left(\frac{x}{k-j-2}\right) &= xV\left(\frac{x}{k-j-2}\right) \\ &= xV\left(\frac{x}{k}\right) + V'\left(\frac{x}{k}\right) \alpha^2(j+2)(1+o(1)), \end{aligned}$$

где $V'(\alpha) > 0$, так что

$$P_k \sim \frac{e^{-xV(x/k)}}{\sqrt{k}} \sum_{j=0}^{\infty} e^{-V'(\alpha)\alpha^2(j+2)} \int_{v=-\infty}^N c_2(\alpha, v) \pi_j(dv). \quad (2.30)$$

Соотношение (2.4) доказано при

$$b_1(\alpha) = \sum_{j=0}^{\infty} e^{-V'(\alpha)\alpha^2(j+2)} \int_{v=-\infty}^N c_2(\alpha, v) \pi_j(dv). \quad (2.31)$$

Доказательство теоремы 2.1 закончено.

Доказательство теоремы 2.2 почти очевидно. Все утверждения, за исключением (2.6), вытекают непосредственно из теоремы 2.1. Чтобы получить соотношение (2.6), надо заметить, что значение $\mathbf{P}\{\eta(x) = k, \chi(x) > t\}$ равно (2.8), где последний множитель $\mathbf{P}\{z + \xi > x\}$ надо заменить на $\mathbf{P}\{z + \xi > x + t\}$. Если повторить затем проведенные в доказательстве теоремы 2.1 рассуждения, то мы придем к соотношению

$$\mathbf{P}\{\eta(x) = k, \chi(x) > t\} \sim b_1 e^{-\beta(x+t)},$$

из которого следует (2.6). Теорема доказана.

2.2. Случай границы (1.5). Приведенные выше рассуждения без труда переносятся на случай общей границы вида (1.5) для гладких функций f . Однако такое обобщение является здесь менее содержательным, чем в [1], так как оказывается, что вероятности $\mathbf{P}\{\eta(g(\cdot)) = k\}$, где

$$\eta(g(\cdot)) = \min\{k: X(u, k) > g(k)\}, \quad g(k) = xf\left(\frac{k}{n}\right),$$

имеют при разных k , вообще говоря, разный порядок малости, так что условное распределение $\eta(g(\cdot))/n$ при условии $\eta(g(\cdot)) \leq n$, как правило, сходится к вырожденному распределению (ср. с п. 2 теоремы 2.2).

Относительно $f(\cdot)$ мы будем предполагать, что выполнено следующее условие.

(f) Функция $f(t) \geq f_0 > 0$ непрерывно дифференцируема на $[0, 1]$,

$$\frac{x}{n} f'(t) < \alpha_0 - \varepsilon \quad (2.32)$$

при некотором $\varepsilon > 0$.

Чтобы сформулировать основное утверждение этого пункта, введем в рассмотрение значение t_0 , являющееся решением уравнения

$$\frac{x}{n} f(t) = \alpha_0 t. \quad (2.33)$$

В силу (2.32) $xf(1)/n < \alpha_0$ и решение t_0 всегда существует и единственно.

Теорема 2.3. Пусть цепь $\{X(k)\}$ эргодична в смысле сходимости по вариации, $|u| < c$, распределение ξ нерешетчато и выполнено (1.7).

1. Пусть

$$k \leq n, \quad \frac{k}{n} > (t_0 + \varepsilon), \quad \varepsilon > 0, \quad x - \frac{1}{\beta f_0} \ln n \rightarrow \infty \quad (2.34)$$

и выполнено условие (1.4) при каком-нибудь $\lambda > \beta$. Тогда

$$\mathbf{P}\{\eta(g(\cdot)) = k\} \sim b_g e^{-\beta g(k)}, \quad (2.35)$$

где b_g — известная постоянная.

2. Пусть $k/n \rightarrow t < t_0$. Тогда $g(k)/k \rightarrow \alpha > \alpha_0$ и при выполнении (1.4) при некотором $\lambda > \lambda_1 > \lambda(g(k)/k)$, $g(k)/k \leq \alpha$, где α_1 — решение уравнения $\lambda(\alpha) = \lambda_1$, выполняется

$$\mathbf{P}\{\eta(x) = k\} \sim b_g(\alpha) e^{-g(k)V(g(k)/k)}, \quad (2.36)$$

где $b_g(\alpha)$ — известная непрерывная функция.

3. Если $f(t)$ имеет на $[0, 1]$ единственный абсолютный минимум в точке $t_1 > t_0$, $x - (\beta f_0)^{-1} \ln n \rightarrow \infty$, то при условии $\eta(x) \leq n$ выполняется

$$\frac{\eta(x)}{n} \xrightarrow[p]{} t_1.$$

Если дополнительно f имеет в точке t_1 положительную вторую производную, то

$$\mathbf{P}\{\eta(g(\cdot)) \leq n\} \sim c\sqrt{n} e^{-\beta x f(t_1)}. \quad (2.37)$$

Доказательство теоремы вполне аналогично доказательству теоремы 2.1. В основе опять лежит формула полной вероятности по последнему попаданию в $[-\infty, N]$ (ср. с (2.8)):

$$\begin{aligned} P_k &\equiv \mathbf{P}\{\eta(g(\cdot)) = k\} \\ &= \sum_{j=0}^{k-2} \int_{-\infty}^N \mathbf{P}\{\eta(g(\cdot)) > j, X(u, j) \in dv\} \int_{w=N}^{g(j+1)} \mathbf{P}\{v + \xi(v) \in dw\} \\ &\quad \int_{z=N}^{g(k-1)} \mathbf{P}\{X(w, n-j-2) \in dz, \eta_{(j)} > n-j-1, \\ &\quad \underline{X}(w, n-j-2) > N\} \mathbf{P}\{z + \xi > g(k)\}, \end{aligned} \quad (2.38)$$

где $\eta_{(j)}$ есть время первого пересечения траекторией $X(w, l)$, $l = 0, 1, \dots$, границы $g_{(j)}$, где

$$g_{(j)}(l) = g(j+1+l).$$

Важнейшим элементом доказательства, сводящим все вычисления к рассмотрениям в доказательстве теоремы 2.1, является замечание о том, что

для предпоследнего множителя в (2.38) в силу результатов [7], [8] выполняется соотношение, совершенно аналогичное (2.13): при $l = n - j - 2$

$$\begin{aligned} & \mathbf{P}\{X(w, l) \in \Delta(z), \eta_{(j)} > l - 1, \underline{X}(w, l) > N\} \\ & \sim \mathbf{P}\{S(l) \in \Delta(z) - w\} \mathbf{P}\{m^{(\gamma)}(l) > N - w\} \\ & \times \mathbf{P}\left\{\min_i \left(S^{(j)}(i) - \frac{xi}{n} f'\left(\frac{k}{n}\right)\right) \geq z - g(k - 1)\right\}, \quad (2.39) \end{aligned}$$

где, как и прежде, основной вклад в $\mathbf{P}\{\eta(g(\cdot)) = k\}$ будут вносить слагаемые для тех l , для которых $\gamma = (z - w)/l$ близко к α_0 . Последний множитель в (2.39) при γ , близких к α_0 , ограничен, так как $\mathbf{E}\xi^{(\gamma)} = \gamma \sim \alpha_0$ и, согласно (2.32), $xn^{-1}f'(k/n) < \alpha_0 - \varepsilon$, так что слагаемые $\xi^{(\gamma)} - xn^{-1}f'(k/n)$ имеют положительное математическое ожидание. Так как поведение остальных сомножителей в (2.39) совершенно аналогично поведению соответствующих сомножителей в (2.13), то основное изменение в проводимых рассуждениях по сравнению с предыдущим сводится к замене x на $g(k)$ и множителя $\mathbf{P}\{m^{(\alpha_0)} \geq z - x\}$ во всех следующих за (2.13) формулах на $\mathbf{P}\{\min_i (S^{(\alpha_0)}(i) - id) > z - g(k - 1)\}$, где $d = xn^{-1}f'(k/n) < \alpha_0$. Чтобы сохранить полную аналогию с доказательством теоремы 2.1, нам надо убедиться также, что

$$\mathbf{P}\{\eta(g(\cdot)) \leq n\} \rightarrow 0$$

(ср. с (2.16)). Так как

$$\mathbf{P}\{\eta(g(\cdot)) \leq n\} \leq \mathbf{P}\left\{\eta\left(\frac{xf_0}{n}\right) \leq n\right\} = \mathbf{P}\{\bar{X}(u, n) > xf_0\},$$

то в силу теоремы 2.2

$$\mathbf{P}\{\eta(g(\cdot)) \leq n\} \leq cne^{-\beta f_0 x} \rightarrow 0$$

при выполнении (2.34).

Условие $k/n > (t_0 + \varepsilon)$ является аналогом условия $n > (x/\alpha_0)(1 + \varepsilon)$, содержащегося в теореме 2.1. Действительно, при $k > t_0 n$ выполняется $x^* \equiv g(k) = xf(k/n) < \alpha_0 k$, так что $x^*/k < \alpha_0$.

Поскольку другие сколько-нибудь существенные изменения в рассуждениях и оценках доказательства теоремы 2.1 отсутствуют, то первую часть теоремы 2.3 можно считать доказанной (при очевидном изменении вида множителя b_g).

Доказательство второго утверждения происходит аналогичным образом с помощью доказательства второй части теоремы 2.1.

Третье утверждение теоремы 2.3 является следствием первых двух и стандартных приемов математического анализа.

Теорема доказана.

§ 3. Асимптотика $\mathbf{P}\{\bar{X}(u, n) > x\}$ в терминах циклов. Асимптотические свойства циклов

Эргодичность цепи $X(\cdot)$ в смысле сходимости по вариации означает, что цепь положительно возвратна по Харрису, и, следовательно, она имеет положительный атом (возможно, искусственный; см., например, теорему 2 § 2 в [11], а также [14], [15]). Мы отождествим этот атом с точкой $\{0\}$. По существу это не ограничивает общность, но упрощает рассуждения.

Обозначим

$$\tau(u) = \min \{k: X(u, k) = 0\}, \quad \tau = \tau(0),$$

$$h = \bar{X}(0, \tau), \quad W(t) = \mathbf{P}\{h > t\}.$$

Простоты ради мы ограничимся изучением $\bar{X}(0, k)$. Переход к общему случаю, т.е. к исследованию асимптотики $\mathbf{P}\{\bar{X}(u, k) > x\}$ при $|u| < c$, происходит точно так же, как в [1] — там было выяснено, что никаких существенных изменений или значимых усложнений при переходе от $\{0\}$ к произвольному начальному значению u , $|u| < c$, не происходит.

Теорема 3.1. Пусть цепь имеет положительно возвратный атом $\{0\}$ и выполнено (1.4). Тогда при любом $\varepsilon > 0$

$$\mathbf{P}\{\bar{X}(0, n) > x\} \leq 1 - (1 - W(x))e^{n(1+\varepsilon)/\mathbf{E}\tau} + O(e^{-\gamma n}), \quad (3.1)$$

$$\mathbf{P}\{\bar{X}(0, n) > x\} \geq 1 - (1 - W(x))^{n(1-\varepsilon)/\mathbf{E}\tau} + O(e^{-\gamma n}), \quad (3.2)$$

где $\gamma = \gamma(\varepsilon) > 0$.

Утверждения аналогичного вида были получены в [16] (теорема 3.1) и в [1] (теорема 3.1). Тем не менее для систематичности изложения мы приведем здесь краткое доказательство теоремы 3.1.

Доказательство. 1. *Оценка сверху.* Обозначим $A = \{\bar{X}(0, n) > x\}$, $s = n(1 + \varepsilon)/\mathbf{E}\tau$, $T_k = \sum_{i=1}^k \tau_i$, $\bar{h}_k = \max_{i \leq k} h_i$, где τ_k , h_k независимы и распределены, как τ и h соответственно, $\nu(n) = \min\{k: T_k \geq n\}$. Тогда

$$\mathbf{P}(A) = \mathbf{P}\{A, \nu(n) \leq s\} + \mathbf{P}\{A, \nu(n) > s\} \leq \mathbf{P}\{\nu(n) > s\} + \mathbf{P}\{\bar{h}_s > x\},$$

где

$$\mathbf{P}\{\nu(n) > s\} = \mathbf{P}\{T_s < n\} = \mathbf{P}\{T_s - s\mathbf{E}\tau < n - s\mathbf{E}\tau\} \leq \mathbf{P}\{T_s - s\mathbf{E}\tau < -\varepsilon n\}.$$

Так как $\tau > 0$, то $\mathbf{E}e^{\lambda\tau} < \infty$ при $\lambda \leq 0$ и последняя вероятность допускает экспоненциальную оценку $e^{-\gamma n}$, $\gamma = \gamma(\varepsilon) > 0$. Так как, кроме того, $\mathbf{P}\{\bar{h}_s \leq x\} = (1 - W(x))^s$, то неравенство (3.1) доказано.

2. *Оценка снизу.* Положим здесь $s = n(1 - \varepsilon)/\mathbf{E}\tau$. Тогда

$$\mathbf{P}(A) \geq \mathbf{P}\{A, \nu(n) > s\} \geq \mathbf{P}\{\bar{h}_s > x, \nu(n) > s\} \geq \mathbf{P}\{\bar{h}_s > x\} - \mathbf{P}\{\nu(n) \leq s\}.$$

Здесь, аналогично предыдущему,

$$\mathbf{P}\{\nu(n) \leq s\} = \mathbf{P}\{T_s \geq n\} \leq \mathbf{P}\{T_s - s\mathbf{E}\tau > \varepsilon n\}.$$

Как показано в [11] (см., например, доказательство теоремы 1 § 25), выполнение условий (1.4) влечет за собой выполнение условия Крамера для τ : $\mathbf{E}e^{\lambda\tau} < \infty$ при некотором $\lambda > 0$. Поэтому вероятность $\mathbf{P}\{T_s - s\mathbf{E}\tau > \varepsilon n\}$ также допускает экспоненциальную оценку.

Теорема доказана.

Выбирая $\varepsilon \rightarrow 0$, мы получим следующее утверждение.

Следствие 3.1.

$$\mathbf{P}\{\bar{X}(0, n) > x\} = 1 - (1 - W(x))^{n/(\mathbf{E}\tau)^{(1+o(1))}} + O(e^{-\delta n}), \quad (3.3)$$

где δ может быть выбранным сходящимся к 0 сколь угодно медленно при $n \rightarrow \infty$.

Из [11], [12] (см. теорему 2 § 42 в [11]), экспоненциального убывания $\mathbf{P}\{\tau > t\}$ и неравенства $h \leq \zeta_1 + \dots + \zeta_\tau$, где $\zeta_k \geq 0$ и имеют в силу (1.4) экспоненциально убывающие хвосты, следует, что $W(t) = \mathbf{P}\{h > t\}$ также убывает экспоненциальным образом: $W(t) < e^{-\rho t}$ при $\rho > 0$ и достаточно больших t . Стало быть, при $x - \rho^{-1} \ln n \rightarrow \infty$ выполняется

$$W(x) = o(n^{-1}), \quad nW(x) \rightarrow 0.$$

Если к тому же $x = o(n)$, то δ в (3.3) всегда можно выбрать сходящимся к 0 столь медленно, что $nW(x) \gg e^{-\delta n}$. Поэтому из (3.3) вытекает, что при

$$x - \rho^{-1} \ln n \rightarrow \infty, \quad x = o(n), \quad (3.4)$$

$$\mathbf{P}\{\bar{X}(0, n) > x\} \sim \frac{n}{\mathbf{E}\tau} W(x). \quad (3.5)$$

Если дополнительно $x - \rho^{-1} \ln n \rightarrow \infty$, то из первого утверждения теоремы 2.2 вытекает

$$\mathbf{P}\{\bar{X}(0, n) > x\} \sim nb_1 e^{-\beta x}. \quad (3.6)$$

Сравнивая (3.5) и (3.6), мы получаем, что справедлива следующая теорема.

Теорема 3.2. При выполнении условий (1.4), (1.7) и $t \rightarrow \infty$

$$W(t) \sim b_1 \mathbf{E}\tau e^{-\beta t}, \quad (3.7)$$

где b_1 определено в теореме 2.2.

Полагая в следствии 3.1 $x = \beta^{-1} \ln n + t$, мы получим следующее утверждение.

Теорема 3.3. При выполнении (1.4), (1.7) и любом фиксированном t

$$\mathbf{P}\{\bar{X}(0, n) - \beta^{-1} \ln n < t\} \rightarrow e^{-b_1 e^{-t\beta}}. \quad (3.8)$$

Это утверждение при $x = \beta^{-1} \ln n + t$ можно записать в виде соотношения

$$\mathbf{P}\{\bar{X}(0, n) > x\} \sim 1 - e^{-nb_1 e^{-\beta x}}, \quad (3.9)$$

правая часть которого асимптотически эквивалентна при $x = o(n)$, $x - \beta^{-1} \ln n \rightarrow \infty$ правой части в (2.5). Мы получим таким образом следующее утверждение.

Следствие 3.2. Соотношение (3.9) справедливо при всех $x = o(n)$.

Это утверждение включает в себя (3.8), но не включает вероятности больших отклонений в области $x > cn$. Поэтому здесь невозможны универсальные теоремы, действующие равномерно на всей оси, которые удалось получить в [1] для регулярных хвостов $\mathbf{P}\{\xi(u) > t\}$. Для $x^{-1} \ln \mathbf{P}\{\bar{X}(0, n) > x\}$ такие равномерные теоремы получить можно в терминах функции

$$\tilde{V}(\alpha) = \min_{z \geq \alpha} V(z) = \begin{cases} \beta & \text{при } \alpha \leq \alpha_0, \\ V(\alpha) & \text{при } \alpha > \alpha_0, \end{cases}$$

где $\alpha = x/n$.

Отметим еще раз, что утверждения теорем 3.1 и 3.3, а также следствий 3.1, 3.2 без труда можно перенести на случай произвольного начального значения u , $|u| < c$.

§ 4. Закон повторного логарифма

Теорема 4.1. При выполнении (1.4), (1.7), $|u| < c$ справедливо соотношение

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{X(u, n) - \frac{1}{\beta} \ln n}{\ln \ln n} = \frac{1}{\beta} \quad \text{н.н.} \quad (4.1)$$

Доказательство теоремы использует циклы, как и в [1] при доказательстве аналогичного утверждения для регулярных хвостов $\mathbf{P}\{\xi(u) > t\}$.

Пусть $n_k = [d^k]$, $d > 1$, и, как прежде, $T_k = \sum_{i=1}^k \tau_i$. Обозначим через C событие, состоящее в том, что для всех k , начиная с некоторого,

$$T_{n_k} < n_k(1 + \delta) \mathbf{E}\tau \equiv N_k^{(+)}, \quad T_{n_k} > n_k(1 - \delta) \mathbf{E}\tau \equiv N_k^{(-)}. \quad (4.2)$$

В силу усиленного закона больших чисел $\mathbf{P}(C) = 1$ для любого $\delta > 0$.

1. *Оценка сверху.* Пусть сначала $u = 0$ и событие A означает, что траектория $X(0, k)$ пересекает границу $g_k = \beta^{-1} \ln k + \beta^{-1}(1 + \varepsilon) \ln \ln k$ лишь конечное число раз. Нам надо доказать, что $\mathbf{P}(A) = 1$.

Обозначим через B событие, состоящее в том, что траектория $\{X(0, k)\}$ пересекает ступенчатую границу с уровнями

$$\begin{aligned} G_k &= \min_{N_{k-1}^{(-)} \leq j \leq N_k^{(+)}} g_j = \frac{1}{\beta} \ln [n_{k-1}(1-\delta)\mathbf{E}\tau] + \frac{(1+\varepsilon)}{\beta} \ln \ln [n_{k-1}(1-\delta)\mathbf{E}\tau] \\ &= \frac{\ln n_k}{\beta} + \frac{(1+\varepsilon)}{\beta} \ln k + O(1) \end{aligned}$$

на интервале времени $[T_{n_{k-1}}, T_{n_k}]$ лишь конечное число раз. Тогда очевидно, что $BC \subset AC$, $\mathbf{P}(AC) \geq \mathbf{P}(BC)$, и нам достаточно доказать, что $\mathbf{P}(B) = 1$.

Обозначим через B_k событие, состоящее в том, что произойдет хотя бы одно пересечение уровня G_k на интервале $[T_{n_{k-1}}, T_{n_k}]$. Тогда, согласно критерию Бореля–Кантелли, нам достаточно убедиться, что

$$\sum \mathbf{P}(B_k) < \infty. \quad (4.3)$$

Но в силу теоремы 3.2

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(B_k) &= 1 - [1 - W(G_k)]^{n_k - n_{k-1}} \leq 1 - \left[1 - ce^{-\ln n_k - (1+\varepsilon)\ln k}\right]^{n_k(d-1)/d} \\ &\leq 1 - \left[1 - \frac{ck^{-(1+\varepsilon)}}{n_k}\right]^{n_k(d-1)/d} \leq 1 - e^{-c_1 k^{-(1+\varepsilon)}} \leq c_1 k^{-(1+\varepsilon)}. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Отсюда следует выполнение (4.3).

Если $u \neq 0$, то все рассмотрения сохраняются. Надо лишь везде T_k заменить на $\tau(u) + T_k$, $\mathbf{E}\tau(u) < \infty$.

2. *Оценка снизу.* Здесь все аналогично. Пусть D означает событие, состоящее в том, что траектория $\{X(0, k)\}$ пересечет границу $g_k = \beta^{-1} \ln k + \beta^{-1}(1-\varepsilon) \ln \ln k$ бесконечное число раз. Нам надо доказать, что $\mathbf{P}(D) = 1$. Пусть событие E состоит в том, что траектория $\{X(0, k)\}$ пересечет ступенчатую границу с уровнями

$$G_k^* = \max_{N_k^{(-)} \leq j \leq N_k^{(+)}} g_j = \frac{\ln n_k}{\beta} + \frac{(1-\varepsilon)}{\beta} \ln k + O(1)$$

бесконечное число раз. Тогда, очевидно, $EC \subset DC$, $\mathbf{P}(DC) \geq \mathbf{P}(EC)$, и нам достаточно убедиться, что $\mathbf{P}(E) = 1$.

Пусть событие E_k состоит в том, что траектория $X(0, k)$ хоть раз пересечет уровень G_k^* на интервале $[T_{n_{k-1}}, T_{n_k}]$. В силу критерия Бореля–Кантелли и независимости групп циклов на интервалах $[T_{n_{k-1}}, T_{n_k}]$ нам достаточно убедиться, что $\sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{P}(E_k) = \infty$. Доказательство того, что $\mathbf{P}(E_k) \geq ck^{-(1-\varepsilon)}$, происходит совершенно аналогично (4.4). По поводу перехода к случаю $u \neq 0$, $|u| < c$ сохраняется замечание в конце первой части доказательства.

Так как ε произвольно, то (4.1) доказано. Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Боровков А. А. Асимптотика вероятности пересечения границы траекторией цепи Маркова. Регулярные хвосты скачков. — Теория вероятн. и ее примен., 2002, т. 47, в. 4, с. 625–653.
2. Боровков А. А., Коршунов Д. А. Вероятности больших уклонений одномерных цепей Маркова. Ч. 1: Стационарные распределения. — Теория вероятн. и ее примен., 1996, т. 41, в. 1, с. 3–30.
3. Боровков А. А., Коршунов Д. А. Вероятности больших уклонений одномерных цепей Маркова. Ч. 2: Дастационарные распределения в экспоненциальном случае. — Теория вероятн. и ее примен., 2000, т. 45, в. 3, с. 437–468.
4. Боровков А. А., Коршунов Д. А. Вероятности больших уклонений одномерных цепей Маркова. Ч. 3: Дастационарные распределения в субэкспоненциальном случае. — Теория вероятн. и ее примен., 2001, т. 46, в. 4, с. 640–657.
5. Iglehart D. L. Extreme values in the GI/G/1 queue. — Ann. Math. Statist., 1972, v. 43, p. 627–635.
6. Asmussen S. Subexponential asymptotics for stochastic processes: extremal behavior, stationary distributions and first passage probabilities. — Ann. Appl. Probab., 1998, v. 8, № 2, p. 354–374.
7. Боровков А. А. О преобразовании Крамера, больших уклонениях в граничных задачах и условном принципе инвариантности. — Сиб. матем. журн., 1995, т. 36, № 3, с. 493–509.
8. Боровков А. А. Об условных распределениях, связанных с большими уклонениями. — Сиб. матем. журн., 1996, т. 37, № 4, с. 732–744.
9. Боровков А. А., Могульский А. А. Интегро-локальные предельные теоремы для сумм случайных векторов, включающие большие уклонения. I. — Теория вероятн. и ее примен., 1998, т. 43, в. 1, с. 3–17.
10. Боровков А. А., Могульский А. А. Интегро-локальные предельные теоремы для сумм случайных векторов, включающие большие уклонения. II. — Теория вероятн. и ее примен., 2000, т. 45, в. 1, с. 5–29.
11. Боровков А. А. Эргодичность и устойчивость случайных процессов. М./Новосибирск: Эдиториал УРСС/Изд-во ИМ СО РАН, 1999, 450 с.
12. Боровков А. А., Утев С. А. Оценки для распределений сумм, остановленных в марковский момент времени. — Теория вероятн. и ее примен., 1993, т. 38, в. 2, с. 259–272.
13. Боровков А. А., Могульский А. А. Большие уклонения для цепей Маркова в положительном квадранте. — Успехи матем. наук, 2001, т. 56, в. 5, с. 3–116.
14. Нуммелин Э. Общие неприводимые цепи Маркова и неотрицательные операторы. М.: Мир, 1989, 207 с.
15. Meyn S. P., Tweedie R. L. Markov Chains and Stochastic Stability. London: Springer-Verlag, 1993, 548 p.
16. Rootzén H. Maxima and exceedances of stationary Markov chains. — Adv. Appl. Probab., 1988, v. 20, № 2, p. 371–390.

Поступила в редакцию
17.XII.2001