Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. С. Холево, Классические пропускные способности
квантового канала с ограничением на входе, *Теория
вероятн. и ее примен.*, 2003, том 48, выпуск 2, 359–
374

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp289>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru
подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским согла-
шением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.183.62

26 апреля 2023 г., 15:45:40

© 2003 г.

ХОЛЕВО А. С.*

КЛАССИЧЕСКИЕ ПРОПУСКНЫЕ СПОСОБНОСТИ КВАНТОВОГО КАНАЛА С ОГРАНИЧЕНИЕМ НА ВХОДЕ¹⁾

В этой статье мы восполняем пробел в предыдущих работах и даем доказательство формулы для пропускной способности с использованием сцепленного состояния (entanglement-assisted capacity) для квантового канала с ограничением на входе (такого как бозонный гауссовский канал). Доказательство основано на теореме кодирования для классического-квантового канала с ограничением на входе и на конечномерной аппроксимации входных операторов плотности. Даются также достаточные условия достижимости супремумов в формулах для пропускных способностей.

Ключевые слова и фразы: канал связи квантовый, классическая пропускная способность, сцепленное состояние.

Выражение для пропускной способности с использованием сцепленного состояния для квантового канала с шумом, представляющее ее как максимум взаимной информации по всевозможным входным состояниям, было получено в [1], [2] в случае каналов в конечномерном гильбертовом пространстве. Альтернативное доказательство было дано в [3], см. также [4]. В [2], [5] подходящим образом модифицированная формула была применена к квантовым гауссовским каналам, которые являются наиболее важным примером каналов с ограничением на входе, действующих в бесконечномерном гильбертовом пространстве. В этой статье мы восполняем пробел в предыдущих работах и даем доказательство гипотетической формулы (34). Доказательство основано на теореме кодирования для классического-квантового канала с ограничением на входе и на конечномерной аппроксимации входных операторов плотности. Даются также достаточные условия достижимости супремумов в формулах для пропускных способностей. Объяснение используемых далее понятий квантовой теории информации см. в [4].

1. Сначала рассмотрим случай классического-квантового (с-к) канала с дискретным (возможно, бесконечным) алфавитом $\mathcal{X}$. Для любого $x \in \mathcal{X}$ задан оператор плотности S_x в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$

* Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, ул. Губкина, 8, 119991 Москва, Россия; e-mail: holevo@mi.ras.ru

¹⁾ Работа выполнена при поддержке ИНТАС (грант № 00-738).

(вообще говоря, бесконечномерном) с конечной энтропией фон Неймана $H(S_x)$ (см. Приложение). С- q канал задается отображением $x \rightarrow S_x$. Пусть $f(x)$ — неотрицательная непостоянная функция на входном алфавите. Переходя к блочному кодированию, введем аддитивное ограничение на входные слова $w = (x_1, \dots, x_n)$, потребовав, чтобы

$$f(x_1) + \dots + f(x_n) \leq nE, \quad (1)$$

где E — положительная постоянная. Классическая пропускная способность такого канала была определена и вычислена в [6] при условии равномерной ограниченности энтропий $H(S_x)$. В настоящей работе это условие неудобно; используя те же рассуждения, можно доказать

Предложение 1. *Обозначим $\mathcal{P}$ класс конечных входных распределений $\pi = \{\pi_x\}$, удовлетворяющих условию*

$$\sum_x \pi_x f(x) \leq E, \quad (2)$$

и предположим, что $\mathcal{P}$ непуст и канал удовлетворяет условию:

$$\sup_{\pi \in \mathcal{P}} H\left(\sum_x \pi_x S_x\right) < \infty. \quad (3)$$

Тогда классическая пропускная способность канала $x \rightarrow S_x$ с ограничением (1) конечна и дается выражением

$$C = \sup_{\pi \in \mathcal{P}} \left[H\left(\sum_x \pi_x S_x\right) - \sum_x \pi_x H(S_x) \right]. \quad (4)$$

Величина в квадратных скобках часто возникает в вопросах, связанных с пропускной способностью, и обычно обозначается

$$\chi(\{\pi_x\}, \{S_x\}) = H\left(\sum_x \pi_x S_x\right) - \sum_x \pi_x H(S_x). \quad (5)$$

Используя квантовую относительную энтропию $H(\cdot; \cdot)$ (см. Приложение), можно записать эту величину в виде выражения

$$\chi(\{\pi_x\}, \{S_x\}) = \sum_x \pi_x H\left(S_x; \sum_y \pi_y S_y\right),$$

определенного однозначно и принимающего значения в диапазоне $[0, +\infty]$, даже если энтропии, входящие в формулу (5), бесконечны. Предложение 1 может быть обобщено на этот случай, см. [13].

Пусть теперь входной алфавит $\mathcal{X}$ является сепарабельным локально компактным пространством. Рассмотрим канал, задаваемый

слабо непрерывным отображением $x \rightarrow S_x$, $x \in \mathcal{X}$ (слабая непрерывность означает непрерывность всех матричных элементов $\langle \psi | S_x | \phi \rangle$, $\psi, \phi \in \mathcal{H}$). Отметим, что слабая сходимость в множестве операторов плотности эквивалентна сходимости по следовой норме [7]. Для произвольной борелевской меры π на $\mathcal{X}$ обозначим

$$\bar{S}_\pi = \int_{\mathcal{X}} S_x \pi(dx). \quad (6)$$

В силу непрерывности функции S_x интеграл определен и задает оператор плотности в $\mathcal{H}$. В предположении $H(\bar{S}_\pi) < \infty$ имеем

$$\chi(\pi) \equiv H(\bar{S}_\pi) - \int_{\mathcal{X}} H(S_x) \pi(dx) = \int_{\mathcal{X}} H(S_x; \bar{S}_\pi) \pi(dx) \geq 0, \quad (7)$$

где функции $H(S_x), H(S_x; \bar{S}_\pi)$ неотрицательны и полунепрерывны снизу [8] и потому интегралы определены. Мы предположим, что f — борелевская функция, и рассмотрим подмножество $\mathcal{P}^B$ борелевских вероятностных мер π на $\mathcal{X}$, удовлетворяющих условию

$$\int_{\mathcal{X}} f(x) \pi(dx) \leq E. \quad (8)$$

Предложение 2. Пусть функция f полунепрерывна снизу и стремится к $+\infty$ на бесконечности, и пусть существует самосопряженный оператор F , удовлетворяющий условию

$$\text{Tr} \exp(-\beta F) < \infty \quad \text{для всех } \beta > 0, \quad (9)$$

такой, что

$$f(x) \geq \text{Tr} S_x F, \quad x \in \mathcal{X}. \quad (10)$$

Тогда пропускная способность C конечна и

$$C = \max_{\pi \in \mathcal{P}^B} \chi(\pi). \quad (11)$$

Доказательство. Из условия (9) вытекает, что оператор F полуограничен снизу; для простоты предположим, что $F \geq 0$, однако общий случай сводится к этому. Тогда правая часть (10) определяется как в соотношении (14) ниже. Обозначая

$$S_\beta = [\text{Tr} \exp(-\beta F)]^{-1} \exp(-\beta F),$$

имеем

$$\beta \text{Tr} \bar{S}_\pi F - H(\bar{S}_\pi) = H(\bar{S}_\pi; S_\beta) - \ln \text{Tr} \exp(-\beta F), \quad (12)$$

откуда, используя (10), получаем

$$H(\bar{S}_\pi) \leq \beta \text{Tr} \bar{S}_\pi F + \ln \text{Tr} \exp(-\beta F) \leq \beta E + \ln \text{Tr} \exp(-\beta F).$$

Таким образом, условие (3) выполнено, C конечна и дается соотношением (4). В предположениях, что отображение $x \rightarrow S_x$ слабо непрерывно, функция f полунепрерывна снизу и выполняется условие (3), предложение 2 из работы [6] влечет

$$C = \sup_{\pi \in \mathcal{P}^B} \chi(\pi), \quad (13)$$

и мы хотим доказать, что супремум достигается.

В множестве всех борелевских вероятностных мер на $\mathcal{X}$ введем топологию слабой сходимости: последовательность $\pi^{(l)}(dx)$ сходится слабо к $\pi(dx)$, если

$$\int_{\mathcal{X}} g(x) \pi^{(l)}(dx) \rightarrow \int_{\mathcal{X}} g(x) \pi(dx)$$

для всех ограниченных непрерывных функций g на $\mathcal{X}$. Тогда множество $\mathcal{P}^B$ замкнуто, поскольку для полунепрерывной снизу функции f

$$\lim_{l \rightarrow \infty} \int_{\mathcal{X}} f(x) \pi^{(l)}(dx) \geq \int_{\mathcal{X}} f(x) \pi(dx).$$

Более того, оно равномерно плотно: для любого компакта $\mathcal{K} \subset \mathcal{X}$ имеем $\pi(\mathcal{X} \setminus \mathcal{K}) \leq E / \inf_{x \in \mathcal{X} \setminus \mathcal{K}} f(x)$ для $\pi \in \mathcal{P}^B$. Используя общий критерий относительной слабой компактности [9], получаем, что $\mathcal{P}^B$ слабо компактно.

Докажем, что функция $\chi(\pi)$ полунепрерывна сверху и, значит, достигает максимума на $\mathcal{P}^B$. Отображение $\pi \rightarrow \bar{S}_\pi$ непрерывно в слабой операторной топологии и, следовательно, в топологии следовой нормы. Рассмотрим первое слагаемое в формуле (7). Поскольку квантовая энтропия полунепрерывна снизу, функция $\pi \rightarrow H(\bar{S}_\pi)$ также полунепрерывна снизу. Покажем, что она полунепрерывна сверху и, значит, непрерывна на множестве $\mathcal{P}^B$. Согласно (12), (10), имеем

$$H(\bar{S}_\pi) \geq \limsup_{n \rightarrow \infty} H(\bar{S}_{\pi^n}) - \beta \limsup_{n \rightarrow \infty} \text{Tr} \bar{S}_{\pi^n} F \geq \limsup_{n \rightarrow \infty} H(\bar{S}_{\pi^n}) - \beta E$$

для произвольной последовательности $\{\pi^n\} \in \mathcal{P}^B$, слабо сходящейся к π . Полагая $\beta \rightarrow 0$, получаем полунепрерывность сверху.

Второе слагаемое в (7) полунепрерывно сверху как точная нижняя грань семейства непрерывных функций $\pi \rightarrow -\int g(x) \pi(dx)$, где g пробегает ограниченные непрерывные функции, удовлетворяющие условию $0 \leq g(x) \leq H(S_x)$, $x \in \mathcal{X}$. Поэтому (7) полунепрерывно сверху, и утверждение доказано.

2. Теперь рассмотрим (квантовый-квантовый или кратко q-q) канал Φ в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$, т.е. сохраняющее след линейное вполне положительное отображение операторов в $\mathcal{H}$. Дадим определение пропускной способности при аддитивном ограничении на входе

этого канала. Пусть F — самосопряженный положительный, вообще говоря, неограниченный оператор в $\mathcal{H}$, не пропорциональный единичному, представляющий наблюдаемую, среднее значение которой подлежит ограничению (например, энергию системы). Для произвольного оператора плотности S со спектральным разложением $S = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j |e_j\rangle\langle e_j|$ положим

$$\mathrm{Tr} SF := \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j \|\sqrt{F}e_j\|^2 \leq +\infty, \quad (14)$$

считая, что $\|\sqrt{F}e_j\|^2 = +\infty$, если e_j не принадлежит области определения $\sqrt{F}$. Используя спектральное разложение $F = \int_0^{\infty} x dE(x)$, где $E(x)$ — спектральная функция оператора F , мы можем записать это выражение в другой форме:

$$\mathrm{Tr} SF = \int_0^{\infty} x d\mathrm{Tr} SE(x). \quad (15)$$

Введем аналог условия (3):

$$\sup_{S: \mathrm{Tr} SF \leq E} H(\Phi[S]) < \infty, \quad (16)$$

где E — положительная постоянная.

Для канала $\Phi^{\otimes n}$ в $\mathcal{H}^{\otimes n}$ соответствующая наблюдаемая есть

$$F^{(n)} = F \otimes \cdots \otimes I + \cdots + I \otimes \cdots \otimes F.$$

Потребуем, чтобы входные состояния $S^{(n)}$ канала $\Phi^{\otimes n}$ удовлетворяли аддитивному ограничению

$$\mathrm{Tr} S^{(n)} F^{(n)} \leq nE. \quad (17)$$

Заметим, что условие (16) влечет аналогичное свойство канала $\Phi^{\otimes n}$:

$$\sup_{S^{(n)}: \mathrm{Tr} S^{(n)} F^{(n)} \leq nE} H(\Phi^{\otimes n}[S^{(n)}]) < \infty. \quad (18)$$

В самом деле, из субаддитивности квантовой энтропии по отношению к тензорным произведениям следует

$$H(\Phi^{\otimes n}[S^{(n)}]) \leq \sum_{k=1}^n H(\Phi[S_k^{(n)}]),$$

где $S_k^{(n)}$ есть k -е частичное состояние $S^{(n)}$. Также в силу вогнутости энтропии

$$\sum_{k=1}^n H(\Phi[S_k^{(n)}]) \leq nH(\Phi[\bar{S}^{(n)}]),$$

где $\bar{S}^{(n)} = n^{-1} \sum_{k=1}^n S_k^{(n)}$. Используя (15), неравенство (17) можно переписать в виде

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \text{Tr } S_k^{(n)} F = \text{Tr } \bar{S}^{(n)} F \leq E,$$

откуда следует, что

$$\sup_{S^{(n)}: \text{Tr } S^{(n)} F^{(n)} \leq nE} H(\Phi^{\otimes n}[S^{(n)}]) \leq n \sup_{S: \text{Tr } SF \leq E} H(\Phi[S]).$$

О п р е д е л е н и е. Мы называем *кодом* $(\Sigma^{(n)}, M^{(n)})$ длины n и размера N семейство $\Sigma^{(n)} = \{S_w^{(n)}; w = 1, \dots, N\}$ состояний, удовлетворяющих ограничению (17), вместе с разложением единицы $M^{(n)} = \{M_j^{(n)}; j = 0, 1, \dots, N\}$ в $\mathcal{H}^{\otimes n}$. *Вероятность ошибки* такого кода равна

$$P_e(\Sigma^{(n)}, M^{(n)}) = \max_{w=1, \dots, N} \left\{ 1 - \text{Tr } \Phi^{\otimes n}[S_w^{(n)}] M_w^{(n)} \right\},$$

а минимальная вероятность ошибки по всевозможным кодам длины n и размера N обозначается $p_e(n, N)$. *Классическая пропускная способность* $C(\Phi)$ есть точная верхняя грань скоростей передачи R , для которых $\lim_{n \rightarrow \infty} p_e(n, e^{nR}) = 0$.

Обозначим через $\mathfrak{S}^{(n)}$ множество состояний в $\mathcal{H}^{\otimes n}$, удовлетворяющих условию (17), а через $\mathcal{P}^{(n)}$ множество пар $(\pi^{(n)}, \Sigma^{(n)})$, где $\pi_w^{(n)}$ — вероятности состояний $S_w^{(n)}$, удовлетворяющих условию

$$\sum_{w=1}^N \pi_w^{(n)} \text{Tr } S_w^{(n)} F^{(n)} \leq nE. \quad (19)$$

Если задано распределение вероятностей $\pi^{(n)} = \{\pi_w^{(n)}\}$ на входных состояниях $S_w^{(n)}$, то, используя переходную вероятность $p(j|w) = \text{Tr } \Phi^{\otimes n}[S_w^{(n)}] M_j^{(n)}$ мы можем найти совместное распределение входа и выхода, вычислить шенноновскую информацию $\mathcal{I}_n(\pi^{(n)}, \Sigma^{(n)}, M^{(n)})$ и определить величину

$$\bar{C}^{(n)}(\Phi) = \sup_{(\pi^{(n)}, \Sigma^{(n)}) \in \mathcal{P}^{(n)}} \chi(\{\pi_w^{(n)}\}, \{\Phi^{\otimes n}[S_w^{(n)}]\}).$$

Если $\Sigma^{(n)} \subset \mathfrak{S}^{(n)}$, то $(\pi^{(n)}, \Sigma^{(n)}) \in \mathcal{P}^{(n)}$, и

$$\mathcal{I}_n(\pi^{(n)}, \Sigma^{(n)}, M^{(n)}) \leq \bar{C}^{(n)}(\Phi) \quad (20)$$

в силу квантовой энтропийной границы [6].

Предложение 3. Пусть канал Φ удовлетворяет условию (16). Тогда классическая пропускная способность этого канала при ограничении (17) конечна и равна

$$C(\Phi) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sup_{\pi^{(n)}, \Sigma^{(n)} \subset \mathfrak{S}^{(n)}, M^{(n)}} \mathcal{I}_n(\pi^{(n)}, \Sigma^{(n)}, M^{(n)}) \quad (21)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \bar{C}^{(n)}(\Phi). \quad (22)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Соотношение (21) вытекает из классической теоремы кодирования. Неравенство $\leq$ в (22) вытекает тогда из (20). Покажем, что

$$C(\Phi) \geq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \overline{C}^{(n)}(\Phi) \equiv \overline{C}(\Phi). \quad (23)$$

Пусть $R < \overline{C}(\Phi)$, тогда можно выбрать n_0 , распределение вероятностей $\pi^{(n_0)} = \{\pi_w^{(n_0)}\}$ и семейство состояний $\Sigma^{(n_0)} = \{S_w^{(n_0)}\}$ в $\mathcal{H}^{\otimes n_0}$ такие, что $(\pi^{(n_0)}, \Sigma^{(n_0)}) \in \mathcal{P}^{(n_0)}$ и

$$n_0 R < \chi \left(\{\pi_w^{(n_0)}\}, \{\Phi^{\otimes n_0}[S_w^{(n_0)}]\} \right). \quad (24)$$

Рассмотрим с- $\bar{q}$ канал $\tilde{\Phi}$ в $\mathcal{H}^{\otimes n_0}$, задаваемый формулой

$$\tilde{\Phi}[S] = \sum_w \Phi^{\otimes n_0}[S_w] \langle e_w | S e_w \rangle,$$

и определим функцию ограничения для этого канала как $f(w) = \text{Tr } S_w^{(n_0)} F^{(n_0)}$. Условие (18) влечет $\sup_{\pi} H(\sum_w \pi_w \Phi^{\otimes n_0}[S_w]) < \infty$, где верхняя грань берется по множеству распределений вероятностей π , удовлетворяющих неравенству

$$\sum_w \pi_w f(w) \leq n_0 E, \quad (25)$$

т.е. условию (3). Согласно предложению 1, пропускная способность канала $\tilde{\Phi}$ равна

$$C(\tilde{\Phi}) = \sup_{\pi} \chi \left(\{\pi_w\}, \{\Phi^{\otimes n_0}[S_w^{(n_0)}]\} \right),$$

где состояния фиксированы и верхняя грань берется по множеству распределений вероятностей π , удовлетворяющих (25). Согласно (24), это больше, чем $n_0 R$. Обозначая $\tilde{p}_e(n, N)$ минимальную вероятность ошибки для канала $\tilde{\Phi}$, имеем

$$p_e(nn_0, e^{(nn_0)R}) \leq \tilde{p}_e(n, e^{n(n_0 R)}), \quad (26)$$

поскольку всякий код размера N для канала $\tilde{\Phi}$ является также кодом того же размера для Φ . В самом деле, если $\tilde{w} = (w_1, \dots, w_n)$ — кодовое слово для канала $\tilde{\Phi}$, то оно удовлетворяет ограничению $f(w_1) + \dots + f(w_n) \leq nn_0 E$. Вводя состояние $S_w^{(nn_0)} = S_{w_1}^{(n_0)} \otimes \dots \otimes S_{w_n}^{(n_0)}$, мы видим, что это эквивалентно неравенству $\text{Tr } S_w^{(nn_0)} F^{(nn_0)} \leq nn_0 E$, т.е., ограничению (17) для q-q канала $\Phi^{\otimes nn_0}$. Таким образом, выбрав $R < \overline{C}(\Phi)$, мы получаем, что правая, а следовательно, и левая части неравенства (26) стремятся к нулю при $n \rightarrow \infty$. Для произвольного n' можно найти n такое, что $nn_0 \leq n' \leq (n+1)n_0$. Тогда

$$p_e(n', e^{n'R}) \leq p_e(nn_0, e^{(n+1)n_0 R}) \leq p_e(nn_0, e^{(nn_0)R'}) \rightarrow 0,$$

если R' выбрано так, что $R(1 + 1/n) \leq R' < \overline{C}(\Phi)$ для достаточно больших n . Это доказывает соотношение (23). Предложение 3 доказано.

Эти результаты поднимают вопросы, на которые пока нет ответа. Неизвестно, выполняется ли свойство аддитивности $\overline{C}^{(n)}(\Phi) = n\overline{C}^{(1)}(\Phi)$, из которого вытекало бы $C(\Phi) = \overline{C}^{(1)}(\Phi)$. Эта проблема является не менее трудной, чем до сих пор не решенная аналогичная проблема для каналов без ограничений (см. комментарии в [11]). Величина

$$\overline{C}^{(1)}(\Phi) = \sup_{\sum_i \pi_i \operatorname{Tr} S_i F \leq E} \chi(\{\pi_i\}, \{\Phi[S_i]\}) \quad (27)$$

представляется доступной для вычисления, хотя даже для простейшего квантового гауссовского канала есть лишь естественное предположение о ее значении и о решении соответствующей проблемы максимизации (см. более подробно в [5]). Этот канал описывает «квантовый сигнал на фоне классического шума» и задается в картине Гейзенберга преобразованием

$$a \rightarrow a + \xi, \quad (28)$$

где a — оператор уничтожения данной моды, а ξ — классическая комплексная гауссовская случайная величина с нулевым средним и дисперсией N (среднее число шумовых фотонов). Ограничение на входе имеет вид $\operatorname{Tr} S a^\dagger a \leq E$, где S — оператор плотности сигнала a . Имеется гипотеза, что верхняя грань в (27) реализуется непрерывным комплексным гауссовским распределением

$$\pi(d^2 z) = (\pi E)^{-1} \exp(-|z|^2 E^{-1}) d^2 z, \quad z \in \mathbb{C},$$

на когерентных состояниях $S_z = |z\rangle\langle z|$ и имеет величину

$$\overline{C}^{(1)}(\Phi) = g(N + E) - g(N),$$

где $g(x) = (x + 1) \ln(x + 1) - x \ln x$.

3. Теперь обратимся к пропускной способности с использованием сцепленного состояния. Рассмотрим следующий протокол передачи классической информации через канал Φ . Системы A и B описываются (чистым) сцепленным состоянием S_{AB} . Мы предполагаем, что количество сцепленности не ограничено, но конечно, т.е. $H(S_A) = H(S_B) < \infty$. Система A производит кодирование $i \rightarrow \mathcal{E}_i$, зависящее от классического сигнала i , с вероятностями π_i и посылает через канал системе B свою часть общего состояния. Обозначим Id_B идеальный канал, т.е. тождественное отображение, для системы B . Таким образом, B получает состояния $(\Phi \otimes \operatorname{Id}_B)[S_i]$, где $S_i = (\mathcal{E}_i \otimes \operatorname{Id}_B)[S_{AB}]$, с вероятностями π_i и старается извлечь максимальную информацию, производя измерение над полученным состоянием. Применение блочного кодирования означает,

что все это описание относится к каналу $\Phi^{\otimes n}$. Тогда сигнальные состояния $S_w^{(n)}$, передаваемые через канал $\Phi^{\otimes n} \otimes \text{Id}_B^{\otimes n}$, имеют специальный вид

$$S_w^{(n)} = (\mathcal{E}_w^{(n)} \otimes \text{Id}_B^{\otimes n})[S_{AB}^{(n)}], \quad (29)$$

где $S_{AB}^{(n)}$ — чистое сцепленное состояние для n экземпляров системы AB , удовлетворяющее условию $H(S_B^{(n)}) < \infty$, и $w \rightarrow \mathcal{E}_w^{(n)}$ — кодирования для n экземпляров системы A . Мы налагаем ограничение (17) на входные состояния канала $\Phi^{\otimes n}$, что эквивалентно аналогичному ограничению для канала $\Phi^{\otimes n} \otimes \text{Id}_B^{\otimes n}$ с операторами $F_{AB}^{(n)} = F^{(n)} \otimes I_B^{\otimes n}$. Обозначим $\mathcal{P}_{AB}^{(n)}$ совокупность пар $(\pi^{(n)}, \Sigma^{(n)})$, где $\pi^{(n)} = \{\pi_w^{(n)}\}$ — распределение вероятностей, а $\Sigma^{(n)} = \{S_w^{(n)}\}$ — множество состояний вида (29), удовлетворяющих ограничению (19) с операторами $F_{AB}^{(n)}$. Классическая пропускная способность такого протокола и называется *пропускной способностью с использованием сцепленного состояния* $C_{ea}(\Phi)$ канала Φ при ограничении (17).

Пусть S — оператор плотности, для которого энтропии $H(S)$ и $H(\Phi(S))$ конечны, тогда *квантовая взаимная информация* определяется формулой

$$I(S, \Phi) = H(S) + H(\Phi(S)) - H(S; \Phi), \quad (30)$$

где $H(S; \Phi) = H((\Phi \otimes \text{Id}_R)[|\psi\rangle\langle\psi|])$ — обменная энтропия, $|\psi\rangle\langle\psi|$ — очищение состояния S , а R — очищающая система (см., например, [5]). Можно также представить взаимную информацию как относительную энтропию

$$I(S, \Phi) = H((\Phi \otimes \text{Id}_R)[|\psi\rangle\langle\psi|]; \Phi[S] \otimes S). \quad (31)$$

Это выражение определено, даже если слагаемые в (30) бесконечны.

Если оператор ограничения F удовлетворяет условию (9), то энтропия $H(S)$ конечна для всех S , удовлетворяющих ограничению $\text{Tr } SF \leq E$. В самом деле,

$$\beta \text{Tr } SF - H(S) = H(S; S_\beta) - \ln \text{Tr } \exp(-\beta F), \quad (32)$$

откуда

$$H(S) \leq \beta E + \ln \text{Tr } \exp(-\beta F). \quad (33)$$

Предложение 4. Пусть Φ — канал, удовлетворяющий условию (16) с оператором F , удовлетворяющим условию (9). Тогда его классическая пропускная способность с использованием сцепленного состояния при ограничении (17) конечна и равна

$$C_{ea}(\Phi) = \sup_{S: \text{Tr } SF \leq E} I(S, \Phi). \quad (34)$$

Доказательство. Модифицируя доказательство предложения 2, получаем

$$C_{ea}(\Phi) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} C_{ea}^{(n)}(\Phi), \quad (35)$$

где

$$C_{ea}^{(n)}(\Phi) = \sup_{(\pi^{(n)}, \Sigma^{(n)}) \in \mathcal{P}_{AB}^{(n)}} \chi \left(\{ \pi_w^{(n)} \}, \{ (\Phi^{\otimes n} \otimes \text{Id}_B^{\otimes n}) [S_w^{(n)}] \} \right). \quad (36)$$

Заметим, что все члены в выражении χ конечны. В самом деле, в силу субаддитивности квантовой энтропии, получаем, как в работе [3]:

$$H \left(\sum_{w=1}^N \pi_w^{(n)} (\Phi^{\otimes n} \otimes \text{Id}_B^{\otimes n}) [S_w^{(n)}] \right) \leq H \left(\Phi^{\otimes n} \left[\sum_{w=1}^N \pi_w^{(n)} S_{wA}^{(n)} \right] \right) + H(S_B^{(n)}),$$

где $S_{wA}^{(n)}$ — частичное состояние $S_w^{(n)}$ в подсистеме A , что является конечным в силу предполагаемой конечности энтропии $H(S_B^{(n)})$ и условия (16).

Докажем сначала неравенство $\leq$ в (34). Как показано в [3], выражение χ в правой части (36) ограничено сверху величиной $I(\sum_{w=1}^N \pi_w^{(n)} S_{wA}^{(n)}, \Phi^{\otimes n})$. Из (35) мы получаем

$$C_{ea}(\Phi) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sup_{(\pi^{(n)}, \Sigma^{(n)}) \in \mathcal{P}_{AB}^{(n)}} I \left(\sum_{w=1}^N \pi_w^{(n)} S_{wA}^{(n)}, \Phi^{\otimes n} \right).$$

Правая часть не превосходит величины

$$\sup_{S^{(n)}: \text{Tr } S^{(n)} F^{(n)} \leq nE} I(S^{(n)}, \Phi^{\otimes n}) \equiv \bar{I}_n(\Phi).$$

Однако последовательность $\bar{I}_n(\Phi)$ аддитивна; достаточно доказать лишь, что

$$\bar{I}_n(\Phi) \leq n \bar{I}_1(\Phi). \quad (37)$$

В самом деле, в силу субаддитивности квантовой взаимной информации,

$$I(S^{(n)}, \Phi^{\otimes n}) \leq \sum_{j=1}^n I(S_j^{(n)}, \Phi),$$

где $S_j^{(n)}$ — частичные состояния, и, в силу вогнутости,

$$\sum_{j=1}^n I(S_j^{(n)}, \Phi) \leq n \sum_{j=1}^n I \left(\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n S_j^{(n)}, \Phi \right).$$

Однако неравенство $\text{Tr } S^{(n)} F^{(n)} \leq nE$ эквивалентно $\text{Tr}(n^{-1} \sum_{j=1}^n S_j^{(n)}) F \leq E$, откуда вытекает (37). Таким образом,

$$C_{ea}(\Phi) \leq \sup_{S: \text{Tr } SF \leq E} I(S, \Phi). \quad (38)$$

Теперь докажем обратное неравенство. Поскольку F не пропорционален единичному оператору, образ выпуклого множества всех операторов плотности при отображении $S \rightarrow \text{Tr } SF$ содержит интервал. Предположим сначала, что E не является минимальным собственным значением оператора F . Тогда найдутся вещественное число E' и оператор плотности S в $\mathcal{H}_A$ такие, что $\text{Tr } SF \leq E' < E$. Рассмотрим спектральное разложение $S = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j |e_j\rangle\langle e_j|$ и обозначим $S_d = \sum_{j=1}^d \tilde{\lambda}_j |e_j\rangle\langle e_j|$, где $\tilde{\lambda}_j = (\sum_{k=1}^d \lambda_k)^{-1} \lambda_j$ — собственные значения оператора плотности S_d . Тогда $\|S - S_d\|_1 \rightarrow 0$ при $d \rightarrow \infty$, где $\|\cdot\|_1$ — следовая норма. Положим $f(j) = \|\sqrt{F}e_j\|^2$, тогда

$$\text{Tr } S_d F = \sum_{j=1}^d \tilde{\lambda}_j f(j) = E' + \varepsilon_d,$$

где $\varepsilon_d \rightarrow 0$ при $d \rightarrow \infty$.

Рассмотрим теперь *сильно типичный проектор* $P^{n,\delta}$ оператора плотности $S_d^{\otimes n}$, который определяется следующим образом. Собственные значения и собственные векторы оператора $S_d^{\otimes n}$ суть $\tilde{\lambda}_J = \tilde{\lambda}_{j_1} \cdots \tilde{\lambda}_{j_n}$, $|e_J\rangle = |e_{j_1}\rangle \otimes \cdots \otimes |e_{j_n}\rangle$, где $J = (j_1, \dots, j_n)$. Фиксируем малое положительное δ . Последовательность J называется *сильно типичной* [10], если числа $N(j|J)$ появления символов j в J удовлетворяют условию

$$\left| \frac{N(j|J)}{n} - \tilde{\lambda}_j \right| < \delta, \quad j = 1, \dots, d,$$

и $N(j|J) = 0$, если $\tilde{\lambda}_j = 0$. Обозначим совокупность всех сильно типичных последовательностей через $B^{n,\delta}$, и пусть $\mathbf{P}^n$ — распределение вероятностей, задаваемое собственными значениями $\tilde{\lambda}_J$. Согласно закону больших чисел, $\mathbf{P}^n(B^{n,\delta}) \rightarrow 1$ при $n \rightarrow \infty$. Для произвольной функции $g(j)$, $j = 1, \dots, d$, и последовательности $J = (j_1, \dots, j_n) \in B^{n,\delta}$ выполняется

$$\left| \frac{g(j_1) + \cdots + g(j_n)}{n} - \sum_{j=1}^d \tilde{\lambda}_j g(j) \right| < \delta \max \{g(j); j = 1, \dots, d\}. \quad (39)$$

Сильно типичный проектор оператора плотности $S_d^{\otimes n}$ определяется как $P^{n,\delta} = \sum_{J \in B^{n,\delta}} |e_J\rangle\langle e_J|$. Обозначим $d_{n,\delta} = \dim P^{n,\delta}$, $\bar{S}_d^{n,\delta} = P^{n,\delta}/d_{n,\delta}$. Благодаря сильной типичности,

$$\begin{aligned} & \left| \text{Tr} \left(\bar{S}_d^{n,\delta} - S_d^{\otimes n} \right) F^{(n)} \right| \\ &= \left| n \text{Tr} \frac{(F \otimes I \otimes \cdots \otimes I + \cdots + I \otimes \cdots \otimes I \otimes F)}{n} (\bar{S}_d^{n,\delta} - S_d^{\otimes n}) \right| \\ &= \frac{n}{d_{n,\delta}} \left| \sum_{J \in B^{n,\delta}} \left[\frac{f(j_1) + \cdots + f(j_n)}{n} - \sum_{j=1}^d \tilde{\lambda}_j f(j) \right] \right| \\ &\leq n\delta \max \{f(j); j = 1, \dots, d\}, \end{aligned}$$

откуда

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr} \bar{S}_d^{n,\delta} F^{(n)} &\leq \mathrm{Tr} S_d^{\otimes n} F^{(n)} + n\delta \max \{f(j); j = 1, \dots, d\} \\ &= n(E' + \varepsilon_d + \delta \max \{f(j); j = 1, \dots, d\}).\end{aligned}$$

Для любого достаточно большого d можно найти δ_0 такое, что правая часть будет меньше или равна nE при $\delta \leq \delta_0$. Тогда, используя выражение (36) и конкретный протокол кодирования, описываемый ниже, мы сможем доказать, что

$$C_{ea}^{(n)}(\Phi) \geq I(\bar{S}_d^{n,\delta}, \Phi^{\otimes n}). \quad (40)$$

В самом деле, пусть

$$|\psi_{AB}\rangle = \frac{1}{\sqrt{d_{n,\delta}}} \sum_{j \in B^{n,\delta}} |e_j\rangle \otimes |e_j\rangle.$$

Как показано в [2], [3], существует система унитарных операторов $W_{\alpha\beta}$; $\alpha, \beta = 1, \dots, d_{n,\delta}$, в $\mathcal{H}_A$ такая, что $(W_{\alpha\beta} \otimes I_B)|\psi_{AB}\rangle$ является ортонормированной системой в $\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$; более того,

$$\sum_{\alpha, \beta=1}^{d_{n,\delta}} (W_{\alpha\beta} \otimes I_B) |\psi_{AB}\rangle \langle \psi_{AB}| (W_{\alpha\beta} \otimes I_B)^* = P^{n,\delta} \otimes P^{n,\delta}. \quad (41)$$

Пусть передается классический сигнал $w = (\alpha, \beta)$ с равными вероятностями $\pi_w = 1/d_{n,\delta}^2$, сцепленное состояние выбрано как $S_{AB} = |\psi_{AB}\rangle \langle \psi_{AB}|$ и кодирование — как $\mathcal{E}_A^w[S] = W_{\alpha\beta} S W_{\alpha\beta}^*$. Такой выбор удовлетворяет ограничению на входе, поскольку (41) влечет

$$\sum_w \pi_w \mathcal{E}_A^w[S_{AB}] = \bar{S}_d^{n,\delta} \otimes \bar{S}_d^{n,\delta}. \quad (42)$$

Таким образом, для этого конкретного протокола условие $(\pi^{(n)}, \Sigma^{(n)}) \in \mathcal{P}_{AB}^{(n)}$ в (36) эквивалентно тому, что $\mathrm{Tr} \bar{S}_d^{n,\delta} F^{(n)} \leq nE$. Тогда мы получаем

$$\begin{aligned}C_{ea}^{(n)}(\Phi) &\geq H\left(\frac{1}{(d^{n,\delta})^2} \sum_{\alpha, \beta} \left(\Phi^{\otimes n} \otimes \mathrm{Id}_B^{\otimes n}\right) [S_{AB}^{\alpha\beta}]\right) \\ &\quad - \frac{1}{(d^{n,\delta})^2} \sum_{\alpha, \beta} H\left(\left(\Phi^{\otimes n} \otimes \mathrm{Id}_B^{\otimes n}\right) [S_{AB}^{\alpha\beta}]\right),\end{aligned}$$

где $S_{AB}^{\alpha\beta} = (W_{\alpha\beta} \otimes I_B) |\psi_{AB}\rangle \langle \psi_{AB}| (W_{\alpha\beta} \otimes I_B)^*$. Согласно (42), первое слагаемое в правой части равно $H((\Phi \otimes \mathrm{Id}_B)[\bar{S}_d^{n,\delta} \otimes \bar{S}_d^{n,\delta}]) = H(\bar{S}_d^{n,\delta}) + H(\Phi[\bar{S}_d^{n,\delta}])$. Поскольку $S_{AB}^{\alpha\beta}$ является очищением состояния $\bar{S}_d^{n,\delta}$ в $\mathcal{H}_B$,

энтропии во втором слагаемом равны $H(\bar{S}_d^{n,\delta}, \Phi)$. В силу выражения для квантовой взаимной информации (30), отсюда следует (40).

Переходя к пределу $n \rightarrow \infty, \delta \rightarrow 0$ и используя предельное соотношение из [3], мы получаем

$$C_{ea}(\Phi) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} C_{ea}^{(n)}(\Phi) \geq I(S_d, \Phi),$$

где $\text{Tr } S_d F = E' + \varepsilon_d \leq E$. Наконец, переходя к пределу $d \rightarrow \infty$, мы докажем, что

$$\liminf_{d \rightarrow \infty} I(S_d, \Phi) \geq I(S, \Phi). \quad (43)$$

Чтобы это показать, представим взаимную информацию как квантовую относительную энтропию (31), где $|\psi\rangle\langle\psi|$ — очищение состояния S , R — очищающая система, и аналогично для $I(S_d, \Phi)$. Если $|\psi\rangle = \sum_{j=1}^{\infty} \sqrt{\lambda_j} |e_j\rangle \otimes |e_j\rangle$, то

$$|\psi_d\rangle = \sum_{j=1}^d \sqrt{\tilde{\lambda}_j} |e_j\rangle \otimes |e_j\rangle$$

является очищением состояния S_d . Имеем $\| |\psi\rangle - |\psi_d\rangle \| \rightarrow 0$, и поэтому

$$\left\| |\psi\rangle\langle\psi| - |\psi_d\rangle\langle\psi_d| \right\|_1 \rightarrow 0 \quad \text{при } d \rightarrow \infty,$$

следовательно, (43) вытекает из полунепрерывности снизу относительной энтропии [8]. Таким образом, мы получаем

$$C_{ea}(\Phi) \geq I(S, \Phi),$$

где S — произвольный оператор плотности, удовлетворяющий условию $\text{Tr } SF < E$. Это легко распространяется на операторы с $\text{Tr } SF = E$ путем аппроксимации их операторами $S_\epsilon = (1-\epsilon)S + \epsilon|e\rangle\langle e|$, где вектор e выбран так, что $\langle e|F|e\rangle < E$.

В случае, когда E — минимальное собственное значение оператора F , условие $\text{Tr } SF \leq E$ сводится к тому, что носитель S содержится в спектральном проекторе оператора F , отвечающем этому минимальному значению. Из условия (9) вытекает, что спектр оператора F состоит из собственных значений конечной кратности. Поэтому носитель S конечномерен, и мы можем считать $S_d = S$. Тогда мы можем повторить рассуждения с сохранением равенства $\text{Tr } SF = E$ на каждом шаге. Итак, мы установили соотношение

$$C_{ea}(\Phi) \geq \sup_{S: \text{Tr } SF \leq E} I(S, \Phi)$$

и, значит, доказали равенство в (34). Предложение 4 доказано.

Теперь мы исследуем вопрос — когда достигается верхняя грань в правой части соотношения (34). Заметим, что условия следующей леммы выполняются для любого оператора, удовлетворяющего условию (9).

Лемма. Пусть спектр оператора F состоит из собственных значений f_n конечной кратности и $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = +\infty$, тогда множество операторов плотности $\mathfrak{S}_E := \{S: \text{Tr } SF \leq E\}$ компактно.

Доказательство. Напомним, что, согласно [7], слабая сходимость в множестве операторов плотности равносильна сходимости по следовой норме. Множество $\mathfrak{S}_E$ замкнуто, поскольку для любой последовательности $\{S_n\} \subset \mathfrak{S}_E$, сходящейся к оператору плотности S , имеем $\lim_{n \rightarrow \infty} \text{Tr } S_n F \geq \text{Tr } SF$.

Не ограничивая общности, можно предположить, что последовательность f_n монотонно возрастает. Обозначим P_n конечномерный проектор на собственное подпространство, отвечающее первым n собственным значениям, тогда $P_n \uparrow I$. Согласно общему критерию (некоммутативный аналог критерия из [9]), подмножество $\mathfrak{S}'$ операторов плотности относительно слабо компактно тогда и только тогда, когда для любого $\varepsilon > 0$ найдется конечномерный проектор P такой, что $\text{Tr } S(I - P) \leq \varepsilon$ для всех $S \in \mathfrak{S}'$, см. п. III.9 в [12].

Поскольку $f_{n+1}(I - P_n) \leq F$, имеем $\text{Tr } S(I - P_n) \leq f_{n+1}^{-1} \text{Tr } SF \leq f_{n+1}^{-1} E$ при $S \in \mathfrak{S}_E$, откуда и следует утверждение леммы.

Рассмотрим теперь условия, при которых взаимная информация полунепрерывна сверху и, значит, достигает точной верхней грани на компакте $\mathfrak{S}_E$.

Предложение 5. Пусть оператор F удовлетворяет условию (9) и найдется самосопряженный оператор $\tilde{F}$, удовлетворяющий (9) и такой, что $\Phi^*[\tilde{F}] \leq F$, где Φ^* — сопряженный канал. Тогда

$$C_{ea}(\Phi) = \max_{S: \text{Tr } SF \leq E} I(S, \Phi). \quad (44)$$

Доказательство. Займемся отдельно каждым слагаемым в формуле (30). Напомним, что квантовая энтропия полунепрерывна снизу. Поскольку обменная энтропия может быть представлена в виде $H(S; \Phi) = H(\Phi_E[S])$, где Φ_E — канал из пространства системы $\mathcal{H}_A$ в пространство окружения $\mathcal{H}_E$ [2], [5], она также полунепрерывна снизу, и поэтому последний член в выражении (30) полунепрерывен сверху. Относительно первого слагаемого известно [8], что оно полунепрерывно сверху (и, следовательно, непрерывно) на множестве $\mathfrak{S}_E = \{S: \text{Tr } SF \leq E\}$, если оператор F удовлетворяет условию (9). Доказательство полунепрерывности сверху проходит следующим образом: имеем

$$\beta \text{Tr } S_n F - H(S_n) = H(S_n; S_\beta) - \ln \text{Tr } \exp(-\beta F), \quad (45)$$

и аналогично для S вместо S_n . Используя полунепрерывность снизу относительной энтропии, получаем

$$H(S) \geq \limsup_{n \rightarrow \infty} H(S_n) - \beta \limsup_{n \rightarrow \infty} \text{Tr } S_n F.$$

Для $S_n \in \mathfrak{S}_E$ последний член $\geq -\beta E$, что может быть сделано сколь угодно малым.

Мы можем применить аналогичное рассуждение ко второму слагаемому в (30) в предположении, что существует самосопряженный оператор $\tilde{F}$, удовлетворяющий условию (9) и такой, что $\Phi^*[F] \leq F$; соотношение (45) тогда заменяется на

$$\beta \text{Tr } S_n F - H(\Phi[S_n]) \geq H(\Phi[S_n]; \tilde{S}_\beta) - \ln \text{Tr } \exp(-\beta \tilde{F}), \quad (46)$$

где $\tilde{S}_\beta = [\text{Tr } \exp(-\beta \tilde{F})]^{-1} \exp(-\beta \tilde{F})$, и доказательство проходит аналогичным образом. Более того, это предположение влечет также выполнение условия (16). В самом деле, обозначая $\Phi[S] = S'$ и используя (33), имеем

$$\sup_{S: \text{Tr } SF \leq E} H(\Phi[S]) \leq \sup_{S': \text{Tr } S' \tilde{F} \leq E} H(S') \leq \theta E + \ln \text{Tr } \exp(-\theta \tilde{F}).$$

Предложение 5 доказано.

Такой набор условий, гарантирующий достижимость супремума в (34), выполняется, например, в случае, когда Φ — бозонный гауссовский канал, а F — положительный квадратичный многочлен от канонических наблюдаемых, например, оператор энергии. Выигрыш от использования сцепленности $G = C_{ea}(\Phi)/\bar{C}^{(1)}(\Phi)$ был подсчитан в [5]. В частности, для канала (28), когда среднее число фотонов сигнала E стремится к нулю, а $N > 0$,

$$\bar{C}^{(1)}(\Phi) \sim E \ln \left(\frac{N+1}{N} \right), \quad C_{ea}(\Phi) \sim -E \ln E / (N+1),$$

и G стремится к бесконечности, как $-\ln E$.

В этой работе нас интересовал случай, когда все энтропии, входящие в выражение для пропускной способности, конечны, что обеспечивалось условиями (16), (9). Путем надлежащей аппроксимации можно получить в общем случае выражение для $C_{ea}(\Phi)$, даваемое формулой (34), где $I(S, \Phi)$ определяется, как в (31).

Приложение. Оператором плотности S в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ называется положительный оператор с единичным следом. Будучи компактным оператором, S допускает спектральное разложение вида

$$S = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j |e_j\rangle \langle e_j|,$$

где λ_j — собственные значения, образующие распределение вероятностей, а e_j — ортонормированные собственные векторы. Энтропия S определяется выражением $H(S) = -\sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j \ln \lambda_j$ и равна $-\text{Tr } S \ln S$, если след конечен.

Для двух операторов плотности S, S' квантовая относительная энтропия определяется соотношением

$$H(S; S') = \sum_{j,k=1}^{\infty} |\langle e'_k | e_j \rangle|^2 \lambda_j (\ln \lambda_j - \ln \lambda'_k),$$

где λ'_k, e'_k — собственные значения и собственные векторы оператора S' . Это выражение определено корректно и принимает значения в $[0, \infty]$ в силу неравенства $\lambda(\ln \lambda - \ln \mu) \geq \lambda - \mu$ при $\lambda, \mu \geq 0$. В случае конечности следа $H(S; S') = \text{Tr } S(\ln S - \ln S')$. Как энтропия, так и относительная энтропия — полунепрерывные снизу функции от S, S' относительно следовой нормы $\|T\|_1 = \text{Tr } |T|$ [8].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Bennett C. H., Shor P. W., Smolin J. A., Thapliyal A. V. Entanglement-assisted classical capacity of noisy quantum channel. — Phys. Rev. Lett., 1999, v. 83, p. 3081–3084; LANL Report quant-ph/9904023.
2. Bennett C. H., Shor P. W., Smolin J. A., Thapliyal A. V. Entanglement-assisted capacity and the reverse Shannon theorem. — LANL Report quant-ph/0106052.
3. Holevo A. S. On entanglement-assisted classical capacity. — J. Math. Phys., 2002, v. 43, p. 4326–4333; LANL Report quant-ph/0106075.
4. Холево А. С. Введение в квантовую теорию информации. М.: МЦНМО, 2002, 126 с.
5. Holevo A. S., Werner R. F. Evaluating capacities of Bosonic Gaussian channels. — Phys. Rev. A, 2000, v. 63, art. 032313; LANL Report quant-ph/9912067.
6. Холево А. С. Квантовые теоремы кодирования. — Успехи матем. наук, 1998, т. 53, № 6, с. 193–230; LANL Report quant-ph/9808023.
7. Dell'Antonio G. F. On the limits of sequences of normal states. — Comm. Pure Appl. Math., 1967, v. 20, p. 413–430.
8. Wehrl A. General properties of entropy. — Rev. Modern. Phys., 1978, v. 50, p. 221–260.
9. Прохоров Ю. В. Случайные процессы и предельные теоремы теории вероятностей. — Теория вероятн. и ее примен., 1956, т. 1, в. 2, с. 177–235.
10. Чисар И., Кёрнер Я. Теория информации. Теоремы кодирования для дискретных систем без памяти. М.: Мир, 1985, 397 с.
11. Matsumoto K., Shimono T., Winter A. Remarks on additivity of the Holevo capacity and of the entanglement of formation. — LANL Report quant-ph/0206148.
12. Сарымсаков Т. А. Введение в квантовую теорию вероятностей. Ташкент: Фан, 1985, 184 с.
13. Hayashi M., Nagaoka H. General formulas for capacity of classical-quantum channels. — LANL Report quant-ph/0206186.

Поступила в редакцию
26.XI.2002