Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. А. Ватутин, Е. Е. Дьяконова, Ветвящиеся процессы Гальтона–Ватсона в случайной среде. I: Предельные теоремы, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2003, том 48, выпуск 2, 274–300

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp285>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.55.26

26 апреля 2023 г., 10:49:57

© 2003 г.

ВАТУТИН В. А.*, ДЬЯКОНОВА Е. Е.*

ВЕТВЯЩИЕСЯ ПРОЦЕССЫ ГАЛЬТОНА–ВАТСОНА В СЛУЧАЙНОЙ СРЕДЕ. I: ПРЕДЕЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ¹⁾

Пусть Z_n — число частиц в момент времени n в ветвящемся процессе в случайной среде, порожденной независимыми и одинаково распределенными случайными вероятностными производящими функциями $f_0(s), f_1(s), \dots, f_n(s), \dots$. Пусть

$$X_i = \ln f'_{i-1}(1), \quad i = 0, 1, 2, \dots; \\ S_0 = 0, \quad S_n = X_1 + \dots + X_n, \quad n \geq 1.$$

Показано, что если процесс Z_n является в некотором смысле «критическим», то существует предел по распределению

$$\lim_{n \rightarrow \infty} e^{-\min_{0 \leq j \leq n} S_j} \mathbf{P}\{Z_n > 0 \mid f_0, \dots, f_{n-1}\} = \zeta,$$

где ζ — собственная случайная величина, принимающая с вероятностью 1 лишь положительные значения. Доказано также, что для «типичной» реализации среды число частиц Z_n при условии $\{Z_n > 0\}$ растет (с точностью до конечного положительного случайного множителя), как $e^{S_n - \min_{0 \leq j \leq n} S_j}$.

Ключевые слова и фразы: ветвящиеся процессы в случайной среде, вероятность невырождения, предельные теоремы, критический ветвящийся процесс, случайные блуждания, устойчивые распределения, гармонические функции.

1. Введение и основные результаты

Ветвящиеся процессы в случайной среде (ВПСС) являются одним из важных обобщений ветвящихся процессов Гальтона–Ватсона. Нам будет удобно использовать следующее описание этих процессов. Пусть последовательные состояния сред задаются бесконечномерными векторами $\{\pi_n, n \in \mathbf{N}_0\}$, где

$$\pi_n = \{\pi_n^{(0)}, \pi_n^{(1)}, \pi_n^{(2)}, \dots\}, \quad \pi_n^{(i)} \geq 0, \\ \sum_{i=0}^{\infty} \pi_n^{(i)} = 1, \quad n \in \mathbf{N}_0 = \{0, 1, 2, \dots\}, \quad (1)$$

* Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, ул. Губкина, 8, 119991 Москва, ГСП-1, Россия; e-mail: vatutin@mi.ras.ru, elena@mi.ras.ru

¹⁾ Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (гранты 02-01-00266, 00-15-96136) и РФФИ-ННИО (грант 02-01-04002).

причем наборы π_n независимы и одинаково распределены. С вектором π_n мы свяжем производящую функцию

$$f_n(s) = \sum_{i=0}^{\infty} \pi_n^{(i)} s^i.$$

В этих терминах эволюция интересующего нас ветвящегося процесса в случайной среде $\{Z_n, n \in \mathbf{N}_0\}$ описывается соотношениями

$$Z_0 = 1, \quad \mathbf{E} [s^{Z_{n+1}} \mid f_0, f_1, \dots, f_n; Z_0, Z_1, \dots, Z_n] = (f_n(s))^{Z_n}.$$

Существует два подхода к исследованию ветвящихся процессов в случайной среде. При одном из них (английский термин — quenched approach) характеристики, связанные со свойствами ВПСС (например, такие, как вероятность вырождения процесса или закон распределения числа частиц в момент n), трактуются как случайные величины, определенные на множестве всех возможных реализаций среды (см., например, [1]–[3], [24], [27] и соответствующую библиографию в [28]). При другом (annealed approach) производится усреднение упомянутых характеристик относительно распределения, заданного на множестве возможных реализаций среды (см. [4]–[6], [10], [17]–[19], [25], [26] и библиографию в [28]).

В настоящей работе мы изучаем асимптотику вероятности невырождения ВПСС и доказываем условную предельную теорему для числа частиц в ВПСС в момент n при условии $\{Z_n > 0\}$ в рамках первого из описанных выше подходов и, в частности, обобщаем ряд утверждений из [27]. Авторам известно несколько работ, в которых рассматриваются сходные задачи (см., например, [1]–[3], [24]). В частности, в основополагающей работе [3] для критического ВПСС найдена асимптотика вероятности невырождения и доказаны предельные теоремы для числа частиц в момент n при условии невырождения процесса к этому моменту, а в статье [24] указаны условия, при которых логарифм вероятности невырождения к моменту n растет линейно с ростом n (с точностью до положительного конечного случайного множителя). Подход к изучению ВПСС, предлагаемый в данной работе, существенно отличается от аргументов, использовавшихся ранее, и будет, как нам кажется, полезен при решении других задач теории ветвящихся процессов в случайной среде.

Для формулировки основных результатов статьи нам понадобятся дополнительные обозначения.

Зададим множество $A = \{\alpha, \beta\} \subseteq \mathbf{R}^2$ в виде

$$A = \{0 < \alpha < 1; |\beta| < 1\} \cup \{1 < \alpha < 2; |\beta| \leq 1\} \cup \{(1, 0); (2, 0)\}.$$

Обозначим через $C(\alpha, \beta)$ класс функций распределения, принадлежащих области притяжения устойчивого закона с характеристической функцией

$$\chi(t) = \exp \left\{ -c|t|^\alpha \left(1 + i\beta \frac{t}{|t|} \operatorname{tg} \frac{\pi\alpha}{2} \right) \right\}, \quad (2)$$

где $c > 0$, $(\alpha, \beta) \in A$.

Для $(\alpha, \beta) \in A$ будем говорить, что функция распределения $G(x)$ принадлежит классу $B(\alpha, \beta)$, если $G(x) \in C(\alpha, \beta)$, $G(x)$ является абсолютно непрерывной и, кроме того, $\int x dG(x) = 0$, если $1 < \alpha \leq 2$, и $\sigma^2 := \int x^2 dG(x) > 0$, если $\alpha = 2$.

Пусть $X_k := \ln f'_{k-1}(1)$, $\eta_k := f''_{k-1}(1)(f'_{k-1}(1))^{-2}$, $k = 1, 2, \dots$, и $G(x) := \mathbf{P}\{X_1 \leq x\}$. Оказывается, что свойства ВПСС существенным образом зависят от сопровождающего случайного блуждания $S_0 = 0$, $S_n = X_1 + \dots + X_n$ (см., например, [4]–[6], [18], [19], [25]).

Известно [7], [8], [11], что если $G(x) \in B(\alpha, \beta)$, то существует предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}\{S_n < 0\} = \rho, \quad 0 < \rho < 1, \quad (3)$$

причем

$$\rho = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi\alpha} \operatorname{arctg} \left(-\beta \operatorname{tg} \frac{\pi\alpha}{2} \right).$$

В этой работе мы предполагаем, что случайный процесс $\{Z_n\}_{n \geq 0}$ удовлетворяет следующим **основным условиям**:

(i)

$$G(x) \in B(\alpha, \beta); \quad (4)$$

(ii) при $\alpha < 2$ существуют $\varepsilon_0 \in (0, 1]$ и $\delta_0 \in (0, 1)$ такие, что

$$\begin{aligned} & \mathbf{E} \left[\eta_1^{\varepsilon_0} ((1 + X_1)^{\alpha \max(\rho, 1-\rho) + \delta_0} I\{X_1 \geq 0\} \right. \\ & \left. + (1 - X_1)^{\alpha(1-\rho) + \delta_0} e^{\varepsilon_0 X_1} I\{X_1 < 0\}) \right] < \infty, \end{aligned} \quad (5)$$

где $I\{A\}$ — индикатор события A ;

(iii) при $\alpha = 2$ существует $\varepsilon_0 \in (0, 1]$ такое, что соотношение (5) выполняется с $\delta_0 = 0$.

З а м е ч а н и е 1. Напомним, что ветвящийся процесс в случайной среде называется критическим, если $\mathbf{E}[X_1] = 0$. Критические ВПСС с $\mathbf{E}[X_1^2] \in (0, \infty)$ достаточно хорошо изучены (см., например, [4]–[6], [18], [19], [25]). Мы же рассматриваем более широкий класс процессов. Он включает в себя не только процессы с $\mathbf{E}[X_1^2] = \infty$, но даже такие процессы (при $0 < \alpha < 1$), в которых математическое ожидание случайной величины X_1 не существует. Необходимо, однако, отметить, что при выполнении наших основных условий величина $|\beta|$ меньше 1 при $\alpha \in (0, 1]$, и, следовательно, при таких значениях α мы рассматриваем

лишь те процессы, для которых левый и правый хвосты распределения случайной величины X_1 являются «сбалансированными»:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\mathbf{P}\{X_1 > x\}}{\mathbf{P}\{X_1 < -x\}} = \text{const} \in (0, \infty).$$

Пусть

$$\tau(n) = \max \left\{ k \in [0, n]: S_j \geq S_k, j = 0, 1, \dots, n \right\}$$

— самая правая точка интервала $[0, n]$, в которой достигается минимальное значение S_j , $j = 0, 1, \dots, n$. Согласно [22, гл. IV, § 20], при выполнении условия (3)

$$n^{-1}\tau(n) \xrightarrow{d} \tau, \quad n \rightarrow \infty, \quad (6)$$

где τ — случайная величина, распределенная по обобщенному закону арксинуса на отрезке $[0, 1]$:

$$\mathbf{P}\{\tau \leq x\} = \frac{\sin \pi \rho}{\pi} \int_0^x t^{\rho-1}(1-t)^{-\rho} dt.$$

Далее мы будем использовать символы $\mathbf{E}$ и $\mathbf{P}$ для обозначения математического ожидания и вероятности относительно меры на множестве сред, в то время как символы $\mathbf{E}_\pi$ и $\mathbf{P}_\pi$ будут использоваться для обозначения условного математического ожидания и условной вероятности при фиксированной среде $\pi = (\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_n, \dots)$.

Наш первый результат связан с асимптотическим поведением вероятности невырождения ВПСС Z_n . Пусть

$$\begin{aligned} f_{k,n}(s) &= f_k(f_{k+1}(\dots(f_{n-1}(s))\dots)), & 0 \leq k \leq n-1, & \quad f_{n,n}(s) = s, \\ f_{n,0}(s) &= f_{n-1}(f_{n-2}(\dots(f_0(s))\dots)), & n \geq 1. & \end{aligned}$$

Теорема 1. Если выполнены основные условия, то распределения случайных величин

$$\zeta_n := e^{-S_{\tau(n)}} \mathbf{P}_\pi\{Z_n > 0\} = e^{-S_{\tau(n)}} (1 - f_{0,n}(0)), \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

сходятся при $n \rightarrow \infty$ к распределению случайной величины $\zeta \in [0, 1]$, которая положительна с вероятностью 1.

Следующее утверждение является условной предельной теоремой для ВПСС.

Теорема 2. Пусть выполнены основные условия. Тогда для любого $\lambda > 0$

$$\mathbf{E}_\pi \left[\exp \left\{ -\lambda Z_n e^{\min_{0 \leq j \leq n} S_j - S_n} \right\} \mid Z_n > 0 \right] \xrightarrow{d} \phi_\pi(\lambda), \quad n \rightarrow \infty,$$

где $\phi_\pi(\lambda)$, $\lambda \in [0, \infty)$, — преобразование Лапласа распределения неотрицательной собственной случайной величины, не сосредоточенной в нуле.

Здесь и далее символ $\xrightarrow{d}$ обозначает сходимость по распределению относительно меры на множестве всех последовательностей состояний среды.

З а м е ч а н и е 2. Если в формулировках теорем 1, 2 заменить **основные условия** на условия: $G(x) \in B(\alpha, \beta)$ и $\eta_1 \leq \text{const}$ с вероятностью 1, то утверждения этих теорем останутся в силе.

З а м е ч а н и е 3. Схема доказательства теорем 1, 2 для случая $E[X_1] = 0$, $E[X_1^2] \in (0, \infty)$ была опубликована в [27]. Общий случай, который мы рассматриваем в данной работе, требует более деликатных рассуждений.

2. Вспомогательные результаты

В этом разделе приведены некоторые предварительные результаты, связанные с тауберовыми теоремами и условными случайными блужданиями.

В дальнейшем через $L(x)$, $L_i(x)$, $i = 0, 1, 2, \dots$, мы будем обозначать функции, медленно меняющиеся при $x \rightarrow \infty$, а через c , c_i , $i = 1, 2, \dots$, — положительные константы. В разных формулах эти функции и константы могут быть различны.

Первые две из приведенных ниже лемм являются аналогами соответствующих результатов в [18]. Доказательства этих лемм практически повторяют доказательства упомянутых утверждений в [18], и мы их опускаем.

Лемма 1. Пусть $A(x)$ — неубывающая функция, $A(0) = 0$, и пусть для всех $\lambda > 0$ существует преобразование Лапласа

$$\tilde{A}(\lambda) = \int_0^\infty \exp\{-\lambda x\} dA(x).$$

Если для некоторых положительных фиксированных γ и δ

$$\tilde{A}(\lambda) \leq L\left(\frac{1}{\lambda}\right) \lambda^{-\gamma}, \quad 0 < \lambda \leq \delta,$$

то для всех $x \geq \delta^{-1}$

$$A(x) \leq ex^\gamma L(x).$$

Если, к тому же, $A(x)$ абсолютно непрерывна и ее производная $A'(x)$ монотонна, то при всех $x \geq 2\delta^{-1}$

$$A'(x) \leq x^{\gamma-1} L_1(x),$$

где $L_1(x) = 2^{1+\gamma} e \max(L(x), L(2x))$.

Лемма 2. Если $a_n \geq 0$, $n = 0, 1, 2, \dots$, — монотонная последовательность и при всех $0 \leq s < 1$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n s^n \leq (1-s)^{-\gamma} L\left(\frac{1}{1-s}\right), \quad \gamma > 0,$$

то при всех $n \geq 2$

$$a_n \leq cn^{\gamma-1} L(n).$$

Лемма 3. Если $G(x) \in B(\alpha, \beta)$, то для любого $a > 0$ существует медленно меняющаяся функция $L(n)$ такая, что

$$\mathbf{E}[e^{aS_n}; S_n \leq 0] = O(n^{-1/\alpha} L(n)), \quad n \rightarrow \infty.$$

Доказательство. Так как $G(x) \in B(\alpha, \beta)$, то существует медленно меняющаяся функция $L(n)$ такая, что при $d_n = n^{1/\alpha} L^{-1}(n)$ последовательность $d_n^{-1} S_n$, $n = 1, 2, \dots$, сходится по распределению при $n \rightarrow \infty$ к устойчивому закону с показателем α . Очевидно, что

$$\begin{aligned} \mathbf{E}[e^{aS_n}; S_n \leq 0] &= \int_0^{\infty} e^{-ax} d\mathbf{P}\{0 \leq -S_n < x\} \\ &\leq \sum_{k=0}^{\infty} e^{-ak} \mathbf{P}\left\{\frac{k}{d_n} \leq -\frac{S_n}{d_n} \leq \frac{k}{d_n} + \frac{1}{d_n}\right\}. \end{aligned} \quad (7)$$

Согласно локальной предельной теореме Стоуна [23],

$$\mathbf{P}\left\{\frac{k}{d_n} \leq -\frac{S_n}{d_n} \leq \frac{k}{d_n} + \frac{1}{d_n}\right\} = d_n^{-1} p\left(-\frac{k}{d_n}\right) + \varepsilon_{k,n}, \quad (8)$$

где $p(x)$ — плотность распределения с характеристической функцией, задаваемой выражением (2), а произведение $d_n \varepsilon_{k,n}$ стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$ равномерно по $k \in \{0, 1, 2, \dots\}$. Известно также (см. [14, гл. 2, § 2.2]), что $p(x)$ непрерывна и стремится к нулю на бесконечности. Отсюда, подставляя (8) в (7), получаем

$$\mathbf{E}[e^{aS_n}; S_n \leq 0] \leq \frac{1}{d_n} \sum_{k=0}^{\infty} e^{-ak} \left(p\left(-\frac{k}{d_n}\right) + d_n \varepsilon_{k,n}\right) = O(d_n^{-1}).$$

Лемма доказана.

Применяя аргументы, аналогичные приведенным в [16], несложно убедиться в справедливости следующего утверждения.

Лемма 4. Пусть $\{b_n\}_{n \geq 0}$ и $\{d_n\}_{n \geq 0}$ — две последовательности положительных чисел, связанные соотношением

$$\sum_{n=0}^{\infty} d_n s^n = \exp \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} b_n s^n \right\}.$$

Если $b_n \leq n^{-\beta} L(n)$ при некотором $\beta > 1$, то $d_n = O(n^{-\beta} L(n))$, $n \rightarrow \infty$.

Пусть $\mu_n := \max(S_0, S_1, \dots, S_n)$.

Лемма 5. Если $G(x) \in B(\alpha, \beta)$, то для любого $a > 0$

$$\mathbf{E}[e^{aS_n}; \mu_n \leq 0] = O(n^{-(1/\alpha+1)}L(n)),$$

где функция $L(n)$ та же, что и в лемме 3.

Доказательство. Пусть $d_n = \mathbf{E}[e^{aS_n}; \mu_n \leq 0]$. Согласно тождеству Спичера (см. [22, § 17, предложение 5(в)]),

$$\sum_{n=0}^{\infty} d_n s^n = \exp \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{s^n}{n} \mathbf{E}[e^{aS_n}; S_n \leq 0] \right\}. \quad (9)$$

Пусть $b_n := n^{-1} \mathbf{E}[e^{aS_n}; S_n \leq 0]$. Ввиду леммы 3 имеем $b_n = O(n^{-(1+1/\alpha)}L(n))$. Применяя лемму 4 к (9), получаем, что величина $d_n = O(n^{-(1+1/\alpha)}L(n))$.

Доказательство закончено.

Пусть $0 = \gamma_0 < \gamma_1 < \gamma_2 < \dots$ и $0 = \Gamma_0 < \Gamma_1 < \Gamma_2 < \dots$ — убывающие и, соответственно, возрастающие строгие лестничные моменты случайного блуждания $\{S_n\}_{n \geq 0}$:

$$\gamma_{j+1} := \min(n > \gamma_j: S_n < S_{\gamma_j}), \quad j \geq 0,$$

$$\Gamma_{j+1} := \min(n > \Gamma_j: S_n > S_{\Gamma_j}), \quad j \geq 0.$$

Положим

$$\mathcal{H}_1 := S_{\Gamma_1}, \quad H(x) := \mathbf{P}\{\mathcal{H}_1 \leq x\},$$

$$\nu_n := \min(S_0, S_1, \dots, S_n) = S_{\tau(n)}, \quad \nu_n^{(1)} := \min(S_1, \dots, S_n), \quad (10)$$

$$m_n(x) = \mathbf{P}\{\nu_n \geq -x\}, \quad \tilde{m}_n(x) = \mathbf{P}\{\mu_n \leq x\}, \quad x \geq 0.$$

Отметим, что если распределение X_1 абсолютно непрерывно, то

$$m_n(x) = \mathbf{P}\{\nu_n^{(1)} > -x\} = \mathbf{P}\{\nu_n^{(1)} \geq -x\}, \quad x > 0.$$

Введем функции

$$V(x) := \sum_{j=0}^{\infty} \mathbf{P}\{S_{\gamma_j} \geq -x\}, \quad x > 0, \quad V(0) = 1, \quad V(x) = 0, \quad x < 0,$$

$$U(x) := \sum_{j=0}^{\infty} \mathbf{P}\{S_{\Gamma_j} \leq x\}, \quad x > 0, \quad U(0) = 1, \quad U(x) = 0, \quad x < 0.$$

В дальнейшем нам понадобятся следующие легко проверяемые соотношения:

$$V(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{P}\{S_k \geq -x; \mu_k \leq 0\}, \quad x \geq 0, \quad (11)$$

$$U(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{P}\{S_k \leq x; \nu_k^{(1)} > 0\}, \quad x \geq 0. \quad (12)$$

Поскольку при выполнении наших основных условий случайное блуждание S_n является осциллирующим, то из леммы 1 в [15] вытекает, что $U(x)$ и $V(x)$ являются гармоническими функциями, т.е. для любого $x \geq 0$

$$\mathbf{E}U(x - X_1) = U(x), \quad \mathbf{E}V(x + X_1) = V(x). \quad (13)$$

Напомним, что устойчивое распределение называется спектрально положительным, если его характеристическая функция имеет вид (2) с $\beta = -1$.

Кроме того, случайная величина ζ называется относительно устойчивой, если существует последовательность чисел $\{a_n\}_{n \geq 1}$ такая, что $(\zeta_1 + \dots + \zeta_n)a_n^{-1}$ сходится по вероятности к 1 при $n \rightarrow \infty$, где $\zeta, \zeta_1, \dots, \zeta_n, \dots$ — последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин.

Лемма 6 (см. теорему 9 в [20]). Если $G(x) = \mathbf{P}\{X_1 \leq x\} \in B(\alpha, \beta)$, то при $\alpha(1 - \rho) < 1$ случайная величина $\mathcal{H}_1$ принадлежит к области притяжения спектрально положительного устойчивого закона с показателем $\alpha(1 - \rho)$, а при $\alpha(1 - \rho) = 1$ она относительно устойчива. Здесь ρ определяется выражением (3).

Лемма 7. Если $G(x) \in B(\alpha, \beta)$, то существуют медленно меняющиеся функции $L_1(x)$ и $L_2(x)$ такие, что

$$U(x) \sim x^{\alpha(1-\rho)} L_1(x), \quad x \rightarrow \infty, \quad (14)$$

$$V(x) \sim x^{\alpha\rho} L_2(x), \quad x \rightarrow \infty. \quad (15)$$

Доказательство. Согласно лемме 6, при $\alpha(1 - \rho) < 1$ справедливо асимптотическое соотношение (см. формулу (6.4) в [12, гл. XIII, § 6])

$$\mathbf{P}\{\mathcal{H}_1 > x\} \sim \frac{\sin(\pi\alpha(1 - \rho))}{\pi\alpha(1 - \rho)} \frac{x^{-\alpha(1-\rho)}}{L_1(x)}$$

для некоторой медленно меняющейся функции $L_1(x)$. Следовательно (ср. с формулой (3.4) в [12, гл. XIV, § 3]),

$$U(x) \sim x^{\alpha(1-\rho)} L_1(x), \quad x \rightarrow \infty.$$

Если $\alpha(1 - \rho) = 1$, то по лемме 6 случайная величина $\mathcal{H}_1$ является относительно устойчивой. Поэтому $U(x) \sim xL_1(x)$ при $x \rightarrow \infty$ (см. [20]). Отсюда следует соотношение (14). Для доказательства (15) заметим, что $V(x)$ фактически является функцией $U(x)$ для случайного блуждания $\{-S_n\}$. Поскольку $\mathbf{P}\{-X_1 \leq x\} \in B(\alpha, -\beta)$, то, применяя (14) с $1 - \rho$ вместо ρ , мы приходим к (15). Лемма доказана.

Лемма 8 (см. [8] или [9, раздел 8.9]). Если выполнено условие (3), то при $n \rightarrow \infty$

$$\mathbf{P}\{\mu_n \leq 0\} \sim \frac{1}{n^{1-\rho}L(n)} \quad \text{и} \quad \mathbf{P}\{\mu_n \leq x\} \sim \frac{U(x)}{n^{1-\rho}L(n)}$$

во всех точках непрерывности x функции $U(x)$, где $L(n)$ — медленно меняющаяся функция.

Отметим, что если $G(x)$ — абсолютно непрерывная функция, то распределение случайной величины $\mathcal{H}_1$ также абсолютно непрерывно, что влечет абсолютную непрерывность $U(x)$ при $x > 0$. Аналогичное замечание верно и для $V(x)$.

Основываясь на леммах 1, 2, 8 и используя аргументы, аналогичные рассуждениям, приведенным при доказательстве теоремы А в [18], можно проверить справедливость следующего утверждения.

Лемма 9. Предположим, что $G(x) \in B(\alpha, \beta)$. Существуют медленно меняющиеся функции $L(n), L_0(n)$, связанные соотношением $L(n)L_0(n) \sim \pi/\sin \pi\rho$, $n \rightarrow \infty$, и абсолютные константы $c_1 > 0$, $c_2 > 0$ такие, что при $n \rightarrow \infty$ и всех $x \in [0, \infty)$

$$\begin{aligned} \tilde{m}_n(x) &\sim \frac{U(x)}{n^{1-\rho}L(n)}, & \tilde{m}_n(x) &\leq c_1 \frac{U(x)}{n^{1-\rho}L(n)}, \\ m_n(x) &\sim \frac{V(x)}{n^\rho L_0(n)}, & m_n(x) &\leq c_2 \frac{V(x)}{n^\rho L_0(n)}. \end{aligned} \tag{16}$$

Обозначим через Π множество всех бесконечномерных векторов (1), а через Σ — естественную σ -алгебру, порожденную подмножествами Π . Согласно нашему определению, производящую функцию $f_n(s)$ числа непосредственных потомков частиц n -го поколения можно рассматривать как случайный вектор π_n на измеримом пространстве (Π, Σ) , в то время как совместное распределение набора $f_0(s), f_1(s), \dots, f_{n-1}(s)$ задается произведением мер $\mathbf{P}^n = \mathbf{P} \times \mathbf{P} \times \dots \times \mathbf{P}$ на измеримом пространстве

$$(\Pi^n, \Sigma^n) = (\Pi, \Sigma) \times (\Pi, \Sigma) \times \dots \times (\Pi, \Sigma),$$

а вся последовательность $f_0(s), f_1(s), \dots, f_{n-1}(s), \dots$ определена на измеримом пространстве $(\Pi^\infty, \Sigma^\infty)$ и распределена в соответствии с мерой $\mathbf{P}^\infty$. По теореме Ионеску Тулчи о продолжении меры и существовании случайной последовательности (см., например, [21, гл. II, § 9]) такая вероятностная мера существует и единственна. Ясно, что в этом случае величины

$$X_{n+1} := \ln \left(\sum_{i=0}^{\infty} i \pi_n^{(i)} \right) = \ln f'_n(1), \quad n \in \mathbf{N}_0,$$

и $S_0 = 0, S_n = X_1 + \dots + X_n$ будут корректно определенными случайными величинами на $(\Pi^\infty, \Sigma^\infty)$ относительно меры $\mathbf{P}^\infty$, если мы предположим (а далее мы будем рассматривать только такой случай), что $\mathbf{P}\{\pi_n^{(0)} = 1\} = 0$.

Модифицируя подход работы [13], для любой положительной измеримой функции ψ_k , зависящей лишь от k первых производящих функций процесса $\{Z_n\}_{n \geq 0}$, положим

$$\mathbf{E}^+ \psi_k(f_0, \dots, f_{k-1}) := \mathbf{E}[\psi_k(f_0, \dots, f_{k-1}) V(S_k) I\{\nu_k^{(1)} > 0\}], \quad (17)$$

$$\mathbf{E}^- \psi_k(f_0, \dots, f_{k-1}) := \mathbf{E}[\psi_k(f_0, \dots, f_{k-1}) U(-S_k) I\{\mu_k \leq 0\}]. \quad (18)$$

Заметим, что ввиду (13) приведенные определения согласованы при различных k . В частности, для любого k и любых множеств $A_0, A_1, \dots, A_{k-1} \subseteq \Sigma$ эти определения задают на измеримом пространстве (Π^k, Σ^k) вероятностные меры

$$\begin{aligned} (\mathbf{P}^\pm)^k \{f_j \in A_j, j = 0, 1, 2, \dots, k-1\} \\ = \mathbf{E}^\pm I\{f_j \in A_j, j = 0, 1, 2, \dots, k-1\}, \end{aligned}$$

причем последовательности мер $(\mathbf{P}^+)^k, k = 1, 2, \dots$, и $(\mathbf{P}^-)^k, k = 1, 2, \dots$, согласованы. Следовательно (снова по теореме Ионеску Тулчи), на измеримом пространстве $(\Pi^\infty, \Sigma^\infty)$ существуют вероятностные меры $(\mathbf{P}^+)^\infty$ и $(\mathbf{P}^-)^\infty$ такие, что их ограничения на (Π^k, Σ^k) совпадают с $(\mathbf{P}^+)^k$ и $(\mathbf{P}^-)^k$ соответственно. В дальнейшем, для краткости, мы будем вместо $(\mathbf{P}^+)^\infty$ и $(\mathbf{P}^-)^\infty$ писать просто $\mathbf{P}^+$ и $\mathbf{P}^-$.

Отталкиваясь от леммы 9 и используя рассуждения, приведенные в [13], несложно показать, что для любой ограниченной измеримой функции ψ_k , зависящей от k аргументов,

$$\mathbf{E}^+ \psi_k(f_0, \dots, f_{k-1}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{E}[\psi_k(f_0, \dots, f_{k-1}) \mid \nu_n^{(1)} > 0], \quad (19)$$

$$\mathbf{E}^- \psi_k(f_0, \dots, f_{k-1}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{E}[\psi_k(f_0, \dots, f_{k-1}) \mid \mu_n \leq 0]. \quad (20)$$

Таким образом, преобразования (17)–(18) задают две замены первоначальной меры для последовательности $\{f_n\}_{n \geq 0}$, причем новые меры могут быть получены из первоначальной меры посредством предельных переходов (19) и (20). В ветвящихся процессах в случайных средах, задаваемых (17)–(18), производящие функции числа непосредственных потомков частиц разных поколений являются, вообще говоря, уже зависимыми.

Нам понадобится следующее обобщение соотношения (4.9) из [13].

Лемма 10. Если $G(x) \in B(\alpha, \beta)$ и при $\alpha < 2$ существуют $\varepsilon_0 \in (0, 1)$ и $\delta_0 \in (0, 1)$ такие, что

$$\mathbf{E} \left[\eta_1^{\varepsilon_0} (1 + X_1 I\{X_1 \geq 0\})^{\alpha + \delta_0} \right] < \infty, \quad (21)$$

а при $\alpha = 2$ существует $\varepsilon_0 \in (0, 1]$ такое, что соотношение (21) выполняется с $\delta_0 = 0$, то

$$B^+ := \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{E}^+ [\eta_{k+1}^{\varepsilon_0} \exp(-\varepsilon_0 S_k)] < \infty. \quad (22)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Поскольку $V(x+y) \leq V(x) + V(y)$ при всех x и y и, кроме того, $V(x+y) \leq V(x)(1+V(y))$, если $x \geq 0$, то

$$\begin{aligned} B^+ &= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{E} \left[\eta_{k+1}^{\varepsilon_0} \exp(-\varepsilon_0 S_k) V(S_{k+1}) I\{\nu_{k+1}^{(1)} > 0\} \right] \\ &\leq \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{E} \left[\eta_{k+1}^{\varepsilon_0} \exp(-\varepsilon_0 S_k) (V(S_k) + V(X_{k+1})) I\{\nu_{k+1}^{(1)} > 0\} \right] \\ &\leq \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{E} \left[\eta_{k+1}^{\varepsilon_0} \exp(-\varepsilon_0 S_k) V(S_k) (1 + V(X_{k+1})) I\{\nu_k^{(1)} > 0\} \right] \\ &= \mathbf{E} [\eta_1^{\varepsilon_0} (1 + V(X_1))] \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{E} \left[\exp(-\varepsilon_0 S_k) V(S_k) I\{\nu_k^{(1)} > 0\} \right]. \end{aligned}$$

По лемме 7 существует константа $c > 0$ такая, что

$$V(x) \leq c(1+x)^{\alpha\rho+\delta_0}, \quad x \geq 0, \quad (23)$$

где величина δ_0 та же, что и в (21). Соотношения (21) и (23) влекут

$$\begin{aligned} \mathbf{E} [\eta_1^{\varepsilon_0} (1 + V(X_1))] &= \mathbf{E} [\eta_1^{\varepsilon_0} (1 + V(X_1)) I\{X_1 \geq 0\}] \\ &\leq c_1 \mathbf{E} [\eta_1^{\varepsilon_0} (1 + X_1 I\{X_1 \geq 0\})^{\alpha\rho+\delta_0}] < \infty. \end{aligned}$$

По теореме восстановления (см. [12, гл. XI, § 1]) найдется константа c такая, что $U(k+1) - U(k) \leq c$ для всех $k = 0, 1, \dots$. Используя этот факт и принимая во внимание лемму 7, соотношение (23) и монотонность $V(x)$, получаем

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{E} \left[e^{-\varepsilon_0 S_k} V(S_k) I\{\nu_k^{(1)} > 0\} \right] &= \int_0^{\infty} \exp(-\varepsilon_0 y) V(y) dU(y) \\ &\leq \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\varepsilon_0 k} V(k+1) (U(k+1) - U(k)) < \infty. \end{aligned} \quad (24)$$

Лемма доказана.

Лемма 11. Если $G(x) \in B(\alpha, \beta)$ и при $\alpha < 2$ существуют $\varepsilon_0 \in (0, 1]$ и $\delta_0 \in (0, 1)$ такие, что

$$\begin{aligned} &\mathbf{E} \left[\eta_1^{\varepsilon_0} ((1 + X_1)^{\alpha(1-\rho)+\delta_0} I\{X_1 \geq 0\} \right. \\ &\quad \left. + (1 - X_1)^{\alpha(1-\rho)+\delta_0} e^{\varepsilon_0 X_1} I\{X_1 < 0\}) \right] < \infty, \end{aligned} \quad (25)$$

а при $\alpha = 2$ существует $\varepsilon_0 \in (0, 1]$ такое, что соотношение (25) выполняется с $\delta_0 = 0$, то

$$B^- := \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{E}^- [\eta_k^{\varepsilon_0} \exp(\varepsilon_0 S_k)] < \infty.$$

Доказательство. Аналогично предыдущей лемме

$$\begin{aligned} B^- &= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{E} \left[\eta_{k+1}^{\varepsilon_0} e^{\varepsilon_0 S_{k+1}} U(-S_{k+1}) I\{\mu_{k+1} \leq 0\} \right] \\ &\leq \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{E} \left[\eta_{k+1}^{\varepsilon_0} e^{\varepsilon_0 S_{k+1}} U(-S_k) (1 + U(-X_{k+1})) I\{\mu_{k+1} \leq 0\} \right] =: B_1 + B_2, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} B_1 &= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{E} \left[\eta_{k+1}^{\varepsilon_0} e^{\varepsilon_0 S_{k+1}} U(-S_k) (1 + U(-X_{k+1})) I\{\mu_{k+1} \leq 0; X_{k+1} \leq 0\} \right], \\ B_2 &= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{E} \left[\eta_{k+1}^{\varepsilon_0} e^{\varepsilon_0 S_{k+1}} U(-S_k) (1 + U(-X_{k+1})) I\{\mu_{k+1} \leq 0; X_{k+1} > 0\} \right] \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{E} \left[\eta_{k+1}^{\varepsilon_0} e^{\varepsilon_0 S_{k+1}} U(-S_k) I\{\mu_{k+1} \leq 0; X_{k+1} > 0\} \right] \end{aligned}$$

(последнее равенство выполнено, поскольку $U(x) = 0$ при $x < 0$). Ясно, что

$$B_1 \leq \mathbf{E} [\eta_1^{\varepsilon_0} e^{\varepsilon_0 X_1} (1 + U(-X_1)) I\{X_1 \leq 0\}] \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{E} [e^{\varepsilon_0 S_k} U(-S_k) I\{\mu_k \leq 0\}]. \quad (26)$$

Вспоминая, что, согласно лемме 7, существует константа $c > 0$ такая, что

$$U(x) \leq c(1+x)^{\alpha(1-\rho)+\delta_0}, \quad x \geq 0, \quad (27)$$

где δ_0 то же, что и в (25), заключаем, что

$$\begin{aligned} &\mathbf{E} [\eta_1^{\varepsilon_0} e^{\varepsilon_0 X_1} (1 + U(-X_1)) I\{X_1 \leq 0\}] \\ &\leq c_1 \mathbf{E} [\eta_1^{\varepsilon_0} e^{\varepsilon_0 X_1} (1 - X_1)^{\alpha(1-\rho)+\delta_0} I\{X_1 < 0\}] < \infty, \end{aligned}$$

в то время как конечность суммы, входящей в (26), может быть установлена аналогично тому, как было получено (24). Следовательно, $B_1 < \infty$.

С другой стороны,

$$\begin{aligned} B_2 &= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{E} \left[\eta_{k+1}^{\varepsilon_0} e^{\varepsilon_0 X_{k+1}} I\{X_{k+1} > 0\} \right. \\ &\quad \left. \times \int_{-\infty}^{-X_{k+1}} e^{\varepsilon_0 y} U(-y) d\mathbf{P}\{S_k \leq y; \mu_k \leq 0\} \right] \\ &= \mathbf{E} \left[\eta_1^{\varepsilon_0} e^{\varepsilon_0 X_1} I\{X_1 > 0\} \int_{X_1}^{\infty} e^{-\varepsilon_0 y} U(y) dV(y) \right]. \end{aligned}$$

Ясно, что

$$\begin{aligned} \int_{X_1}^{\infty} e^{-\varepsilon_0 y} U(y) dV(y) &\leq U(2X_1) \int_{X_1}^{2X_1} e^{-\varepsilon_0 y} dV(y) \\ &\quad + \int_{2X_1}^{\infty} e^{-\varepsilon_0 y} U(y) dV(y) \leq Y_1 + Y_2, \end{aligned} \quad (28)$$

где

$$Y_1 = U(2X_1) \int_{X_1}^{2X_1} e^{-\varepsilon_0 y} dV(y), \quad Y_2 = \int_{2X_1}^{\infty} e^{-\varepsilon_0(y/2+X_1)} U(y) dV(y).$$

Теперь при $X_1 \geq 1$

$$\begin{aligned} \int_{X_1}^{2X_1} e^{-\varepsilon_0 y} dV(y) &\leq \sum_{k=[X_1]}^{\infty} e^{-\varepsilon_0 k} (V(k+1) - V(k)) \\ &\leq c_1 \sum_{k=[X_1]}^{\infty} e^{-\varepsilon_0 k} \leq c_1 (1 - e^{-\varepsilon_0})^{-1} e^{-\varepsilon_0 X_1} \end{aligned}$$

и

$$Y_2 \leq e^{-\varepsilon_0 X_1} \int_{2X_1}^{\infty} e^{-\varepsilon_0 y/2} U(y) dV(y) < c_2 e^{-\varepsilon_0 X_1},$$

поскольку $\int_{2X_1}^{\infty} e^{-\varepsilon_0 y/2} U(y) dV(y) < \infty$ в силу леммы 7 и монотонности $U(y)$ и $V(y)$. Таким образом,

$$B_2 \leq c_3 \mathbf{E} \left[\eta_1^{\varepsilon_0} (1 + U(2X_1)) I\{X_1 > 0\} \right].$$

Комбинируя эту оценку с (27), получаем, что

$$B_2 \leq c_4 \mathbf{E} \left[\eta_1^{\varepsilon_0} (1 + X_1)^{\alpha(1-\rho)+\delta_0} I\{X_1 > 0\} \right] < \infty.$$

Лемма доказана.

Лемма 12. При выполнении условий леммы 11 для любого $\gamma > 1$

$$\limsup_{N \rightarrow \infty} \sup_{M > N} \sum_{k=N+1}^M \mathbf{E} [\eta_k^{\varepsilon_0} e^{\varepsilon_0 S_k} \mid \mu_{M\gamma} \leq 0] = 0 \quad (29)$$

и для любого $x > 0$

$$\limsup_{N \rightarrow \infty} \sup_{M > N} \mathbf{P} \left\{ \sum_{k=N+1}^M \eta_k e^{S_k} > x \mid \mu_M \leq 0 \right\} = 0. \quad (30)$$

Доказательство. Обозначим допредельную сумму в левой части (29) через Δ_N , зафиксируем $\gamma > 1$ и будем считать, что $M \geq N+2$. Тогда

$$\Delta_N = \sum_{k=N+1}^M \mathbf{E} \left[\eta_k^{\varepsilon_0} e^{\varepsilon_0 S_k} \frac{\tilde{m}_{M\gamma-k}(|S_k|)}{\tilde{m}_{M\gamma}(0)}; \mu_k \leq 0 \right].$$

Напомним, что $\tilde{m}_n(x) = \mathbf{P}\{\mu_n \leq x\}$. Ввиду лемм 7, 9 и свойств медленно меняющихся функций

$$\frac{\tilde{m}_{M\gamma-k}(|S_k|)}{\tilde{m}_{M\gamma}(0)} \leq \frac{cU(|S_k|)(M\gamma)^{1-\rho}L(M\gamma)}{U(0)(M\gamma-k)^{1-\rho}L(M\gamma-k)} \leq c_1 U(|S_k|) \left(\frac{\gamma}{\gamma-1} \right)^{1-\rho} \quad (31)$$

для всех $k \in (0, M]$ при достаточно больших M . Отсюда, вспоминая лемму 11, заключаем, что для достаточно больших N

$$\begin{aligned} \Delta_N &\leq c_1 \left(\frac{\gamma}{\gamma-1} \right)^{1-\rho} \sum_{k=N+1}^M \mathbf{E} [\eta_k^{\varepsilon_0} e^{\varepsilon_0 S_k} U(|S_k|); \mu_k \leq 0] \\ &\leq c_1 \left(\frac{\gamma}{\gamma-1} \right)^{1-\rho} \sum_{k=N+1}^{\infty} \mathbf{E}^- [\eta_k^{\varepsilon_0} e^{\varepsilon_0 S_k}]. \end{aligned} \quad (32)$$

Следовательно, $\limsup_{N \rightarrow \infty} \Delta_N = 0$, что доказывает (29).

Для доказательства (30) воспользуемся легко проверяемой цепочкой неравенств

$$\begin{aligned} &\mathbf{P} \left\{ \sum_{k=N+1}^M \eta_k e^{S_k} > x \mid \mu_M \leq 0 \right\} \\ &\leq \frac{\mathbf{P}\{\mu_{M\gamma} \leq 0\}}{\mathbf{P}\{\mu_M \leq 0\}} \mathbf{P} \left\{ \sum_{k=N+1}^M \eta_k e^{S_k} > x \mid \mu_{M\gamma} \leq 0 \right\} + \frac{\mathbf{P}\{\mu_M \leq 0, \mu_{M\gamma} > 0\}}{\mathbf{P}\{\mu_M \leq 0\}} \\ &\leq \mathbf{P} \left\{ \sum_{k=N+1}^M \eta_k e^{S_k} > x \mid \mu_{M\gamma} \leq 0 \right\} + 1 - \frac{\mathbf{P}\{\mu_{M\gamma} \leq 0\}}{\mathbf{P}\{\mu_M \leq 0\}}. \end{aligned} \quad (33)$$

Ввиду леммы 9 и свойств медленно меняющихся функций

$$\limsup_{\gamma \downarrow 1} \limsup_{N \rightarrow \infty} \sup_{M > N} \left(1 - \frac{\mathbf{P}\{\mu_{M\gamma} \leq 0\}}{\mathbf{P}\{\mu_M \leq 0\}} \right) = \limsup_{\gamma \downarrow 1} \left(1 - \frac{1}{\gamma^{1-\rho}} \right) = 0. \quad (34)$$

Теперь для завершения доказательства (30) достаточно воспользоваться неравенством Маркова с $\varepsilon_0 \in (0, 1]$:

$$\begin{aligned} \mathbf{P} \left\{ \sum_{k=N+1}^M \eta_k e^{S_k} > x \mid \mu_{M\gamma} \leq 0 \right\} &\leq x^{-\varepsilon_0} \mathbf{E} \left[\left(\sum_{k=N+1}^M \eta_k e^{S_k} \right)^{\varepsilon_0} \mid \mu_{M\gamma} \leq 0 \right] \\ &\leq x^{-\varepsilon_0} \sum_{k=N+1}^M \mathbf{E} \left[\eta_k^{\varepsilon_0} e^{\varepsilon_0 S_k} \mid \mu_{M\gamma} \leq 0 \right], \end{aligned} \quad (35)$$

а затем применить (29). Доказательство леммы закончено.

Лемма 13. При выполнении условий леммы 11 для любого $\gamma > 1$

$$\limsup_{M \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^M \mathbf{E} \left[\eta_k^{\varepsilon_0} e^{\varepsilon_0 S_k} \mid \mu_{M\gamma} \leq 0 \right] < \infty \quad (36)$$

и

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \limsup_{M \rightarrow \infty} \mathbf{P} \left\{ \sum_{k=1}^M \eta_k e^{S_k} > x \mid \mu_M \leq 0 \right\} = 0. \quad (37)$$

Доказательство. Для того чтобы доказать (36), достаточно воспользоваться (32) с $N = 1$ и леммой 11. Для доказательства (37) необходимо использовать (32), (34) и (35) с $N = 1$, а затем устремить к бесконечности сначала M , а затем x .

Повторяя (с очевидными изменениями) доказательства лемм 12 и 13, но используя лемму 10 вместо леммы 11, можно установить справедливость следующих утверждений.

Лемма 14. При выполнении условий леммы 10 для любого $\gamma > 1$

$$\limsup_{N \rightarrow \infty} \sup_{M > N} \sum_{k=N+1}^M \mathbf{E} \left[\eta_{k+1}^{\varepsilon_0} e^{-\varepsilon_0 S_k} \mid \nu_{M\gamma}^{(1)} > 0 \right] < \infty \quad (38)$$

и для любого $x > 0$

$$\limsup_{N \rightarrow \infty} \sup_{M > N} \mathbf{P} \left\{ \sum_{k=N+1}^M \eta_{k+1} e^{-S_k} > x \mid \nu_M^{(1)} > 0 \right\} = 0. \quad (39)$$

Лемма 15. При выполнении условий леммы 10 для любого $\gamma > 1$

$$\limsup_{M \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^M \mathbf{E} \left[\eta_{k+1}^{\varepsilon_0} e^{-\varepsilon_0 S_k} \mid \nu_{M\gamma}^{(1)} > 0 \right] < \infty \quad (40)$$

и

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \limsup_{M \rightarrow \infty} \mathbf{P} \left\{ \sum_{k=1}^M \eta_{k+1} e^{-S_k} > x \mid \nu_M^{(1)} > 0 \right\} = 0. \quad (41)$$

Пусть

$$g_k(s) := \frac{1}{1 - f_k(s)} - \frac{1}{f'_k(1)(1 - s)}, \quad 0 \leq s \leq 1.$$

Следующая лемма играет важную роль в наших дальнейших рассуждениях.

Лемма 16 (см. [13]). Пусть $f_k \neq 1$, $0 \leq k \leq n-1$. Тогда при любых $0 \leq s < 1$ и $0 \leq m \leq n-1$

$$\frac{1}{1 - f_{m,n}(s)} = \frac{e^{-S_n+S_m}}{1 - s} + \sum_{k=m}^{n-1} \eta_{k,n}(s) e^{-S_k+S_m}, \quad (42)$$

где

$$\eta_{k,n}(s) := g_k(f_{k+1,n}(s)) \leq \eta_{k+1} := \frac{f''_k(1)}{(f'_k(1))^2}. \quad (43)$$

Опираясь на вышеприведенные результаты, мы можем теперь показать, что асимптотическое поведение вероятности невырождения ветвящегося процесса Z_n существенным образом зависит от значения сопровождающего случайного блуждания в точке минимума.

Лемма 17. Если $\{\tau(n) = M > N\}$, где M и N — натуральные числа, то справедливо представление

$$\frac{e^{S_M}}{1 - f_{0,n}(s)} = \frac{e^{S_M-S_{M-N}}}{1 - f_{M-N,n}(s)} + \varepsilon_N(M, n, s),$$

в котором, при выполнении основных условий, для любого $\varepsilon_1 > 0$

$$\limsup_{N \rightarrow \infty} \sup_{M > N} \mathbf{P} \left\{ \sup_{s \in [0,1], n \geq M} \varepsilon_N(M, n, s) > \varepsilon_1 \mid \tau(n) = M \right\} = 0.$$

Доказательство. Для случая $\alpha = 2$ эта лемма была доказана в [27]. Пусть теперь $0 < \alpha < 2$. В соответствии с леммой 16 для $N < M \leq n$ имеем

$$\begin{aligned} \frac{e^{S_M}}{1 - f_{0,n}(s)} &= \frac{e^{S_M}}{1 - f_{0,M-N}(f_{M-N,n}(s))} \\ &= \frac{e^{S_M-S_{M-N}}}{1 - f_{M-N,n}(s)} + \sum_{k=0}^{M-N-1} \eta_{k,M-N}(f_{M-N,n}(s)) e^{S_M-S_k}. \end{aligned}$$

Очевидно, что

$$\begin{aligned} \varepsilon_N(M, n, s) &:= \sum_{k=0}^{M-N-1} \eta_{k,M-N}(f_{M-N,n}(s)) e^{S_M-S_k} \\ &\leq \sum_{k=0}^{M-N-1} \eta_{k+1} e^{S_M-S_k}. \end{aligned} \quad (44)$$

Нетрудно убедиться в том, что для $M > N$ и $x > 0$

$$\begin{aligned} & \mathbf{P} \left\{ \sum_{k=0}^{M-N-1} \eta_{k+1} e^{S_M - S_k} > x \mid \tau(n) = M \right\} \\ &= \mathbf{P} \left\{ \sum_{k=N+1}^M \eta_k^- e^{S_k^-} > x \mid \max_{0 \leq j \leq M} S_j^- \leq 0 \right\}, \end{aligned}$$

где случайные величины S_k^- и η_k^- задаются соотношениями

$$\begin{aligned} S_0^- &= 0, \quad S_k^- = S_M - S_{M-k} = X_M + X_{M-1} + \dots + X_{M-k+1}, \\ & \quad k = 1, 2, \dots, M, \end{aligned} \quad (45)$$

$$\eta_k^- = \eta_{M-k+1}, \quad k = 1, 2, \dots, M. \quad (46)$$

Несложно также видеть, что

$$\mathbf{P} \left\{ \sum_{k=N+1}^M \eta_k^- e^{S_k^-} > x \mid \max_{0 \leq j \leq M} S_j^- \leq 0 \right\} = \mathbf{P} \left\{ \sum_{k=N+1}^M \eta_k e^{S_k} > x \mid \mu_M \leq 0 \right\}.$$

Теперь утверждение леммы следует из (30).

Доказательство следующей леммы опирается на идеи работы [13].

Лемма 18. Если $G(x) \in B(\alpha, \beta)$, то для любого $\gamma > 1$

$$\limsup_{m \rightarrow \infty} \limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbf{E} \left[f_{0,n}(0) - f_{0,m}(0) \mid \nu_{n\gamma}^{(1)} > 0 \right] = 0 \quad (47)$$

и, кроме того, для любого $\lambda > 0$

$$\limsup_{m \rightarrow \infty} \limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbf{E} \left[|q_n(\lambda) - q_m(\lambda)| \mid \nu_{n\gamma}^{(1)} > 0 \right] = 0, \quad (48)$$

где $q_n(\lambda) := f_{0,n}(\exp \{-\lambda e^{-S_n}\})$.

Доказательство. По лемме 9 при достаточно больших n и $m \leq n$ имеем

$$\begin{aligned} & \mathbf{E} \left[f_{0,n}(0) - f_{0,m}(0) \mid \nu_{n\gamma}^{(1)} > 0 \right] \\ &= \frac{\mathbf{E}[(f_{0,n}(0) - f_{0,m}(0)) m_{(\gamma-1)n}(S_n); \nu_n^{(1)} > 0]}{\mathbf{P}\{\nu_{n\gamma}^{(1)} > 0\}} \\ &\leq c_1 \left(\frac{\gamma}{\gamma-1} \right)^\rho \frac{L_0(n\gamma)}{L_0(n(\gamma-1))} \frac{1}{V(0)} \mathbf{E} \left[(f_{0,n}(0) - f_{0,m}(0)) V(S_n); \nu_n^{(1)} > 0 \right] \\ &\leq c_2 \left(\frac{\gamma}{\gamma-1} \right)^\rho \mathbf{E}^+ [f_{0,n}(0) - f_{0,m}(0)] \\ &= c_2 \left(\frac{\gamma}{\gamma-1} \right)^\rho (\mathbf{P}^+ \{Z_n = 0\} - \mathbf{P}^+ \{Z_m = 0\}). \end{aligned}$$

Отсюда, используя монотонное возрастание от поколения к поколению вероятности вырождения процесса и переходя к пределу сначала при $n \rightarrow \infty$, а затем при $m \rightarrow \infty$, получаем (47).

Для доказательства (48) мы используем сходные аргументы. Аналогично предыдущему имеем

$$\mathbf{E} \left[|q_n(\lambda) - q_m(\lambda)| \mid \nu_{n\gamma}^{(1)} > 0 \right] \leq c_2 \left(\frac{\gamma}{\gamma - 1} \right)^\rho \mathbf{E}^+ [|q_n(\lambda) - q_m(\lambda)|]. \quad (49)$$

Поскольку $q_n(\lambda) = \mathbf{E}_\pi^+ [\exp \{-\lambda Z_n e^{-S_n}\}]$ и последовательность $Z_n e^{-S_n}$, $n = 0, 1, 2, \dots$, является неотрицательным мартингалом при фиксированной среде, то при любом фиксированном λ существует предел $\lim_{n \rightarrow \infty} q_n(\lambda) =: q^+(\lambda)$. Используя этот факт и переходя к пределу в (49) сначала при $n \rightarrow \infty$, а затем при $m \rightarrow \infty$, мы получаем (48).

Лемма 19. Если $G(x) \in B(\alpha, \beta)$, то для любого $\varepsilon > 0$

$$\limsup_{m \rightarrow \infty} \limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbf{E} [f_{0,n}(0) - f_{0,m}(0) \mid \nu_n^{(1)} > 0] = 0 \quad (50)$$

и для любого фиксированного $\lambda > 0$

$$\limsup_{m \rightarrow \infty} \limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbf{E} [|q_n(\lambda) - q_m(\lambda)| \mid \nu_n^{(1)} > 0] = 0. \quad (51)$$

Доказательство. При $m \leq n$ и $\gamma > 1$ имеем

$$\begin{aligned} & \mathbf{E} [f_{0,n}(0) - f_{0,m}(0) \mid \nu_{n\gamma}^{(1)} > 0] \\ & \leq \frac{\mathbf{P}\{\nu_{n\gamma}^{(1)} > 0\}}{\mathbf{P}\{\nu_n^{(1)} > 0\}} \mathbf{E} [f_{0,n}(0) - f_{0,m}(0) \mid \nu_{n\gamma}^{(1)} > 0] + 1 - \frac{\mathbf{P}\{\nu_{n\gamma}^{(1)} > 0\}}{\mathbf{P}\{\nu_n^{(1)} > 0\}}. \end{aligned} \quad (52)$$

Согласно (16),

$$\lim_{\gamma \rightarrow 1} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mathbf{P}\{\nu_{n\gamma}^{(1)} > 0\}}{\mathbf{P}\{\nu_n^{(1)} > 0\}} = \lim_{\gamma \rightarrow 1} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^\rho L_0(n)}{(n\gamma)^\rho L_0(n\gamma)} = 1. \quad (53)$$

Объединяя (53) и (52) с (47) и переходя к пределу сначала при $n \rightarrow \infty$, а затем при $\gamma \rightarrow 1$, получаем (50).

Доказательство (51) проводится по той же схеме. Нужно лишь вместо (47) использовать (48). Лемма доказана.

Следующая лемма показывает, что критический ВПСС при условии осуществления события $\{\nu_n^{(1)} > 0\}$ ведет себя как надкритический процесс.

Лемма 20. Пусть выполнены условия леммы 10. Тогда при $n \rightarrow \infty$ 1)

$$\{f_{0,n}(0) \mid \nu_n^{(1)} > 0\} \xrightarrow{d} q^+,$$

где q^+ — случайная величина, определенная на измеримом пространстве $(\Pi^\infty, \Sigma^\infty)$ и такая, что $\mathbf{P}^+\{q^+ < 1\} = 1$;

2) для любого $\lambda \in (0, \infty)$

$$\left\{f_{0,n}(e^{-\lambda e^{-S_n}}) \mid v_n^{(1)} > 0\right\} \xrightarrow{d} q^+(\lambda),$$

где $q^+(\lambda)$ — случайная величина, определенная на измеримом пространстве $(\Pi^\infty, \Sigma^\infty)$ и такая, что $\mathbf{P}^+\{q^+(\lambda) < 1\} = 1$.

Доказательство. Запишем следующее соотношение для преобразований Лапласа распределений случайных величин $f_{0,m}(0)$ и $f_{0,n}(0)$, $0 \leq m \leq n$, относительно параметра $z \geq 0$:

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \left[e^{-zf_{0,n}(0)} \mid v_n^{(1)} > 0 \right] &= \mathbf{E} \left[e^{-zf_{0,m}(0)} \mid v_n^{(1)} > 0 \right] \\ &\quad - \mathbf{E} \left[e^{-zf_{0,m}(0)} - e^{-zf_{0,n}(0)} \mid v_n^{(1)} > 0 \right]. \end{aligned}$$

Ясно, что

$$0 \leq \mathbf{E} \left[e^{-zf_{0,m}(0)} - e^{-zf_{0,n}(0)} \mid v_n^{(1)} > 0 \right] \leq z \mathbf{E} \left[f_{0,n}(0) - f_{0,m}(0) \mid v_n^{(1)} > 0 \right].$$

Вспоминая (50) и замечая, что $\lim_{m \rightarrow \infty} f_{0,m}(0) =: q^+$ существует $\mathbf{P}^+$ -п.н., мы убеждаемся в сходимости преобразований Лапласа

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{E} \left[e^{-zf_{0,n}(0)} \mid v_n^{(1)} > 0 \right] &= \lim_{m \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{E} \left[e^{-zf_{0,m}(0)} \mid v_n^{(1)} > 0 \right] \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} \mathbf{E}^+ [e^{-zf_{0,m}(0)}] = \mathbf{E}^+ [e^{-zq^+}]. \end{aligned} \quad (54)$$

Покажем, что $q^+ < 1$ с вероятностью 1. Действительно, по лемме 16

$$(1 - f_{0,m}(0))^{-1} \leq e^{-S_m} + \sum_{k=0}^{m-1} \eta_{k+1} e^{-S_k}.$$

Отсюда, обращаясь к лемме 10 при ε_0 из (5), заключаем, что

$$\begin{aligned} \mathbf{P}^+\{(1 - f_{0,m}(0))^{-1} > x\} &\leq \mathbf{P}^+ \left\{ e^{-S_m} + \sum_{k=0}^{m-1} \eta_{k+1} e^{-S_k} > x \right\} \\ &\leq x^{-\varepsilon_0} \mathbf{E}^+ \left[e^{-\varepsilon_0 S_m} + \sum_{k=0}^{m-1} \eta_{k+1}^{\varepsilon_0} e^{-\varepsilon_0 S_k} \right] \rightarrow 0, \end{aligned}$$

если устремить к бесконечности сначала m , а затем x . Таким образом, равенство $\mathbf{P}^+\{q^+ < 1\} = 1$ доказано.

Для доказательства п. 2) воспользуемся сходными аргументами. Имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{E} [e^{-zq_n(\lambda)} \mid v_n^{(1)} > 0] \\ = \mathbf{E} [e^{-zq_m(\lambda)} \mid v_n^{(1)} > 0] - \mathbf{E} [e^{-zq_m(\lambda)} - e^{-zq_n(\lambda)} \mid v_n^{(1)} > 0]. \end{aligned}$$

В силу (51)

$$\begin{aligned} & \limsup_{m \rightarrow \infty} \limsup_{n \rightarrow \infty} \left| \mathbf{E}[e^{-zq_m(\lambda)} - e^{-zq_n(\lambda)} \mid v_n^{(1)} > 0] \right| \\ & \leq z \limsup_{m \rightarrow \infty} \limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbf{E}[|q_m(\lambda) - q_n(\lambda)| \mid v_n^{(1)} > 0] = 0, \end{aligned} \quad (55)$$

в то время как повторный предел

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{E}[e^{-zq_m(\lambda)} \mid v_n^{(1)} > 0] = \lim_{m \rightarrow \infty} \mathbf{E}^+[e^{-zq_m(\lambda)}] = \mathbf{E}^+[e^{-zq^+(\lambda)}]$$

существует, поскольку $\lim_{m \rightarrow \infty} q_m(\lambda) =: q^+(\lambda)$ существует $\mathbf{P}^+$ -п.н.

Покажем, что $\mathbf{P}^+\{q^+(\lambda) < 1\} = 1$. Действительно, обращаясь еще раз к лемме 16, имеем

$$\frac{1}{1 - q_m(\lambda)} \leq \frac{e^{-S_m}}{1 - \exp(-\lambda e^{-S_m})} + \sum_{k=0}^{m-1} \eta_{k+1} e^{-S_k}.$$

Отсюда и из оценки $S_m \geq 0$ $\mathbf{P}^+$ -п.н. вытекает, аналогично предыдущему, что

$$\begin{aligned} \mathbf{P}^+\{(1 - q_m(\lambda))^{-1} > x\} & \leq \mathbf{P}^+\left\{\frac{e^{-S_m}}{1 - \exp(-\lambda e^{-S_m})} + \sum_{k=0}^{m-1} \eta_{k+1} e^{-S_k} > x\right\} \\ & \leq \mathbf{P}^+\left\{\frac{e^{-S_m}}{1 - \exp(-\lambda)} + \sum_{k=0}^{m-1} \eta_{k+1} e^{-S_k} > x\right\} \rightarrow 0, \end{aligned}$$

если устремить к бесконечности сначала m , а затем x . Последнее, в свою очередь, влечет конечность $q^+(\lambda)$ $\mathbf{P}^+$ -п.н.

3. Доказательства теорем

Всюду в этом разделе мы предполагаем, что основные условия (i)–(iii) выполнены. Таким образом, делая ниже ссылки на леммы предыдущего раздела, мы будем использовать их именно для тех значений ε_0 и δ_0 , которые обеспечивают выполнение основных условий.

Доказательство теоремы 1. По формуле полной вероятности

$$\mathbf{P}\{\zeta_n^{-1} \leq x\} = \sum_{M=0}^n \mathbf{P}\{\tau(n) = M\} \mathbf{P}\left\{\frac{e^{S_M}}{1 - f_{0,n}(0)} \leq x \mid \tau(n) = M\right\}. \quad (56)$$

Так как распределение случайной величины $\tau(n)n^{-1}$ сходится к обобщенному распределению арксинуса при $n \rightarrow \infty$, то для любого $\delta > 0$ можно выбрать $\varepsilon > 0$ такое, что

$$\mathbf{P}\{\tau(n)n^{-1} \leq \varepsilon, \tau(n)n^{-1} > 1 - \varepsilon\} \leq \delta$$

при всех достаточно больших n . Таким образом, можно рассматривать лишь M , принадлежащие отрезку $[n\varepsilon, n(1 - \varepsilon)]$. При $\tau(n) = M > N$ запишем равенство (см. лемму 17)

$$\frac{e^{S_M}}{1 - f_{0,n}(0)} = \xi(N, n - M) + \varepsilon_N(M, n, 0),$$

где

$$\xi(N, n - M) := \frac{e^{S_M - S_{M-N}}}{1 - f_{M-N,M}(f_{M,n}(0))}. \quad (57)$$

Несложно видеть, что распределение случайной величины, стоящей в правой части выражения (57), зависит лишь от пары $(N, n - M)$, и, следовательно, наши обозначения являются корректными.

Ввиду леммы 17 для любого фиксированного $\varepsilon_1 > 0$ и любого $\delta > 0$

$$\mathbf{P}\{\varepsilon_N(M, n, 0) > \varepsilon_1 \mid \tau(n) = M\} \leq \delta$$

при достаточно больших N и всех $M \in [n\varepsilon, n(1 - \varepsilon)]$, $M > N$. Для таких N , достаточно больших n и $M \in [n\varepsilon, n(1 - \varepsilon)]$ имеем

$$\begin{aligned} & \mathbf{P}\{\xi(N, n - M) \leq x - \varepsilon_1 \mid \tau(n) = M\} - \delta \\ & \leq \mathbf{P}\left\{\frac{e^{S_M}}{1 - f_{0,n}(0)} \leq x \mid \tau(n) = M\right\} \leq \mathbf{P}\{\xi(N, n - M) \leq x \mid \tau(n) = M\}. \end{aligned}$$

Пусть теперь $f_0^-(s), \dots, f_m^-(s), \dots$ и $f_0^+(s), \dots, f_m^+(s), \dots$ — две независимые реализации производящих функций численности потомства нашего процесса в случайной среде. По причинам, которые станут ясны из дальнейшего изложения, нам будет удобно снабжать величины и характеристики, связанные с этими реализациями, знаками $-$ и $+$ соответственно. Так, например, через $\{S_m^-\}_{m \geq 0}$ и $\{S_m^+\}_{m \geq 0}$ мы будем обозначать сопровождающие случайные блуждания последовательностей $f_0^-(s), \dots, f_m^-(s), \dots$ и $f_0^+(s), \dots, f_m^+(s), \dots$.

Для $L = 0, 1, 2, \dots$ положим (ср. с леммой 16)

$$\xi_1(N, L) := \frac{e^{S_N^-}}{1 - f_{N,0}^-(f_{0,L}^+(0))} = \frac{1}{1 - f_{0,L}^+(0)} + \sum_{k=1}^N \eta_{k,0}^-(f_{0,L}^+(0)) e^{S_k^-}, \quad (58)$$

где $\eta_{k,0}^-(s) = g_k^-(f_{k-1}^-(\dots f_0^-(s) \dots)) \leq \eta_k^-$. Отметим, что повторное применение леммы 16 дает

$$\xi_1(N, L) \leq e^{-S_L^+} + \sum_{j=0}^{L-1} \eta_{j+1}^+ e^{S_j^+} + \sum_{k=1}^N \eta_k^- e^{S_k^-}. \quad (59)$$

Введем события

$$A_M^- = \{S_0^- = 0; \max_{1 \leq k \leq M} S_k^- \leq 0\}, \quad A_{n-M}^+ = \{S_0^+ = 0; \min_{1 \leq k \leq n-M} S_k^+ > 0\}$$

и $A_{M,n} = A_M^- \cap A_{n-M}^+$. Несложно проверить, что

$$\mathbf{P}\{\xi(N, n-M) \leq x \mid \tau(n) = M\} = \mathbf{P}\{\xi_1(N, n-M) \leq x \mid A_{M,n}\}.$$

Заметим, что случайная величина $\xi_1(N, n-M)$ зависит (среди прочего) от производящих функций $f_0^+(s), \dots, f_{n-M}^+(s)$, количество которых с ростом разности $n-M$ растет. Это обстоятельство неудобно для дальнейших рассуждений и поэтому, наряду с $\xi_1(N, n-M)$, мы рассмотрим случайную величину $\xi_1(N, N_1)$, где $N_1 \leq n-M$ является свободным (и до поры до времени фиксированным) параметром. Полезность введения такой вспомогательной величины объясняется тем, что, как мы сейчас покажем, для любого $\varepsilon_2 > 0$

$$\limsup_{N_1 \rightarrow \infty} \limsup_{\min(M, n-M) \rightarrow \infty} \mathbf{P}\{|\xi_1(N, n-M) - \xi_1(N, N_1)| > \varepsilon_2 \mid A_{M,n}\} = 0. \quad (60)$$

Действительно, используя при $0 \leq s_1, s_2 \leq 1$ неравенство

$$|f_{N,0}^-(s_2) - f_{N,0}^-(s_1)| \leq e^{S_N^-} |s_2 - s_1|,$$

а при $N_1 \leq n-M$ и $N \leq M$ оценки

$$\xi_1(N, N_1) \leq \xi_1(N, n-M) \leq e^{-S_{n-M}^+} + \sum_{j=0}^{N-M-1} \eta_{j+1}^+ e^{-S_j^+} + \sum_{k=1}^M \eta_k^- e^{S_k^-}, \quad (61)$$

которые вытекают из (59), и рассматривая для $x > 0$ события $\xi_1(N, N_1) \leq \xi_1(N, n-M) \leq 2x$ и $\xi_1(N, n-M) > 2x$, мы получаем последовательно

$$\begin{aligned} & |\xi_1(N, n-M) - \xi_1(N, N_1)| \\ & \leq \xi_1(N, n-M) \xi_1(N, N_1) |f_{0,n-M}^+(0) - f_{0,N_1}^+(0)| \end{aligned} \quad (62)$$

и

$$\begin{aligned} & \mathbf{P}\{|\xi_1(N, n-M) - \xi_1(N, N_1)| > \varepsilon_2 \mid A_{M,n}\} \\ & \leq \mathbf{P}\{\xi_1(N, n-M) > 2x \mid A_{M,n}\} \\ & \quad + \mathbf{P}\{4x^2 |f_{0,n-M}^+(0) - f_{0,N_1}^+(0)| > \varepsilon_2 \mid A_{M,n}\} \\ & \leq \mathbf{P}\left\{\sum_{k=1}^M \eta_k^- e^{S_k^-} > x \mid A_M^-\right\} \\ & \quad + \mathbf{P}\left\{e^{-S_{n-M}^+} + \sum_{j=0}^{N-M-1} \eta_{j+1}^+ e^{-S_j^+} > x \mid A_{n-M}^+\right\} \\ & \quad + \mathbf{P}\{4x^2 |f_{0,n-M}^+(0) - f_{0,N_1}^+(0)| > \varepsilon_2 \mid A_{n-M}^+\}. \end{aligned} \quad (63)$$

Заметим, что

$$\begin{aligned} & \mathbf{P}\left\{4x^2|f_{0,n-M}^+(0) - f_{0,N_1}^+(0)| > \varepsilon_2 \mid A_{n-M}^+\right\} \\ & \leq 4x^2\varepsilon_2^{-1}\mathbf{E}\left[|f_{0,n-M}^+(0) - f_{0,N_1}^+(0)| \mid A_{n-M}^+\right]. \end{aligned} \quad (64)$$

Согласно лемме 19,

$$\limsup_{N_1 \rightarrow \infty} \limsup_{n-M \rightarrow \infty} \mathbf{E}\left[|f_{0,n-M}^+(0) - f_{0,N_1}^+(0)| \mid A_{n-M}^+\right] = 0$$

и, следовательно, левая часть (64) стремится к нулю, если сначала $n - M \rightarrow \infty$, а затем $N_1 \rightarrow \infty$. Далее, по лемме 15

$$\limsup_{x \rightarrow \infty} \limsup_{n-M \rightarrow \infty} \mathbf{P}\left\{e^{-S_{n-M}^-} + \sum_{j=0}^{n-M-1} \eta_{j+1}^+ e^{-S_j^+} > x \mid A_{n-M}^+\right\} = 0,$$

а по лемме 13

$$\limsup_{x \rightarrow \infty} \limsup_{M \rightarrow \infty} \mathbf{P}\left\{\sum_{k=1}^M \eta_k^- e^{-S_k^-} > x \mid A_M^-\right\} = 0.$$

Комбинируя эти оценки, получаем (60).

Пусть $\hat{\mathbf{P}} = \mathbf{P}^- \times \mathbf{P}^+$. Покажем, что на вероятностном пространстве $(\Pi^\infty \times \Pi^\infty, \Sigma^\infty \times \Sigma^\infty, \hat{\mathbf{P}})$ существует случайная величина ξ такая, что

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \lim_{N_1 \rightarrow \infty} \lim_{\min(M, n-M) \rightarrow \infty} \mathbf{P}\{\xi_1(N, N_1) < x \mid A_{M,n}\} = \hat{\mathbf{P}}\{\xi < x\}$$

во всех точках непрерывности распределения случайной величины ξ . Действительно,

$$\begin{aligned} & \mathbf{P}\{\xi_1(N, N_1) < x \mid A_{M,n}\} \\ & = \frac{1}{\mathbf{P}\{\mu_M^- \leq 0\} \mathbf{P}\{\nu_{n-M}^{(1)+} > 0\}} \mathbf{P}\{\xi_1(N, N_1) < x; \mu_M^- \leq 0; \nu_{n-M}^{(1)+} > 0\}. \end{aligned}$$

Ясно, что

$$\begin{aligned} & \mathbf{P}\left\{\xi_1(N, N_1) < x; \mu_M^- \leq 0; \nu_{n-M}^{(1)+} > 0\right\} \\ & = \mathbf{E}\left[I\{\xi_1(N, N_1) < x; \mu_M^- \leq 0; \nu_{n-M}^{(1)+} > 0\}\right] \\ & = \mathbf{E}\left[\mathbf{E}\left[I\{\xi_1(N, N_1) < x; \mu_M^- \leq 0; \nu_{n-M}^{(1)+} > 0\} \mid f_0^-, \dots, f_{N-1}^-; \right. \right. \\ & \quad \left. \left. f_0^+, \dots, f_{N_1-1}^+\right]\right] \\ & = \mathbf{E}\left[I\{\xi_1(N, N_1) < x; \mu_M^- \leq 0; \nu_{N_1}^{(1)+} > 0\} \right. \\ & \quad \left. \times \tilde{m}_{M-N}^-(-S_N^-) m_{n-M-N_1}^+(S_{N_1}^+)\right]. \end{aligned} \quad (65)$$

Отсюда, используя лемму 9 для $\tilde{m}_M^-(x) = \mathbf{P}\{\mu_M^- \leq -x\}$ и $m_{n-M}^+(x) = \mathbf{P}\{\nu_{n-M}^{(1)+} > -x\}$ и теорему об ограниченной сходимости, получаем

$$\begin{aligned} & \lim_{\min(M, n-M) \rightarrow \infty} \frac{\mathbf{P}\{\xi_1(N, N_1) < x; \mu_M^- \leq 0; \nu_{n-M}^{(1)+} > 0\}}{\tilde{m}_M^-(0)m_{n-M}^+(0)} \\ &= \mathbf{E} \left[I \left\{ \xi_1(N, N_1) < x; \mu_N^- \leq 0; \nu_{N_1}^{(1)+} > 0 \right\} U(-S_N^-) V(S_{N_1}^+) \right] \\ &= \mathbf{E} \left[I \{ \xi_1(N, N_1) < x \} U(-S_N^-) V(S_{N_1}^+) I \{ \mu_N^- \leq 0 \} I \{ \nu_{N_1}^{(1)+} > 0 \} \right] \\ &= \hat{\mathbf{P}} \{ \xi_1(N, N_1) < x \}. \end{aligned}$$

Заметим теперь, что $\lim_{N_1 \rightarrow \infty} f_{0, N_1}^+(0) = q^+$ п.н. по мере $\mathbf{P}^+$, и, следовательно, $\lim_{N_1 \rightarrow \infty} f_{0, N_1}^+(0) = q^+$ п.н. относительно меры $\hat{\mathbf{P}}$. Более того, $q^+ < 1$ $\hat{\mathbf{P}}$ -п.н. согласно лемме 20. Следовательно,

$$\lim_{N_1 \rightarrow \infty} \xi_1(N, N_1) = \frac{e^{S_N^-}}{1 - f_{N,0}^-(q^+)}$$

существует и конечен $\hat{\mathbf{P}}$ -п.н. С другой стороны, для любого фиксированного значения $s \in [0, 1)$ последовательность $e^{S_N^-}/(1 - f_{N,0}^-(s))$, $N = 1, 2, \dots$, монотонно возрастает по N . Поэтому предел $\lim_{N \rightarrow \infty} e^{S_N^-}/(1 - f_{N,0}^-(q^+))$ существует $\hat{\mathbf{P}}$ -п.н. и в силу неравенства

$$\frac{e^{S_N^-}}{1 - f_{N,0}^-(q^+)} \leq \frac{1}{1 - q^+} + \sum_{k=1}^{\infty} \eta_k^- e^{S_k^-}$$

конечен $\hat{\mathbf{P}}$ -п.н.

Объединяя приведенные выше аргументы, заключаем, что на вероятностном пространстве $(\Pi^\infty \times \Pi^\infty, \Sigma^\infty \times \Sigma^\infty, \hat{\mathbf{P}})$ существует невырожденная и конечная с вероятностью 1 случайная величина $\xi \geq 1$ такая, что

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \lim_{\min(M, n-M) \rightarrow \infty} \mathbf{P} \left\{ \frac{e^{S_N^-}}{1 - f_{N,0}^-(f_{0,n-M}^+(0))} < x \mid A_{M,n} \right\} = \hat{\mathbf{P}} \{ \xi < x \}$$

в точках непрерывности распределения случайной величины ξ . Из вышесказанного следует, что

$$\begin{aligned} & \hat{\mathbf{P}} \{ \xi \leq x - \varepsilon_1 \} - \delta \\ & \leq \lim_{N \rightarrow \infty} \liminf_{n \rightarrow \infty} \min_{M \in [n\varepsilon, n(1-\varepsilon)]} \mathbf{P} \{ \xi(N, n-M) \leq x \mid \tau(n) = M \} \\ & \leq \lim_{N \rightarrow \infty} \limsup_{n \rightarrow \infty} \max_{M \in [n\varepsilon, n(1-\varepsilon)]} \mathbf{P} \{ \xi(N, n-M) \leq x \mid \tau(n) = M \} \leq \hat{\mathbf{P}} \{ \xi \leq x \}. \end{aligned}$$

Откуда следует, что $\zeta_n^{-1} \xrightarrow{d} \zeta^{-1}$, где $\zeta = \xi^{-1}$.

Теорема доказана.

Доказательство теоремы 2. Легко понять, что

$$\begin{aligned} & \mathbf{E}_\pi \left[\exp \{ -\lambda Z_n e^{S_{\tau(n)} - S_n} \} \mid Z_n > 0 \right] \\ &= 1 - \frac{1 - f_{0,n}(\exp\{-\lambda e^{S_{\tau(n)} - S_n}\})}{1 - f_{0,n}(0)}. \end{aligned} \quad (66)$$

Положим

$$\zeta_n(\lambda) := e^{-S_{\tau(n)}} \left(1 - f_{0,n}(\exp\{-\lambda e^{S_{\tau(n)} - S_n}\}) \right).$$

Из теоремы 1 и (66) следует, что теорема 2 будет доказана, если мы установим, что двумерный вектор $(\zeta_n, \zeta_n(\lambda))$ сходится по распределению при $n \rightarrow \infty$ к двумерному вектору $(\zeta, \zeta(\lambda))$ такому, что $\zeta(\lambda) > 0$ при $\lambda > 0$. Ниже мы дадим лишь схему доказательства того, что $\zeta_n(\lambda)$ сходится по распределению при $n \rightarrow \infty$ к некоторой случайной величине $\zeta(\lambda) > 0$. Однако из наших рассуждений будет видно, что приводимые нами выкладки можно проводить параллельно с соответствующими оценками для ζ_n , причем каждый раз на общем вероятностном пространстве. Отсюда и будет следовать заключение теоремы.

Как и в теореме 1, на множестве $\tau(n) = M > N$ имеем представление

$$\frac{e^{S_M}}{1 - f_{0,n}(\exp\{-\lambda e^{S_M - S_n}\})} = \xi(N, M - n, \lambda) + \widehat{\varepsilon}_N(M, n, \lambda),$$

где

$$\xi(N, M - n, \lambda) := \frac{e^{S_M} e^{-S_{M-N}}}{1 - f_{M-N,M}(f_{M,n}(\exp\{-\lambda e^{S_M - S_n}\}))}, \quad (67)$$

а величина $\widehat{\varepsilon}_N(M, n, \lambda)$ такова, что для любого фиксированного $\varepsilon_1 > 0$ и любого $\delta > 0$

$$\mathbf{P} \left\{ \widehat{\varepsilon}_N(M, n, \lambda) > \varepsilon_1 \mid \tau(n) = M \right\} \leq \delta$$

при достаточно больших N и всех $M \in [n\varepsilon, n(1 - \varepsilon)]$, $M > N$.

Аналогично соотношению (58) имеем при $N < M = \tau(n)$

$$\begin{aligned} \xi(N, M - n, \lambda) &= \frac{e^{S_M - S_{M-N}}}{1 - f_{M-N,M}(f_{M,n}(e^{-\lambda e^{S_M - S_n}}))} \\ &\stackrel{d}{=} \frac{e^{S_N^-}}{1 - f_{N,0}^-(f_{0,n-M}^+(e^{-\lambda e^{-S_n^+ - M}}))} =: \xi_1(N, n - M, \lambda), \end{aligned}$$

где

$$S_k^+ \stackrel{d}{=} S_{M+k} - S_M,$$

$k = 0, 1, 2, \dots$, — сопровождающее случайное блуждание для последовательности $\{f_k^+, k = 0, 1, 2, \dots\}$. Теперь, повторяя почти дословно до-

казательство теоремы 1 и используя леммы 19, 20 и аналоги соотношений (60)–(65), можно показать, что предел

$$\begin{aligned} & \lim_{\min(M, n-M) \rightarrow \infty} \mathbf{P}\{\xi_1(N, N_1, \lambda) < x; \mu_M^- \leq 0; \nu_{n-M}^{(1)+} > 0\} \\ &= \mathbf{E}[I\{\xi_1(N, N_1, \lambda) < x; \mu_N^- \leq 0; \nu_{N_1}^{(1)+} > 0\} U(-S_N^-) V(S_{N_1}^+)] \\ &= \mathbf{E}[I\{\xi_1(N, N_1, \lambda) < x\} U(-S_N^-) V(S_{N_1}^+) I\{\mu_N^- \leq 0\} I\{\nu_{N_1}^{(1)+} > 0\}] \\ &= \hat{\mathbf{P}}\{\xi_1(N, N_1, \lambda) < x\} \end{aligned}$$

существует. Отсюда, так же, как и при доказательстве теоремы 1, можно вывести, что предел

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \lim_{N_1 \rightarrow \infty} \xi_1(N, N_1, \lambda) =: \xi(\lambda) \quad (68)$$

существует $\hat{\mathbf{P}}$ -п.н. Таким образом, для любого $\lambda > 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}\left\{\frac{e^{S_{\tau(n)}}}{1 - f_{0,n}(e^{-\lambda e^{S_{\tau(n)}} - S_n})} \leq x\right\} = \hat{\mathbf{P}}\{\xi(\lambda) \leq x\} = \hat{\mathbf{P}}\{\zeta^{-1}(\lambda) \leq x\} \quad (69)$$

во всех точках непрерывности случайной величины $\xi(\lambda)$, причем $\zeta(\lambda)$ является собственной случайной величиной, принимающей с вероятностью 1 лишь положительные значения. Нетрудно убедиться в том, что приведенные выше аргументы для $\zeta_n^{-1}(\lambda)$ можно проводить параллельно с рассуждениями теоремы 1 для ζ_n^{-1} и, тем самым, показать сходимость этой пары по распределению к двумерному вектору $(\xi(\lambda), \xi)$. Это замечание, вместе с соотношением (69) и теоремой 1, позволяет заключить, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{E}_\pi \left[e^{-\lambda Z_n e^{S_{\tau(n)} - S_n}} \mid Z_n > 0 \right] \stackrel{d}{=} 1 - \frac{\zeta(\lambda)}{\zeta} =: \psi_\pi(\lambda).$$

Теорема доказана.

Авторы выражают благодарность рецензенту за полезные замечания, позволившие улучшить изложение представленных результатов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Athreya K. B., Ney P. Branching Processes. Berlin: Springer-Verlag, 1972, 287 p.
2. Athreya K. B., Karlin S. Branching processes with random environments, I: Extinction probabilities. — Ann. Math. Statist., 1971, v. 42, № 5, p. 1499–1520.
3. Athreya K. B., Karlin S. Branching processes with random environments, II: Limit theorems. — Ann. Math. Statist., 1971, v. 42, № 6, p. 1843–1858.
4. Афанасьев В. И. Предельная теорема для критического ветвящегося процесса в случайной среде. — Дискретн. матем., 1993, т. 5, № 1, с. 45–58.
5. Афанасьев В. И. Новая предельная теорема для критического ветвящегося процесса в случайной среде. — Дискретн. матем., 1997, т. 9, № 3, с. 52–67.

6. Афанасьев В. И. Функциональная предельная теорема для критического ветвящегося процесса в случайной среде. — Дискретн. матем., 2001, т. 13, № 4, с. 73–91.
7. Doney R. A. Spitzer's condition and ladder variables in random walks. — Probab. Theory Relat. Fields, 1995, v. 101, № 4, p. 577–580.
8. Bingham N. H. Limit theorems in fluctuation theory. — Adv. Appl. Probab., 1973, v. 5, № 3, p. 554–569.
9. Bingham N. H., Goldie C. M., Teugels J. L. Regular Variation. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1989, 494 p.
10. Borovkov K. A., Vatutin V. A. Reduced critical branching processes in random environment. — Stochastic Process. Appl., 1997, v. 71, № 2, p. 225–240.
11. Bertoin J., Doney R. A. Spitzer's condition for random walks and Lévy processes. — Ann. Inst. H. Poincaré, 1997, v. 33, № 2, p. 167–178.
12. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. Т. 2. М.: Мир, 1984, 752 с.
13. Geiger J., Kersting G. The survival probability of a critical branching process in a random environment. — Теория вероятн. и ее примен., 2000, т. 45, в. 3, с. 607–615.
14. Золотарев В. М. Одномерные устойчивые распределения. М.: Наука, 1983, 304 с.
15. Hirano K. Determination of the limiting coefficient for exponential functionals of random walks with positive drift. — J. Math. Sci. Univ. Tokyo, 1998, v. 5, № 2, p. 299–332.
16. Iglehart D. L. Random walks with negative drift conditioned to stay positive. — J. Appl. Probab., 1974, v. 11, № 4, p. 742–751.
17. Fleischmann K., Vatutin V. A. Reduced subcritical branching processes in random environment. — Adv. Appl. Probab., 1999, v. 31, № 1, p. 88–111.
18. Козлов М. В. Об асимптотике вероятности вырождения критических ветвящихся процессов в случайной среде. — Теория вероятн. и ее примен., 1976, т. 21, в. 4, с. 813–825.
19. Козлов М. В. Условная функциональная предельная теорема для критического ветвящегося процесса в случайной среде. — Докл. РАН, 1995, т. 344, № 1, с. 12–15.
20. Рогозин Б. А. Распределение первого лестничного момента и высоты и флуктуации случайного блуждания. — Теория вероятн. и ее примен., 1971, т. 16, в. 4, с. 593–613.
21. Ширяев А. Н. Вероятность. М.: Наука, 1980, 576 с.
22. Спitzer Ф. Принципы случайного блуждания. М.: Мир, 1969, 472 с.
23. Stone C. A local limit theorem for nonlattice multi-dimensional distribution functions. — Ann. Math. Statist., 1965, v. 36, № 2, p. 546–551.
24. Tanny D. Limit theorems for branching processes in a random environment. — Ann. Probab., 1977, v. 5, № 1, p. 100–116.
25. Ватутин В. А. Редуцированные ветвящиеся процессы в случайной среде. — Теория вероятн. и ее примен., 2002, т. 47, в. 1, с. 21–38.
26. Ватутин В. А., Дьяконова Е. Е. Критические ветвящиеся процессы в случайной среде: вероятность вырождения в фиксированный момент. — Дискретн. матем., 1997, т. 9, № 1, с. 100–126.
27. Vatutin V. A., Dyakonova E. E. Reduced branching processes in random environment. — Mathematics and Computer Science II: Algorithms, Trees, Combinatorics and Probabilities. Ed. by B. Chauvin et al. Basel, Birkhäuser, 2002, p. 455–467.
28. Vatutin V. A., Zubkov A. M. Branching Processes II. — J. Soviet Math., 1993, v. 67, № 6, p. 3407–3485.

Поступила в редакцию
30.X.2002