Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Новиков, Мартингалы и моменты первого выхода для процесса Орнштейна–Уленбека со скачками, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2003, том 48, выпуск 2, 340–358

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp288>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.174.16.151

26 апреля 2023 г., 16:00:03

© 2003 г.

НОВИКОВ А. А.*

МАРТИНГАЛЫ И МОМЕНТЫ ПЕРВОГО ВЫХОДА ДЛЯ ПРОЦЕССА ОРНШТЕЙНА–УЛЕНБЕКА СО СКАЧКАМИ¹⁾*Посвящается 100-летию А. Н. Колмогорова*

В работе, с использованием специально подобранного семейства мартингалов, доказывается существование экспоненциальных моментов первого пересечения уровня процессом Орнштейна–Уленбека. В случае, когда процесс имеет скачки в сторону от уровня, найдено преобразование Лапласа этих моментов. Кроме того, выводятся максимальные неравенства для процесса Орнштейна–Уленбека в предположении, что скачки имеют устойчивое распределение.

Ключевые слова и фразы: экспоненциальные мартингалы, моменты первого пересечения уровня, процесс Орнштейна–Уленбека, преобразование Лапласа, моментное тождество Вальда, максимальные неравенства, устойчивое распределение.

1. Введение. Пусть X_t , $t \geq 0$, — процесс, являющийся решением линейного стохастического уравнения следующего вида:

$$X_t = X_0 - \beta \int_0^t X_s ds + Y_t, \quad t \geq 0, \quad (1)$$

где $\{Y_t, t \geq 0\}$ — процесс Леви (т.е. процесс с независимыми и однородными приращениями, см., например, [1], [2]), X_0 — неслучайное начальное значение. Здесь мы рассматриваем только случай $\beta > 0$. В литературе этот процесс используется как важный пример различных классов случайных процессов: дробовой шум (см., например, [3]), фильтрованный процесс Пуассона (см. [4]), обобщенный процесс Орнштейна–Уленбека (OU-процесс; [5]–[7]) и т.д.

Одна из важных проблем для процессов этого типа состоит в нахождении распределения моментов первого пересечения уровня

$$\tau_b = \inf\{t > 0: X_t > b\}, \quad b > X_0.$$

* Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, ул. Губкина, 8, 119991 Москва, ГСП-1, Россия. University of Technology of Sydney, Department of Mathematical Sciences, PO Box 123, Broadway, Sydney, NSW 2007, Australia; e-mail: Alex.Novikov@uts.edu.au

¹⁾ Работа выполнена при поддержке ARC Large Grant A0010474.

Для изучения этой проблемы предлагались различные подходы: в [1], [10] и [21] использовался метод интегральных уравнений; в [7], [8] и [9] использовалась мартингальная техника. В настоящей работе для изучения указанных выше распределений используется специальное параметрическое семейство мартингалов (см. теорему 1). Ограничиваясь только случаем, когда положительные скачки отсутствуют, мы находим преобразование Лапласа случайной величины τ_b (теорема 2). Отметим, что этот результат был получен ранее в [7] и [8] при менее общих условиях (см. замечание 3).

В случае, когда процесс Y_t имеет положительные скачки, явные формулы для преобразования Лапласа случайной величины τ_b или ее моментов (не говоря уже про распределение) неизвестны, за исключением ряда специальных случаев: скачки Y_t экспоненциально распределены ([10]) или имеют равномерное распределение ([22]).

В настоящей работе мы показываем, что распределение τ_b экспоненциально ограничено при всех b , если процесс Y_t имеет диффузионную компоненту или положительные скачки (см. теорему 3; этот результат ранее отмечался в [9] при дополнительном предположении о существовании математического ожидания у процесса Y_t). Кроме того, мы выводим нижнюю оценку для $E\tau_b$ с помощью моментного тождества Вальда (см. п. 4). Отметим, что это моментное тождество может быть использовано для получения асимптотических приближений для $E\tau_b$ при $b \rightarrow \infty$ (см. [22]). В п. 5 мы используем упомянутое тождество при выводе моментных неравенств для $\sup_{t \leq \tau} X_t$ с произвольным моментом остановки τ в случае одностороннего (без положительных скачков) устойчивого процесса Y_t (теорема 5). При выводе этого результата мы применяем некоторые приемы из работы Граверсена и Пешкира [11], которые получили неравенства для $\sup_{t \leq \tau} |X_t|$ в случае гауссовского ОУ-процесса.

2. Экспоненциальное семейство мартингалов. Предполагается, что дано вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ с фильтрацией $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$, удовлетворяющее стандартным условиям (включая непрерывность справа и т.п.), и все случайные объекты (процессы, моменты остановки) заданы на этом вероятностном пространстве.

Любой процесс Леви Y_t имеет следующее представление:

$$Y_t = mt + \sigma W_t + Z_t, \quad (2)$$

где m и σ — константы, W_t — стандартный винеровский процесс и Z_t — скачкообразная компонента.

Решение (единственное) уравнения (1) допускает следующее пред-

ставление в терминах стохастических интегралов по процессам W_t и Z_t :

$$\begin{aligned} X_t &= X_0 e^{-\beta t} + e^{-\beta t} \int_0^t e^{\beta s} dY_s \\ &= \frac{m}{\beta} + \left(X_0 - \frac{m}{\beta}\right) e^{-\beta t} + \sigma e^{-\beta t} \int_0^t e^{\beta s} dW_s + e^{-\beta t} \int_0^t e^{\beta s} dZ_s. \end{aligned} \quad (3)$$

Известно, что скачкообразную компоненту Z_t процесса Леви можно выразить в терминах стохастических интегралов по пуассоновской случайной мере $p(dx, ds)$, порожденной скачками процесса Y_t , и канонической мере Леви $\Pi(dx)$:

$$Z_t = \int_0^t \int x I\{|x| < 1\} [p(dx, ds) - \Pi(dx) ds] + \int_0^t \int x I\{|x| \geq 1\} p(dx, ds). \quad (4)$$

Здесь $I\{\cdot\}$ — индикаторная функция и мера Леви $\Pi(dx)$ должна удовлетворять условию

$$\int \min(x^2, 1) \Pi(dx) < \infty. \quad (5)$$

Ниже мы определим один класс мартингалов как параметрическое семейство функций от « X_t » в специальном случае, когда процесс Y_t имеет все экспоненциальные моменты:

$$\mathbf{E} e^{uY_t} = \exp\{t\psi(u)\} < \infty \quad \text{для всех } u \geq 0, \quad (6)$$

где, как известно (см. [1]), функция $\psi(u)$ имеет следующее представление:

$$\psi(u) = m u + \frac{\sigma^2}{2} u^2 + \int (e^{ux} - ux I\{|x| < 1\} - 1) \Pi(dx).$$

Предположим также, что

$$\mathbf{E} \ln(1 + Y_1^-) < \infty \quad (7)$$

(здесь и ниже мы используем обозначения $a^+ = \max(a, 0)$, $a^- = (-a)^+$). Это условие, как будет показано ниже, является достаточным и необходимым для конечности следующей функции, участвующей в определении мартингалов ниже:

$$\varphi(u) = \frac{1}{\beta} \int_0^u v^{-1} \psi(v) dv = \frac{1}{\beta} \left(m u + \frac{\sigma^2}{4} u^2 + I_1(u) + I_2(u) \right), \quad u \geq 0, \quad (8)$$

где

$$\begin{aligned} I_1(u) &= \int_0^u v^{-1} \left[\int (e^{vx} - vx I\{|x| < 1\} - 1) I\{x > -1\} \Pi(dx) \right] dv, \\ I_2(u) &= \int_0^u v^{-1} \left[\int (e^{vx} - 1) I\{x \leq -1\} \Pi(dx) \right] dv. \end{aligned}$$

Интеграл $I_1(u)$ определен и конечен ввиду условий (5) и (6). Подынтегральную функцию в $I_2(u)$ удобно преобразовать следующим образом:

$$\begin{aligned} \int_0^u v^{-1}(e^{vx} - 1) dv &= \int_0^{-xu} y^{-1}(e^{-y} - 1) dy = - \int_0^1 y^{-1}(1 - e^{-y}) dy \\ &- \int_1^{-xu} y^{-1}(1 - e^{-y}) dy = -EulerGamma - \ln(-xu) - \int_{-xu}^{\infty} y^{-1}e^{-y} dy, \end{aligned}$$

где *EulerGamma* — константа Эйлера (в обозначениях пакета Mathematica, [23]):

$$EulerGamma = \int_0^1 y^{-1}(1 - e^{-y}) dy - \int_1^{\infty} y^{-1}e^{-y} dy$$

(см. также [12, формула 8.367.12]). Поэтому

$$I_2(u) = D - \int \left[\ln(u) + \int_{-xu}^{\infty} y^{-1}e^{-y} dy \right] I\{x \leq -1\} \Pi(dx), \quad (9)$$

где $D = - \int [EulerGamma + \ln(-x)] I\{x \leq -1\} \Pi(dx)$. Так как (7) эквивалентно сходимости интеграла $\int \ln(-x) I\{x \leq -1\} \Pi(dx)$, то теперь ясно, что ввиду (5) интеграл $I_2(u)$ конечен, если и только если выполнено (7).

Для определения упомянутого выше семейства мартингалов нам потребуется «мартингальная» функция

$$H(\mu, x) = \int_0^{\infty} e^{ux - \varphi(u)} u^{\mu-1} du, \quad \mu > 0.$$

Следующая оценка асимптотики функции $\varphi(u)$ позволяет легко найти достаточные условия конечности функции $H(\mu, x)$.

Лемма 1. Пусть выполнены условия (6) и (7). Если

$$\sigma > 0, \text{ или } \Pi((0, \infty)) > 0, \text{ или } \int |x| I\{-1 < x < 0\} \Pi(dx) = \infty, \quad (10)$$

то

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{\varphi(u)}{u} = \infty. \quad (11)$$

Если

$$\sigma = 0, \quad \Pi((0, \infty)) = 0, \quad \int |x| I\{-1 < x < 0\} \Pi(dx) < \infty, \quad (12)$$

то

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{\varphi(u)}{u} = \frac{1}{\beta} \left(m + \int |x| I\{-1 < x < 0\} \Pi(dx) \right). \quad (13)$$

Доказательство. Из (9) следует, что

$$I_2(u) = -\ln(u)\Pi((-\infty, -1]) + O(1), \quad u \rightarrow \infty. \quad (14)$$

Используя неравенство $e^z - zI\{|z| < 1\} - 1 \geq z^2 I\{z > 0\}/2$, получаем оценку первого интеграла в (8):

$$I_1(u) \geq \frac{u^2}{4} \int x^2 I\{x > 0\} \Pi(dx).$$

Следовательно, всегда имеет место такая нижняя оценка:

$$\beta\varphi(u) \geq mu + \frac{u^2}{4} \left(\sigma^2 + \int x^2 I\{x > 0\} \Pi(dx) \right) + O(\ln(u)).$$

Таким образом, согласно полученным оценкам, при $\sigma > 0$ или $\Pi((0, \infty)) > 0$ выполнено (11).

Теперь предположим, что выполнено (12). Тогда

$$\beta\varphi(u) = mu + \int \left[\int_0^u \frac{e^{vx} - vx - 1}{v} dv \right] I\{-1 < x < 0\} \Pi(dx) + I_2(u).$$

Согласно (14), $I_2(u)$ имеет порядок $O(\ln(u))$. Поскольку при $x < 0$ и $v > 0$ справедливы неравенства

$$0 \leq \frac{e^{vx} - vx - 1}{v} \leq -x,$$

то, с учетом того, что $\int |x| I\{-1 < x < 0\} \Pi(dx) < \infty$, по теореме о мажорируемой сходимости и правилу Лопиталья получаем

$$\begin{aligned} \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{1}{u} \int_0^u \int \frac{e^{vx} - vx - 1}{v} dv I\{-1 < x < 0\} \Pi(dx) \\ = \int |x| I\{-1 < x < 0\} \Pi(dx). \end{aligned}$$

Таким образом, соотношение (13) выполнено.

Если же $\int |x| I\{-1 < x < 0\} \Pi(dx) = \infty$, то тем же способом находим следующую оценку: при любом $\varepsilon > 0$

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{\varphi(u)}{u} \geq \frac{1}{\beta} \left(m + \int |x| I\{-1 < x < -\varepsilon\} \Pi(dx) \right).$$

Полагая здесь $\varepsilon \rightarrow 0$, получаем (11). Лемма 1 доказана.

В силу леммы 1 функция $H(\mu, x)$ конечна при любом действительном x , когда выполнено условие (10), или же когда

$$\sigma = 0, \quad \Pi((0, \infty)) = 0, \quad m + \int |x| I\{-1 < x < 0\} \Pi(dx) > \beta x. \quad (15)$$

З а м е ч а н и е 1. Если

$$\sigma = 0, \quad \Pi((0, \infty)) = 0, \quad m + \int |x| I\{-1 < x < 0\} \Pi(dx) \leq \beta X_0, \quad (16)$$

то при $b > X_0$ момент остановки $\tau_b = \infty$.

Действительно, условие $\Pi((0, \infty)) = 0$ означает, что у процесса X_t положительные скачки вообще отсутствуют. Отбрасывая отрицательные скачки у процесса X_t , мы можем только увеличить его значения, и поэтому соотношения (3), (4) и (16) влекут такую детерминированную оценку:

$$\begin{aligned} X_t &\leq \frac{m}{\beta} + \left(X_0 - \frac{m}{\beta}\right) e^{-\beta t} + e^{-\beta t} \int_0^t e^{\beta s} \left[\int |x| I\{-1 < x < 0\} \Pi(dx) \right] ds \\ &= \frac{1}{\beta} \left(m + \int |x| I\{-1 < x < 0\} \Pi(dx) \right) \\ &\quad + \left(X_0 - \frac{m}{\beta} - \frac{1}{\beta} \int |x| I\{-1 < x < 0\} \Pi(dx) \right) e^{-\beta t} \leq X_0. \end{aligned}$$

Поэтому если $b > X_0$, то $\sup_{t \geq 0} X_t < b$ и, значит, $\tau_b = \infty$.

Теорема 1. Пусть выполнены условия (6) и (7). Кроме того, предположим, что выполнено (10) или (15) с $x = X_0$. Тогда процесс

$$\{e^{-\beta \mu t} H(\mu, X_t), \quad t \geq 0\}, \quad \mu > 0,$$

является мартингалом.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Используя стандартные средства стохастического анализа (см. [1] или [13]), можно проверить, что при выполнении условий (6) и (7) процесс

$$\Sigma_t(u) = \exp \left\{ u e^{\beta t} X_t - \int_0^t \psi(u e^{\beta s}) ds \right\} \quad \text{является мартингалом.} \quad (17)$$

Тот факт, что этот процесс является локальным мартингалом, проверяется с помощью обобщенной формулы Ито на основе представления (3). Его равномерная интегрируемость (в предположении (6)) и мартингаловность являются следствием хорошо известного экспоненциального тождества

$$\mathbf{E} \exp \left\{ \int_0^t f(s) dY_s - q_t \right\} = 1,$$

где

$$\begin{aligned} q_t &= m \int_0^t f(s) ds + \frac{\sigma^2}{2} \int_0^t f^2(s) ds \\ &\quad + \int_0^t \int \left(e^{f(s)x} - f(s) x I\{|x| < 1\} - 1 \right) \Pi(dx) ds, \end{aligned}$$

которое выполнено, по крайней мере, для ограниченных детерминированных функций $f(s)$.

Заметим, что

$$\int_0^t \psi(ue^{\beta s}) ds = \frac{1}{\beta} \int_u^{ue^{\beta t}} \frac{\psi(v)}{v} dv = \varphi(ue^{\beta t}) - \varphi(u).$$

Так как $\mathbf{E}(\Sigma_t(u)) = \Sigma_t(0) = \exp\{uX_0\}$, то с учетом последней формулы получаем

$$\mathbf{E} \exp\{uX_t\} = \exp\{uX_0 e^{-\beta t} + \varphi(u) - \varphi(ue^{-\beta t})\}. \quad (18)$$

Теперь, применяя теорему Фубини и затем вводя новую переменную $z = ue^{-\beta s}$, получаем

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(H(\mu, X_t)) &= \int_0^\infty \mathbf{E}(e^{uX_t - \varphi(u)}) u^{\mu-1} du \\ &= \int_0^\infty e^{uX_0 e^{-\beta t} - \varphi(ue^{-\beta t})} u^{\mu-1} du = e^{\beta \mu t} H(\mu, X_0) < \infty. \end{aligned} \quad (19)$$

Последняя оценка верна в силу леммы 1 и условий (10) или (15) с $x = X_0$. Согласно (17), имеет место мартингаловое свойство

$$\mathbf{E}(\Sigma_t(u) \mid \mathcal{F}_s) = \Sigma_s(u) \quad \text{п.н.} \quad (s \leq t).$$

Интегрируя обе части этого равенства по мере $Q(du) = e^{-\varphi(u)} u^{\mu-1} du$ ($\mu > 0$) на интервале $(0, \infty)$, получаем

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \mathbf{E}(\Sigma_t(u) \mid \mathcal{F}_s) e^{-\varphi(u)} u^{\mu-1} du &= \int_0^\infty \Sigma_s(u) e^{-\varphi(u)} u^{\mu-1} du \\ &= e^{-\beta \mu s} \int_0^\infty e^{ue^{\beta s} X_s - \varphi(ue^{\beta s})} (ue^{\beta s})^{\mu-1} d(ue^{\beta s}) = e^{-\beta \mu s} H(\mu, X_s). \end{aligned} \quad (20)$$

По теореме Фубини в левой части (20) можно переставить символы интегрирования и математического ожидания. Это и дает требуемое мартингаловое свойство:

$$\mathbf{E}(e^{-\beta \mu t} H(\mu, X_t) \mid \mathcal{F}_s) = e^{-\beta \mu s} H(\mu, X_s) \quad \text{п.н.}$$

Теорема 1 доказана.

З а м е ч а н и е 2. Идея построения специального параметрического семейства мартингалов для изучения моментов останова не нова. Подобный прием использовался, к примеру, в работах [14] и [15] для изучения вероятностей пересечения границ винеровским процессом, в работах [16] и [7] — для вероятностей пересечения границ устойчивым процессом Леви.

По теореме об остановке мартингалов и теореме 1 имеет место следующее тождество:

$$\mathbf{E}[e^{-\beta\mu \min(\tau,t)} H(\mu, X_{\min(\tau,t)})] = H(\mu, X_0), \quad \mu > 0, \quad (21)$$

которое справедливо для любого момента остановки τ и фиксированного $t < \infty$. Ниже мы используем это тождество для вывода явной формулы для преобразования Лапласа случайной величины τ_b , когда процесс Y_t не имеет положительных скачков. Перед выводом нам придется ввести еще одно обозначение:

$$\tilde{H}(\mu, x) = \int_0^\infty e^{ux - \tilde{\varphi}(u)} u^{\mu-1} du, \quad \mu > 0,$$

где

$$\beta\tilde{\varphi}(u) = mu + \frac{\sigma^2 u^2}{4} + I_1(u) - \int \left[\ln(u) + \int_{-xu}^\infty \frac{e^{-y}}{y} dy \right] I\{x \leq -1\} \Pi(dx).$$

Если выполнено (7), то ввиду (9) и (8) имеем следующее простое соотношение между функциями $\tilde{H}(\mu, x)$ и $H(\mu, x)$:

$$\tilde{H}(\mu, x) = \exp\{D\beta^{-1}\} H(\mu, x),$$

где константа D определена выше. Отметим, что функция $\tilde{H}(\mu, x)$ определена и конечна и при нарушении условия (7).

Теорема 2. Пусть $\Pi((0, \infty)) = 0$. Если

$$\sigma > 0 \quad \text{или} \quad m + \int |x| I\{-1 < x < 0\} \Pi(dx) > \beta b, \quad (22)$$

то $\mathbf{P}\{\tau_b < \infty\} = 1$ и

$$\mathbf{E}e^{-\beta\mu\tau_b} = \frac{\tilde{H}(\mu, X_0)}{\tilde{H}(\mu, b)}, \quad \mu > 0.$$

Доказательство. Предположим, что выполнено (7), и рассмотрим тождество (21) с $\tau = \tau_b$. В силу леммы 1 и условия (22) функция $H(\mu, x)$ конечна при $x \leq b$. Заметим, что из-за отсутствия положительных скачков справедливы равенство $X_{\tau_b} = b$ на множестве $\{\tau_b < t\}$ и неравенство $X_t \leq b$ на множестве $\{\tau_b \geq t\}$ при любом $t \geq 0$. Поэтому справедлива оценка $H(\mu, X_{\min(\tau_b, t)}) \leq H(\mu, b) < \infty$, и, следовательно, по лемме Фату можно перейти к пределу при $t \rightarrow \infty$ под знаком математического ожидания в (21). В результате получим

$$\mathbf{E}[I\{\tau_b < \infty\} e^{-\beta\mu\tau_b}] = \frac{H(\mu, X_0)}{H(\mu, b)}, \quad \mu > 0. \quad (23)$$

Легко заметить (применяя, например, интегрирование по частям), что

$$\lim_{\mu \downarrow 0} \mu H(\mu, x) = 1. \quad (24)$$

Переходя теперь в (23) к пределу при $\mu \rightarrow 0$, по лемме Фату получаем, что $\mathbf{P}\{\tau_b < \infty\} = 1$. Так как

$$\frac{H(\mu, X_0)}{H(\mu, b)} = \frac{\tilde{H}(\mu, X_0)}{\tilde{H}(\mu, b)}, \quad \mu > 0,$$

то теорема 2 доказана при наложенном условии (7). Если (7) не выполняется, то можно ввести ОУ-процесс X_t^N , являющийся решением уравнения (1) с обрезанным процессом Леви Y_t^N (с выкинутыми отрицательными скачками, меньшими $-N$):

$$Y_t^N = mt + \sigma W_t + Z_t^N,$$

где

$$\begin{aligned} Z_t^N = & \int_0^t \int x I\{-1 < x < 0\} [p(dx, ds) - \Pi(dx) ds] \\ & + \int_0^t \int x I\{-N \leq x \leq -1\} p(dx, ds). \end{aligned}$$

Обозначим момент пересечения уровня процессом Y_t^N как τ_b^N . Очевидно, $\tau_b^N \rightarrow \tau_b$ п.н. монотонно по $N \nearrow \infty$. Поскольку условие (7) выполнено для Y_t^N , то, как уже было доказано,

$$\mathbf{E} e^{-\beta \mu \tau_b^N} = \frac{\tilde{H}^N(\mu, X_0)}{\tilde{H}^N(\mu, b)}, \quad \mu > 0,$$

где функция $\tilde{H}^N(\mu, x)$ определена выше. Теперь легко проверить, что $\lim_{N \rightarrow \infty} \tilde{H}^N(\mu, x) = \tilde{H}(\mu, x)$ при $x \leq b$. Теорема 2 доказана.

З а м е ч а н и е 3. Если $\Pi(dx) \equiv 0$ и $\sigma > 0$, то X_t — гауссовский процесс, и, конечно, результат теоремы 2 для этого случая хорошо известен (см. [17]). При этом аналитическое обращение преобразования Лапласа можно получить на основе представления функции $H(\mu, x)$ в терминах функции параболического цилиндра $D_{-\mu}(-x)$ (см. [12, формула 9.241.2]), которая хорошо изучена.

Для случая $\Pi((-\infty, 0)) > 0$ и $\sigma > 0$ результат теоремы 2 получен Хаджиевым (см. [7, с. 85, теорема 2]; отметим, что Хаджиев использовал другое семейство мартингалов). Случай, когда $\Pi((-\infty, 0)) > 0$ и $\sigma = 0$, также рассматривался в [7], но при дополнительном условии (Hypothesis G в [7]).

3. Экспоненциальная ограниченность τ_b . Здесь обобщается результат работы [9] о достаточных условиях существования экспоненциальных моментов случайной величины τ_b . В качестве следствия мы получаем достаточное условие для существования экспоненциальных моментов времени первого выхода процесса X_t из интервала (a, b) :

$$\tau_{a,b} = \inf\{t > 0: X_t > b \text{ или } X_t < a\}, \quad b > X_0 > a.$$

Теорема 3. Пусть выполнено (10) или (15) с $x = b$. Предположим также, что

$$\mathbf{E}(Y_1^-)^\delta < \infty \quad \text{для некоторого } \delta \in (0, 1). \quad (25)$$

Тогда найдется $\alpha > 0$ такое, что

$$\mathbf{E} e^{\alpha \tau_b} < \infty.$$

Доказательство. Мы будем использовать аналитическое продолжение мартингального семейства $e^{-\beta t} H(\mu, X_t)$, которое было определено выше в предположении (6) и $\mu > 0$, на интервал $\mu \in (-\delta, 0)$ с δ из условия (25).

Положим по определению

$$H(\mu, x) = \int_0^\infty (e^{ux - \varphi(u)} - 1) u^{\mu-1} du \quad \text{для } \mu \in (-\delta, 0). \quad (26)$$

В силу условия (10) и леммы 1 эта функция конечна, если и только если $\int_0^1 |\varphi(u)| u^{\mu-1} du < \infty$. Используя (5) и представление (8), можно заметить, что при $\mu > -1$

$$\int_0^1 |\varphi(u)| u^{\mu-1} du \leq C + C \int_0^1 |I_2(u)| u^{\mu-1} du.$$

(Мы используем букву C с индексом или без для обозначения положительных констант.) Применяя неравенство

$$1 - e^{-z} \leq C_\delta z^\delta, \quad z > 0, \quad \delta > 0, \quad (27)$$

получим следующую оценку:

$$\begin{aligned} \int_0^1 |I_2(u)| u^{\mu-1} du &= \int \int_0^1 \int_0^u \frac{(1 - e^{vx})}{v} dv I\{x \leq -1\} \Pi(dx) u^{\mu-1} du \\ &\leq \frac{C_\delta}{\delta} \int |x|^\delta I\{x \leq -1\} \Pi(dx) \int_0^1 u^{\mu-1+\delta} du. \end{aligned}$$

Здесь интеграл в правой части конечен при любом $\mu \in (-\delta, 0)$, поскольку условие (25) эквивалентно конечности интеграла $\int |x|^\delta I\{x \leq -1\} \Pi(dx)$.

Функция $H(\mu, x)$, определенная в (26) для $\mu \in (-\delta, 0)$, является аналогом функции $H(\mu, x)$, определенной в п. 2 для случая $\mu > 0$. Из определения (26) легко следует (ср. с (24)), что

$$\lim_{\mu \uparrow 0} \mu H(\mu, x) = 1. \quad (28)$$

Фактически повторяя доказательство теоремы 1 с так определенной функцией $H(\mu, x)$, но, естественно, при $\mu \in (-\delta, 0)$, можно показать, что процесс

$$e^{-\beta \mu t} \int_0^\infty (e^{uX_t} - e^{uX_0}) u^{\mu-1} e^{-\varphi(u)} du + H(\mu, X_0) e^{-\beta \mu t}$$

является мартингалом, и, следовательно, по теореме об остановке мартингалов для любого конечного $t \geq 0$

$$\mathbf{E} e^{-\beta \mu \min(\tau_b, t)} \left[\int_0^\infty (e^{uX_{\min(\tau_b, t)}} - e^{uX_0}) u^{\mu-1} e^{-\varphi(u)} du + H(\mu, X_0) \right] = H(\mu, X_0). \quad (29)$$

Рассмотрим сначала случай $\Pi((0, \infty)) = 0$. Поскольку тогда $X_{\min(\tau_b, t)} \leq b$ и $\mu < 0$, то справедливо следующее неравенство:

$$\mathbf{E} e^{-\beta \mu \min(\tau_b, t)} \left[\mu \int_0^\infty (e^{ub} - e^{uX_0}) u^{\mu-1} e^{-\varphi(u)} du + \mu H(\mu, X_0) \right] \leq \mu H(\mu, X_0). \quad (30)$$

Так как

$$0 < \int_0^\infty (e^{ub} - e^{uX_0}) u^{\mu-1} e^{-\varphi(u)} du \longrightarrow \int_0^\infty (e^{ub} - e^{uX_0}) u^{-1} e^{-\varphi(u)} du < \infty$$

при $\mu \rightarrow 0$, то найдется $\mu_0 \in (-\delta, 0)$ такое, что для любого $\mu \in (\mu_0, 0)$

$$\mu \int_0^\infty (e^{ub} - e^{uX_0}) u^{\mu-1} e^{-\varphi(u)} du > -0.8.$$

Ввиду (28) можно найти $\mu_1 \in (\mu_0, 0)$ такое, что $0.9 < \mu_1 H(\mu_1, X_0) < 1.1$. Поэтому из (30) вытекает, что

$$\mathbf{E} e^{-\beta \mu_1 \min(\tau_b, t)} \leq \frac{\mu_1 H(\mu_1, X_0)}{\mu_1 \int_0^\infty (e^{ub} - e^{uX_0}) u^{\mu_1-1} e^{-\varphi(u)} du + \mu_1 H(\mu_1, X_0)} < \frac{1.1}{0.1}.$$

Поскольку эта оценка верна для любого $t \geq 0$, то по лемме Фату утверждение теоремы 3 имеет место с $\alpha = -\mu_1 \beta$.

Если $\Pi((0, \infty)) > 0$, то существует положительная константа A такая, что $\Pi((0, A]) > 0$. Введем новый ОУ-процесс X_t^A , являющийся решением уравнения (1) с процессом Леви Y_t^A , у которого нет положительных скачков, больших A . Тогда момент τ_b^A первого пересечения этим

процессом уровня b мажорирует τ_b , т.е. $\tau_b^A \geq \tau_b$. Рассмотрим тождество (29) с τ_b^A вместо τ_b и соответствующим образом определенными функциями $\varphi_A(u)$ и $H_A(\mu, X_0)$. Так как $X_{\min(\tau_b^A, t)}^A \leq b + A$ и $\mu < 0$, то имеет место оценка

$$\mathbf{E} e^{-\beta \mu \min(\tau_b^A, t)} \left[\mu \int_0^\infty (e^{u(A+b)} - e^{uX_0}) u^{\mu-1} e^{-\varphi_A(u)} du + \mu H_A(\mu, X_0) \right] \leq \mu H_A(\mu, X_0).$$

Дальнейший ход доказательства следует случаю $\Pi((0, \infty)) = 0$ выше. Теорема 3 доказана.

Следствие 1. Пусть $\sigma > 0$ или $\Pi((-\infty, \infty)) > 0$. Предположим, что

$$\mathbf{E}|Y_1|^\delta < \infty \quad \text{для некоторого } \delta > 0.$$

Тогда найдется $\alpha > 0$ такое, что

$$\mathbf{E} e^{\alpha \tau_{a,b}} < \infty.$$

Доказательство. Обозначим $\gamma_a = \inf\{t > 0: X_t < a\}$ и заметим, что $\tau_{a,b} = \min(\tau_b, \gamma_a)$. Теперь, применяя теорему 3 для случайных величин τ_b и γ_a , получим требуемый результат.

4. Моментное тождество Вальда. Следующий результат является обобщением теоремы 2 из [8].

Теорема 4. Пусть

$$T = \inf\{t \geq 0: X_t \geq f(t)\}, \quad X_0 < f(0),$$

где $f(t)$ — непрерывная неслучайная функция такая, что

$$\sup_{t \geq 0} f(t) = M < \infty.$$

Пусть выполнены условия (6) и (25). Предположим также, что выполнены условия (10) или (15) с $x = M$. Тогда

$$\beta \mathbf{E} T = \mathbf{E} \int_0^\infty (e^{uX_T} - e^{uX_0}) u^{-1} e^{-\varphi(u)} du < \infty. \quad (31)$$

Доказательство. Сначала покажем, что при выполнении условий (10) или (15) с $x = M$ процесс

$$\left\{ \int_0^\infty (e^{uX_t} - e^{uX_0}) u^{-1} e^{-\varphi(u)} du - \beta t, t \geq 0 \right\} \quad \text{является мартингалом.} \quad (32)$$

Действительно, из мартингальности процесса $\{e^{-\beta\mu t}H(\mu, X_t), t \geq 0\}$ следует, что

$$\begin{aligned} e^{-\beta\mu t} \mathbf{E}([H(\mu, X_t) - H(\mu, X_0)] | \mathcal{F}_s) + (e^{-\beta\mu t} - 1) H(\mu, X_0) \\ = e^{-\beta\mu s} [H(\mu, X_s) - H(\mu, X_0)] + (e^{-\beta\mu s} - 1) H(\mu, X_0) \quad \text{п.н.} \end{aligned} \quad (33)$$

Теперь заметим, что в условиях доказываемой теоремы

$$\lim_{\mu \rightarrow 0} [H(\mu, z) - H(\mu, X_0)] = \int_0^\infty (e^{uz} - e^{uX_0}) u^{-1} e^{-\varphi(u)} du$$

при любом z , когда выполнено (10), или при $z < M$, когда выполнено (15) с $x = M$. Кроме того, ввиду (24)

$$\lim_{\mu \rightarrow 0} (e^{-\beta\mu t} - 1) H(\mu, X_0) = -\beta t.$$

С помощью леммы 1 и равенства (18) легко обосновать, что

$$\lim_{\mu \rightarrow 0} \mathbf{E}|H(\mu, X_t) - H(\mu, X_0)| = \mathbf{E} \lim_{\mu \rightarrow 0} |H(\mu, X_t) - H(\mu, X_0)| < \infty$$

(см. также (19)). Применяя теперь теорему о мажорируемой сходимости, можно поменять местами символы предела при $\mu \rightarrow 0$ и условного математического ожидания в левой части (33). Поэтому, переходя к пределу при $\mu \rightarrow 0$ в обеих частях (33), получим мартингальное свойство (32).

По теореме об остановке мартингалов имеет место следующее тождество:

$$\beta \mathbf{E} \min(\tau, t) = \mathbf{E} \int_0^\infty (e^{uX_{\min(\tau, t)}} - e^{uX_0}) u^{-1} e^{-\varphi(u)} du, \quad (34)$$

которое справедливо для любого момента остановки τ и фиксированного $t \geq 0$.

Итак, осталось показать, что при $\tau = T$ в (34) возможен переход к пределу при $t \rightarrow \infty$ под знаком математического ожидания. Для этого заметим, что по теореме 3

$$\mathbf{E}T < \infty. \quad (35)$$

Далее, тождество (34) с $\tau = T$ эквивалентно соотношению

$$\beta \mathbf{E} \min(T, t) = \mathbf{E} I\{T \leq t\} \int_0^\infty (e^{uX_T} - e^{uX_0}) u^{-1} e^{-\varphi(u)} du + e_t,$$

где $e_t = \mathbf{E} I\{T > t\} \int_0^\infty (e^{uX_t} - e^{uX_0}) u^{-1} e^{-\varphi(u)} du$.

Если мы покажем, что

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e_t = 0, \quad (36)$$

то по теореме о монотонной сходимости получим (31).

Чтобы проверить (36), заметим, что $X_t \leq M$ на множестве $\{T > t\}$. Поэтому, применяя неравенство (27), получим

$$\begin{aligned} |e_t| &= \left| \mathbf{E} I\{T > t, X_t \geq X_0\} \int_0^\infty (e^{uX_t} - e^{uX_0}) u^{-1} e^{-\varphi(u)} du \right. \\ &\quad \left. - \mathbf{E} I\{T > t, X_t < X_0\} \int_0^\infty e^{uX_0} (1 - e^{u(X_t - X_0)}) u^{-1} e^{-\varphi(u)} du \right| \\ &\leq \mathbf{P}\{T > t, X_t \geq X_0\} \int_0^\infty (e^{uM} - e^{uX_0}) u^{-1} e^{-\varphi(u)} du \\ &\quad + \mathbf{E} \left[I\{T > t, X_t < X_0\} C_\delta \int_0^\infty e^{uX_0} u^{-1+\delta} e^{-\varphi(u)} du ((X_t - X_0)^-)^{\delta} \right] \\ &\leq C_1 \mathbf{P}\{T > t\} + C_2 \mathbf{E}[I\{T > t\} |X_t - X_0|^{\delta}], \end{aligned} \quad (37)$$

где

$$C_1 = \int_0^\infty (e^{uM} - e^{uX_0}) u^{-1} e^{-\varphi(u)} du, \quad C_2 = C_\delta \int_0^\infty e^{uX_0} u^{-1+\delta} e^{-\varphi(u)} du.$$

Пусть

$$\begin{aligned} \hat{Y}_t &= \sigma W_t + \int_0^t \int x I\{|x| < 1\} [p(dx, ds) - \Pi(dx) ds], \\ \tilde{Y}_t &= \int_0^t \int x I\{|x| \geq 1\} p(dx, ds). \end{aligned}$$

Заметим, что ввиду (3) и (4)

$$X_t - X_0 = (\beta^{-1}m - X_0)(1 - e^{-\beta t}) + e^{-\beta t} \int_0^t e^{\beta s} d\hat{Y}_s + e^{-\beta t} \int_0^t e^{\beta s} d\tilde{Y}_s.$$

Используя оценку $|a + b + c|^{\delta} \leq |a|^{\delta} + |b|^{\delta} + |c|^{\delta}$ с $\delta \in (0, 1)$, теперь можно заключить, что

$$|X_t - X_0|^{\delta} \leq |\beta^{-1}m - X_0|^{\delta} + |\hat{X}_t|^{\delta} + \int_0^t \int |x|^{\delta} I\{|x| \geq 1\} p(dx, ds), \quad (38)$$

где $\hat{X}_t$ — OU-процесс с $\hat{X}_0 = 0$, порожденный квадратично интегрируемым мартингалом $\hat{Y}_t$. Ниже мы покажем, что для любого момента остановки τ и $\delta \leq 2$

$$\mathbf{E} \sup_{t \leq \tau} |\hat{X}_t|^{\delta} \leq C_{\delta, \beta} \mathbf{E} \tau^{\delta/2}. \quad (39)$$

По известным свойствам стохастических интегралов (см. [1] или [13]) справедливо следующее тождество для любого момента остановки τ :

$$\mathbf{E} \int_0^{\tau} \int |x|^{\delta} I\{|x| \geq 1\} p(dx, ds) = \int |x|^{\delta} I\{|x| \geq 1\} \Pi(dx) \mathbf{E} \tau,$$

где в силу (6) и (25)

$$\int |x|^\delta I\{|x| \geq 1\} \Pi(dx) < \infty. \quad (40)$$

Комбинируя теперь соотношения (35), (37), (38), (40) и (39) (последнее будет доказано ниже), можно заключить, что случайная величина $\sup_{t \leq T} |X_t - x|$ имеет конечное математическое ожидание и, следовательно, справедливо соотношение (36).

Для проверки (39) заметим, что, применяя обобщенную формулу Ито (см. [1] или [13]) к процессу $\hat{X}_t^2 = e^{-2\beta t} M_t^2$ с

$$M_t = \int_0^t e^{\beta s} d\hat{Y}_s,$$

находим, что

$$\begin{aligned} \hat{X}_t^2 &= \int_0^t e^{-2\beta s} (2M_s - dM_s) + \int_0^t e^{-2\beta s} d([M_s, M_s] - \langle M_s, M_s \rangle) \\ &\quad + \int_0^t M_s^2 de^{-2\beta s} + t \left(\sigma^2 + \int x^2 I\{|x| < 1\} \Pi(dx) \right). \end{aligned}$$

Заметим, что здесь первый и второй члены являются мартингалами, а третий член — неположительный. Отсюда следует, что для любого ограниченного момента остановки τ

$$\mathbf{E} \hat{X}_\tau^2 \leq \mathbf{E}(\tau) \left(\sigma^2 + \int x^2 I\{|x| < 1\} \Pi(dx) \right).$$

Применяя принцип доминирования Ленгляра (см. [18, с. 156]), из последнего неравенства получаем (39) при $\delta \leq 2$. Теорема 4 доказана.

З а м е ч а н и е 4. Применяя теорему 4 для момента остановки τ_b и учитывая, что $X_{\tau_b} \geq b$, получаем следующую оценку снизу:

$$\beta \mathbf{E} \tau_b \geq \int_0^\infty (e^{ub} - e^{uX_0}) u^{-1} e^{-\varphi(u)} du.$$

Условие (6), присутствующее в теоремах 1 и 4, исключает случай экспоненциально распределенных положительных скачков и других подобных распределений. Однако применяя технику исключения больших скачков, использованную выше, можно легко вывести аналогичную оценку снизу. Действительно, предположим, что вместо (6) справедливо условие

$$K = \sup \{ u \geq 0: \mathbf{E} e^{uY_t} = \exp \{ t\psi(u) \} < \infty \} < \infty,$$

и определим функцию

$$\varphi(u) = \frac{1}{\beta} \int_0^u v^{-1} \psi(v) dv, \quad u < K.$$

Тогда, фактически повторяя рассуждения из доказательства теоремы 4 сначала для случая усеченных положительных скачков, а затем делая предельный переход по параметру усечения, получим

$$\beta \mathbf{E} \tau_b \geq \int_0^K (e^{ub} - e^{uX_0}) u^{-1} e^{-\varphi(u)} du.$$

З а м е ч а н и е 5. Тожество (34) можно использовать и для оценки математического ожидания двухсторонних моментов остановки типа $\tau_{a,b}$. К примеру, рассмотрим процесс Y_t с симметричным распределением, $X_0 = 0$, и пусть выполнено условие (6). Тогда тождество (34) справедливо для ОУ-процессов X_t и $(-X_t)$, т.е. для любого момента остановки τ и фиксированного $t \geq 0$

$$\beta \mathbf{E} \min(\tau, t) = \mathbf{E} \int_0^\infty (e^{\pm u X_{\min(\tau, t)}} - 1) u^{-1} e^{-\varphi(u)} du$$

и, значит,

$$\beta \mathbf{E} \min(\tau, t) = \mathbf{E} \int_0^\infty (\operatorname{ch}(u X_{\min(\tau, t)}) - 1) u^{-1} e^{-\varphi(u)} du. \quad (41)$$

Именно это соотношение использовалось в [11] (в других обозначениях) для классического гауссовского ОУ-процесса при выводе максимального неравенства, аналоги которого для устойчивых ОУ-процессов рассматриваются в следующем пункте. Отметим, что поскольку в гауссовском случае отсутствуют скачки, то предельным переходом по $t \rightarrow \infty$ из (41) получается такая явная формула для $\mathbf{E} \tau_{-b,b}$:

$$\beta \mathbf{E} \tau_{-b,b} = \int_0^\infty (\operatorname{ch}(ub) - 1) u^{-1} e^{-\varphi(u)} du < \infty, \quad \varphi(u) = \frac{\sigma^2 u^2}{4\beta}.$$

5. Максимальные неравенства для устойчивых ОУ-процессов. Здесь рассматривается случай, когда процесс Y_t является одно-сторонним устойчивым процессом (см. [1] или [19]) и

$$\mathbf{E} e^{uY_1} = \exp\{\alpha^{-1} u^\alpha\}, \quad u \geq 0, \quad 1 < \alpha \leq 2. \quad (42)$$

В этом случае Y_t и, следовательно, X_t не имеют положительных скачков, $\varphi(u) = u^\alpha / (\alpha^2 \beta)$. Тогда по формуле (18)

$$\mathbf{E} \exp\{uX_t\} = \exp\left\{uX_0 e^{-\beta t} + \frac{(1 - e^{-\alpha \beta t}) u^\alpha}{\alpha^2 \beta}\right\}.$$

В частности, при $\alpha = 2$, $X_0 = 0$ процесс X_t является гауссовским и для него в [11] доказано следующее замечательное неравенство: для любого момента остановки τ

$$C_1 \mathbf{E} \sqrt{\ln(1 + \beta \tau)} \leq \sqrt{\beta} \mathbf{E} \left(\max_{t \leq \tau} |X_t| \right) \leq C_2 \mathbf{E} \sqrt{\ln(1 + \beta \tau)}, \quad (43)$$

где $C_1 \geq \frac{1}{3}$, $C_2 \leq 3.3795$.

Имеет место следующий аналог неравенства (43).

Теорема 5. Пусть выполнено (42) и X_t является решением уравнения (1) с $X_0 \geq 0$. Тогда для любого момента остановки τ и всех $p > 0$

$$\begin{aligned} c_p \mathbf{E}[(\ln(1 + \beta\tau))^{p(1-1/\alpha)}] &\leq \mathbf{E}\left[\left(\sup_{t \leq \tau} X_t\right)^p\right] \\ &\leq a_p + C_p \mathbf{E}[(\ln(1 + \beta\tau))^{p(1-1/\alpha)}], \end{aligned} \quad (44)$$

где положительные константы a_p , c_p и C_p не зависят от τ .

В работе [11] для вывода (43) использовалось моментное тождество Вальда типа (41). Здесь мы используем его односторонний аналог (34) и следующее простое следствие принципа доминирования Ленгляра.

Лемма 2. Пусть Q_t — неотрицательный непрерывный справа процесс, и пусть A_t — непрерывный неубывающий процесс, $A_0 = 0$. Предположим, что для всех ограниченных моментов остановки τ

$$\mathbf{E}Q_\tau \leq \mathbf{E}A_\tau. \quad (45)$$

Тогда для всех $p > 0$ и всех ограниченных моментов остановки τ существуют константы c_p и C_p , не зависящие от τ и такие, что

$$\mathbf{E}\left[\left(\ln\left(1 + \sup_{t \leq \tau} Q_t\right)\right)^p\right] \leq c_p + C_p \mathbf{E}[(\ln(1 + A_\tau))^p]. \quad (46)$$

Доказательство. Согласно принципу доминирования Ленгляра, неравенство (45) влечет следующее неравенство для любых непрерывных неубывающих функций $H(x)$ с $H(0) = 0$:

$$\mathbf{E}\left(\sup_{t \leq \tau} H(Q_t)\right) \leq \mathbf{E}(\tilde{H}(A_\tau)), \quad (47)$$

где

$$\tilde{H}(x) = x \int_x^\infty \frac{1}{s} dH(s) + 2H(x).$$

Рассмотрим $H(x) = (\ln(1 + x))^p$, $x \geq 0$. Тогда по правилу Лопиталя $\lim_{x \rightarrow 0} \tilde{H}(x) = 0$ и

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{H(x)} \int_x^\infty \frac{1}{s} dH(s) = 0.$$

Отсюда следует, что $\lim_{x \rightarrow \infty} [\tilde{H}(x)/H(x)] = 2$ и, значит, найдутся константы c_p и C_p такие, что $\tilde{H}(x) \leq c_p + C_p H(x)$. Поэтому неравенство (47) с выбранной функцией $H(x) = (\ln(1 + x))^p$ приводит к (46).

Доказательство теоремы 5. Обозначим $X_t^* = \sup_{s \leq t} X_s$. Так как X_t не имеет положительных скачков, то X_t^* — непрерывный неубывающий процесс. В рассматриваемом случае тождество (34) влечет следующее неравенство для всех ограниченных моментов остановки τ :

$$\beta \mathbf{E}\tau \leq \mathbf{E} \int_0^\infty (e^{uX_\tau^*} - e^{uX_0}) u^{-1} e^{-u^\alpha/(\alpha^2\beta)} du = \mathbf{E}(G(X_\tau^*) - G(X_0)),$$

где мы обозначили

$$G(y) = \int_0^\infty (e^{uy} - 1) u^{-1} e^{-u^\alpha/(\alpha^2\beta)} du.$$

Таким образом, мы получили неравенство (45) с $Q_t = \beta t$ и $A_t = G(X_t^*) - G(x)$, где A_t — непрерывный неубывающий процесс, $A_0 = 0$. Применяя лемму 2, имеем

$$\mathbf{E}[(\ln(1 + \beta\tau))^{p(1-1/\alpha)}] \leq c_p + C_p \mathbf{E}[(\ln[1 + G(X_\tau^*) - G(X_0)])^{p(1-1/\alpha)}].$$

Таким образом, чтобы получить оценку снизу (44), нам нужна только следующая оценка: $\ln(1 + G(y)) \leq C_1 + C_2 y^{\alpha/(\alpha-1)}$, $y > 0$. Эта оценка легко следует из известной оценки

$$G(y) = \exp \left\{ C_\alpha y^{\alpha/(\alpha-1)} (1 + o(1)) \right\}, \quad y \rightarrow \infty \quad (48)$$

(см., например, [20, гл. 3, упражнение 7.3]). От предположения об ограниченности моментов остановки τ можно легко избавиться, применяя стандартную технику локализации.

Для вывода оценки сверху в (44) заметим, что из тождества (34) следует (в силу равенства $e^x = e^{x^+} - 1 + e^{-x^-}$), что для любого ограниченного момента остановки τ

$$\mathbf{E}(G(X_\tau^+)) \leq G(X_0) + \beta \mathbf{E}\tau + \mathbf{E} \int_0^\infty (1 - e^{-uX_\tau^-}) u^{-1} e^{-u^\alpha/(\alpha^2\beta)} du.$$

Так как

$$\mathbf{E} \int_0^\infty (1 - e^{-uX_\tau^-}) u^{-1} e^{-u^\alpha/(\alpha^2\beta)} du \leq \mathbf{E}(X_\tau^-) \int_0^\infty e^{-u^\alpha/(\alpha^2\beta)} du$$

и, очевидно (см. доказательство теоремы 4), $\mathbf{E}X_\tau^- \leq |X_0|/\beta + C\mathbf{E}\tau$, то имеет место следующая оценка:

$$\mathbf{E}(G(X_\tau^+)) \leq c + C\mathbf{E}\tau.$$

Таким образом, мы получили неравенство (45) с $A_t = c + Ct$ и $Q_t = G(X_t^+)$, где Q_t — неотрицательный непрерывный справа процесс. Применяя лемму 2, получим

$$\mathbf{E}[(\ln(1 + G(X_\tau^*)))^{p(1-1/\alpha)}] \leq c_p + C_p \mathbf{E}[(\ln(1 + \beta\tau))^{p(1-1/\alpha)}].$$

Теперь осталось только заметить, что из (48) следует такая оценка:

$$C + \ln(1 + G(y)) \geq Cy^{\alpha/(\alpha-1)}, \quad y > 0.$$

Теорема 5 доказана.

З а м е ч а н и е 6. В случае, когда $\alpha = 2$ и $X_0 = 0$, применение неравенств (44) к $\max_{t \leq \tau} X_t$ и $\max_{t \leq \tau} (-X_t)$ приводит к неравенствам типа (43), но без спецификации констант c_p и C_p .

Автор признателен А. Н. Ширяеву, Р. Ш. Липцеру, Е. Шинджикашвили и Б. Эргашеву за полезные замечания.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Скорород А. В.* Случайные процессы с независимыми приращениями. М.: Наука, 1986, 320 с.
2. *Sato K.* Lévy Processes and Infinitely Divisible Distributions. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1999, 486 p.
3. *Perry D., Stadje W., Zacks S.* First-exit times for Poisson shot noise. — *Stoch. Models*, 2001, v. 17, № 1, p. 25–37.
4. *Grigoriu M.* Applied Non-Gaussian Processes. Englewood Cliffs: Prentice Hall PTR, 1995, 442 p.
5. *Barndorff-Nielsen O. E., Shephard N.* Modelling by Lévy processes for financial econometrics. — *Lévy Processes. Theory and Applications*. Ed. by O. E. Barndorff-Nielsen et al. Boston: Birkhäuser, 2001, p. 283–318.
6. *Cáceres M. O., Budini A. A.* The generalized Ornstein–Uhlenbeck process. — *J. Phys. A*, 1997, v. 30, № 24, p. 8427–8444.
7. *Hadjiev D. I.* The first passage problem for generalized Ornstein–Uhlenbeck processes with nonpositive jumps. — *Lecture Notes in Math.*, 1985, v. 1123, p. 80–90.
8. *Новиков А. А.* О моменте первого выхода процесса авторегрессии за уровень и одно применение в задаче «разладки». — *Теория вероятн. и ее примен.*, 1990, т. 35, в. 2, с. 282–292.
9. *Новиков А. А., Эргашев Б. А.* Предельные теоремы для момента достижения уровня процессом авторегрессии. — *Труды МИАН*, 1993, т. 202, с. 209–233.
10. *Tsurui A., Osaki S.* On a first-passage problem for a cumulative process with exponential decay. — *Stochastic Process. Appl.*, 1976, v. 4, № 1, p. 79–88.
11. *Graversen S. E., Peskir G.* Maximal inequalities for the Ornstein–Uhlenbeck process. — *Proc. Amer. Math. Soc.*, 2000, v. 128, № 10, p. 3035–3041.
12. *Градштейн И. С., Рыжик И. М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Физматгиз, 1971, 1108 с.
13. *Жакод Ж., Ширяев А. Н.* Предельные теоремы для случайных процессов. Т. 1, 2. М.: Физматлит, 1994, 544 с., 368 с.
14. *Shepp L. A.* Explicit solutions to some problems of optimal stopping. — *Ann. Math. Statist.*, 1969, v. 40, p. 993–1010.
15. *Robbins H., Siegmund D.* Boundary crossing probabilities for the Wiener process and sample sums. — *Ann. Math. Statist.*, 1970, v. 41, p. 1410–1429.
16. *Новиков А. А.* Мартингальный подход в задачах о времени первого пересечения нелинейных границ. — *Труды МИАН*, 1981, т. 158, с. 130–152, 230.
17. *Darling D. A., Siegert A. J. F.* The first passage problem for a continuous Markov process. — *Ann. Math. Statist.*, 1953, v. 24, p. 624–639.
18. *Revuz D., Yor M.* Continuous Martingales and Brownian Motion. Berlin: Springer-Verlag, 1999, 602 p. (Grundlehren Math. Wiss., v. 293).
19. *Золотарев В. М.* Одномерные устойчивые распределения. М.: Наука, 1983, 304 с.
20. *Olver F. W. J.* Asymptotics and Special Functions. New York–London: Academic Press, 1974, 572 p.
21. *Borovkov K., Novikov A.* On a piece-wise deterministic Markov process model. — *Statist. Probab. Lett.*, 2001, v. 53, № 4, p. 421–428.
22. *Novikov A., Borovkov K., Shinjikashvili E.* Approximations for the maximum of the Ornshtein–Uhlenbeck processes with a jump component. — Preprint. Sydney: University of Technology, 2002.
23. *Wolfram S.* The Mathematica Book. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1999, 1470 p.

Поступила в редакцию
23.1.2003