Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. В. Сенатов, Об асимптотических разложениях в центральной предельной теореме с явными оценками остаточных членов, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2006, том 51, выпуск 4, 810–816

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp29>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.5.30

26 апреля 2023 г., 14:28:54

© 2006 г.

СЕНАТОВ В. В.*

ОБ АСИМПТОТИЧЕСКИХ РАЗЛОЖЕНИЯХ В ЦЕНТРАЛЬНОЙ ПРЕДЕЛЬНОЙ ТЕОРЕМЕ С ЯВНЫМИ ОЦЕНКАМИ ОСТАТОЧНЫХ ЧЛЕНОВ¹⁾

В статье приводятся явные оценки точности, которые гарантируют асимптотические разложения в центральной предельной теореме.

Ключевые слова и фразы: центральная предельная теорема, асимптотические разложения, точность аппроксимации.

Основная цель данной работы — продемонстрировать некоторые асимптотические разложения в центральной предельной теореме (ЦПТ) с явными оценками точности, которую они гарантируют.

Пусть $X_1, X_2, \dots$ — независимые одинаково распределенные случайные величины с нулевым средним и единичной дисперсией. Обозначим F их общую функцию распределения, f — соответствующую характеристическую функцию, Φ — функцию распределения стандартного нормального закона и $\varphi(x) = (2\pi)^{-1/2}e^{-x^2/2}$ — ее плотность. Будем считать, что для некоторого целого числа m абсолютный момент $\beta_{m+2} = \mathbf{E}|X_1|^{m+2}$ конечен. Мы приведем примеры асимптотических разложений распределений нормированных сумм $(X_1 + \dots + X_n)/\sqrt{n}$ как для гладких, так и для решетчатых функций распределения F исходных случайных величин $X_1, X_2, \dots$, при этом гладкими мы будем называть распределения F такие, что для некоторого числа $\nu > 0$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^{\nu} dt < \infty. \quad (1)$$

Результаты, сформулированные ниже, дают асимптотические разложения в ЦПТ для плотностей гладких распределений и для функций распределения решетчатых распределений. Результаты, относящиеся к асимптотическим разложениям для функций распределения гладких распределений и к асимптотическим разложениям в локальной ЦПТ для решетчатых распределений, легко получаются из формул, дающих асимптотические разложения для плотностей гладких распределений, и здесь мы их не приводим.

Обозначим F_n функцию распределения нормированной суммы $(X_1 + \dots + X_n)/\sqrt{n}$,

$$F_n(x) = \mathbf{P} \left\{ \frac{X_1 + \dots + X_n}{\sqrt{n}} < x \right\}.$$

Выполнение условия (1) гарантирует существование непрерывной плотности p_n функции распределения F_n при $n \geq \nu$.

Для формулировки результатов нам понадобятся числа

$$\theta_k = \int_{-\infty}^{\infty} H_k(x) dF(x), \quad k = 0, 1, \dots, m+1,$$

где $H_k(x) = (-1)^k (e^{-x^2/2})^{(k)} e^{x^2/2}$ — многочлены Чебышёва-Эрмита. Нетрудно показать, что

$$\frac{\theta_k}{k!} = \sum_{j=0}^{[k/2]} \frac{\alpha_{k-2j}}{(k-2j)!} \frac{(-1)^j}{2^j j!}, \quad (2)$$

* Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, механико-математический факультет, кафедра теории вероятностей, Ленинские горы, 119992 Москва, Россия; e-mail: semenova@greatbook.ru

¹⁾ Работа выполнена при поддержке РФФИ (гранты 02-01-00600, 05-01-00583).

где $\alpha_l = \mathbf{E}X_1^l$, $l = 0, 1, \dots, m+1$, — (степенные) моменты функции распределения F . Числа θ_k мы будем называть моментами Чебышёва–Эрмита функции распределения F . Отметим, что $\theta_0 = 1$ для любой функции распределения, для распределений с нулевым средним и единичной дисперсией $\theta_1 = \theta_2 = 0$, величина $\theta_3 = \alpha_3$ совпадает с асимметрией, а $\theta_4 = \alpha_4 - 3$ совпадает с эксцессом функции распределения F .

Нам понадобятся также числа $\|\theta_{m+2}\|$, которые получаются по формуле (2) при $k = m+2$, но для четных m в (2) следует снять множители $(-1)^j$, а для нечетных m в (2) следует заменить α_{k-2j} для $j \geq 1$ на их абсолютные значения, снять множители $(-1)^j$ и вместо α_{m+2} использовать β_{m+2} . Через $\|\theta_{m+3}^{(m+1)}\|$ мы будем обозначать числа, которые получаются по формуле (2) при $k = m+3$, в которой следует заменить α_{k-2j} , $j \geq 1$, на их абсолютные значения, снять множители $(-1)^j$, а слагаемое, формально связанное с моментом α_{m+3} , — опустить.

Помимо только что определенных величин нам понадобятся числа $B_{k,n}$ и $B_{k,n-1}$, $k = 4, 5, \dots$:

$$B_{k,n} = \frac{1}{2\pi} \int_{-T\sqrt{n}}^{T\sqrt{n}} |t|^k \mu^n \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right) dt, \quad B_{k,n-1} = \frac{1}{2\pi} \int_{-T\sqrt{n}}^{T\sqrt{n}} |t|^k \mu^{n-1} \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right) dt,$$

где функция $\mu(t) \geq e^{-t^2/2}$ и число $T > 0$ таковы, что

$$|f(t)| \leq \mu(t) \quad \text{при} \quad |t| \leq T. \quad (3)$$

Такая пара (μ, T) для заданной характеристической функции f существует всегда, и при достаточно широких условиях на функцию распределения F функцию μ и число T можно выбрать так, что

$$B_{k,n} \rightarrow B_k \quad \text{и} \quad B_{k,n-1} \rightarrow B_k \quad \text{при} \quad n \rightarrow \infty, \quad k = 4, 5, \dots,$$

где B_k — абсолютный момент k -го порядка стандартного нормального закона, деленный на $\sqrt{2\pi}$. Например, для распределений с $\alpha_3 = 0$ и $\theta_4 < 3$ в качестве функции $\mu(t)$ можно взять $(1 + t^2/2)^{-1}$ и в качестве числа T можно взять $\sqrt{2 \min(1, (3 - \theta_4)/(3 + \theta_4))}$. При этом, в частности, для нечетных k , $k < 2n - 1$,

$$B_{k,n} \leq B_k \left[\left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{k+1}{2n}\right) \right]^{-1}.$$

Наконец отметим, что при выполнении условия (1) величина

$$\alpha(T) = \max\{|f(t)| : t \geq T\}$$

строго меньше 1 для любого $T > 0$. В теоремах 2 и 3 нам понадобится величина $\beta(T)$, которая определяется аналогично величине $\alpha(T)$:

$$\beta(T) = \max \left\{ e^{-t^2/2} \left| 1 + \frac{\theta_4}{4!} t^4 \right| : t \geq T \right\},$$

и которая также строго меньше 1, если, скажем, $\theta_4 \leq 6$. В этих же теоремах мы будем предполагать, что пара (μ, T) такова, что

$$e^{-t^2/2} \left| 1 + \frac{\theta_4}{4!} t^4 \right| \leq \mu(t) \quad \text{при} \quad |t| \leq T. \quad (4)$$

В приведенном выше примере пары (μ, T) выполнение этого условия следует из выполнения условия (3).

Теорема 1. Пусть четвертый момент функции распределения F конечен, выполнено условие (1) и для некоторой пары (μ, T) выполнено условие (3). Тогда для любого $n \geq \max(\nu, 2)$ и всех действительных x

$$p_n(x) = \varphi(x) + \frac{\theta_3}{3!} \frac{1}{\sqrt{n}} H_3(x) \varphi(x) + R,$$

где

$$|R| \leq \left(\frac{\beta_4}{4!} + \frac{1}{8} \right) \frac{B_{4,n-1}}{n} + \frac{1}{2} \left(\frac{\theta_3}{3!} \right)^2 \frac{B_6}{n} + \frac{\|\theta_5^{(3)}\|}{5!} \frac{B_{5,n-1}}{n^{3/2}} + \frac{1}{2} \left(\frac{\theta_3}{3!} \right)^2 \frac{B_{6,n}}{n^2} + \frac{\sqrt{n}}{\pi} \alpha^{n-\nu}(T) \int_T^\infty |f(t)|^\nu dt + \frac{1}{\pi T \sqrt{n}} e^{-T^2 n/2}.$$

Теорема 2. Пусть пятый момент функции распределения F конечен, величина $\theta_4 < 6$ и для некоторой пары (μ, T) выполнены условия (3) и (4). Тогда для $n \geq \max(\nu, 2)$ таких, что

$$\rho = \frac{|\theta_4|}{6} + \frac{|\theta_4|}{4!n} < 1,$$

и всех действительных x

$$p_n(x) = \varphi(x) + \frac{\theta_3}{3!} \frac{1}{\sqrt{n}} H_3(x) \varphi(x) + \frac{\theta_4}{4!} \frac{1}{n} H_4(x) \varphi(x) + \frac{1}{2} \left(\frac{\theta_3}{3!} \right)^2 \frac{1}{n} H_6(x) \varphi(x) + R,$$

где

$$|R| \leq \frac{\|\theta_5\|}{5!} \frac{B_{5,n-1}}{n^{3/2}} + \frac{n+1}{n} \frac{|\theta_3|}{3!} \frac{|\theta_4|}{4!} \frac{B_{7,n}}{n^{3/2}} + \frac{1}{3!} \left| \frac{\theta_3}{3!} \right|^3 \frac{B_9}{n^{3/2}} + \frac{\|\theta_6^{(4)}\|}{6!} \frac{B_{6,n-1}}{n^2} + \frac{1}{2} \left(\frac{\theta_3}{3!} \right)^2 \frac{B_{6,n}}{n^2} + \frac{1}{1-\rho} \frac{1}{2} \left(\frac{\theta_4}{4!} \right)^2 \frac{B_8}{n^2} + \frac{\sqrt{n}}{\pi} \alpha^{n-\nu}(T) \int_T^\infty |f(t)|^\nu dt + \frac{\sqrt{n}}{\pi} \beta^{n-1}(T) \int_T^\infty e^{-t^2/2} \left| 1 + \frac{\theta_4}{4!} t^4 \right| dt.$$

В этой теореме условия, связанные с величиной θ_4 , можно снять, при этом оценка остаточной части разложения станет несколько более громоздкой.

Теорема 3. Пусть шестой момент функции распределения F конечен и выполнены все условия теоремы 2. Тогда для тех же n , что и в теореме 2, и всех действительных x

$$p_n(x) = \varphi(x) + \frac{\theta_3}{3!} \frac{1}{\sqrt{n}} H_3(x) \varphi(x) + \frac{\theta_4}{4!} \frac{1}{n} H_4(x) \varphi(x) + \frac{1}{2} \left(\frac{\theta_3}{3!} \right)^2 \frac{1}{n} H_6(x) \varphi(x) + \frac{\theta_5}{5!} \frac{1}{n^{3/2}} H_5(x) \varphi(x) + \frac{\theta_3}{3!} \frac{\theta_4}{4!} \frac{1}{n^{3/2}} H_7(x) \varphi(x) + \frac{1}{3!} \left(\frac{\theta_3}{3!} \right)^3 \frac{1}{n^{3/2}} H_9(x) \varphi(x) + R,$$

где

$$|R| \leq \frac{\|\theta_6\|}{6!} \frac{B_{6,n-1}}{n^2} + \frac{1}{2} \left(\frac{\theta_3}{3!} \right)^2 \frac{B_{6,n}}{n^2} + \frac{|\theta_3|}{3!} \frac{|\theta_5|}{5!} \frac{B_8}{n^2} + \frac{1}{1-\rho} \frac{1}{2} \left(\frac{\theta_4}{4!} \right)^2 \frac{B_8}{n^2} + \frac{1}{2} \left(\frac{\theta_3}{3!} \right)^2 \frac{|\theta_4|}{4!} \frac{B_{10}}{n^2} + \frac{1}{4!} \left(\frac{\theta_3}{3!} \right)^4 \frac{B_{12}}{n^2} + \frac{\|\theta_7^{(5)}\|}{7!} \frac{B_{7,n-1}}{n^{5/2}} + \frac{|\theta_3|}{3!} \frac{|\theta_4|}{4!} \frac{B_{7,n}}{n^{5/2}} + \frac{n+1}{n} \frac{|\theta_4|}{4!} \frac{|\theta_5|}{5!} \frac{B_{9,n}}{n^{5/2}} + \frac{|\theta_3|}{3!} \frac{|\theta_5|}{5!} \frac{B_{8,n}}{n^3} + \frac{n+1}{2n} \left(\frac{\theta_5}{5!} \right)^2 \frac{B_{10,n}}{n^3} + \frac{\sqrt{n}}{\pi} \alpha^{n-\nu}(T) \int_T^\infty |\rho(t)|^\nu dt + \frac{\sqrt{n}}{\pi} \beta^{n-1}(T) \int_T^\infty e^{-t^2/2} \left| 1 + \frac{\theta_4}{4!} t^4 \right| dt.$$

Суммы величин, участвующих в правых частях разложений в теоремах 1–3, за исключением величин R , мы будем называть главными частями асимптотических разложений, а величины R — остаточными частями разложений.

Разложения, приведенные в теоремах 1–3, мы будем называть разложениями Эджворта–Крамера, поскольку все слагаемые в главных частях этих разложений при росте n убывают медленнее остаточных частей разложений, которые стремятся к нулю как $1/n^{m/2}$, $m = 2, 3$ и 4 в теоремах 1, 2 и 3 соответственно, и в главных

частях разложений используется информация лишь о моментах исходного распределения, порядки которых не превосходят $m + 1$.

Обратим внимание на то, что в оценках остаточных частей разложений, приведенных в теоремах 1–3, несколько слагаемых убывает при росте n как $1/n^{m/2}$. Для разложений Эджворта–Крамера это связано с существом дела, но можно предложить асимптотические разложения, в оценках остаточных частей которых лишь одно слагаемое убывает при росте n как $1/n^{m/2}$.

Такие модификации разложений Эджворта–Крамера мы будем называть уточненными разложениями Эджворта–Крамера. Пример такого разложения дает следующая теорема.

Теорема 4. При выполнении условий теоремы 2 для тех же n , что и в теореме 2, и всех действительных x

$$\begin{aligned} p_n(x) = & \varphi(x) + \frac{\theta_3}{3!} \frac{1}{\sqrt{n}} H_3(x) \varphi(x) + \frac{\theta_4}{4!} \frac{1}{n} H_4(x) \varphi(x) \\ & + \frac{1}{2} \left(\frac{\theta_3}{3!} \right)^2 \frac{1}{n} H_6(x) \varphi(x) + \frac{\theta_3}{3!} \frac{\theta_4}{4!} \frac{1}{n^{3/2}} H_7(x) \varphi(x) \\ & + \frac{1}{3!} \left(\frac{\theta_3}{3!} \right)^3 \frac{1}{n^{3/2}} H_9(x) \varphi(x) + R, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} |R| \leq & \frac{\|\theta_5\|}{5!} \frac{B_{5,n-1}}{n^{3/2}} + \frac{\|\theta_6^{(4)}\|}{6!} \frac{B_{6,n-1}}{n^2} + \frac{1}{2} \left(\frac{\theta_3}{3!} \right)^2 \frac{B_{6,n}}{n^2} + \frac{1}{1-\rho} \frac{1}{2} \left(\frac{\theta_4}{4!} \right)^2 \frac{B_8}{n^2} \\ & + \frac{1}{2} \left(\frac{\theta_3}{3!} \right)^2 \frac{|\theta_4|}{4!} \frac{B_{10}}{n^2} + \frac{1}{4!} \left(\frac{\theta_3}{3!} \right)^4 \frac{B_{12}}{n^2} + \frac{|\theta_3|}{3!} \frac{|\theta_4|}{4!} \frac{B_{7,n}}{n^{5/2}} \\ & + \frac{\sqrt{n}}{\pi} \alpha^{n-\nu}(T) \int_T^\infty |f(t)|^\nu dt + \frac{\sqrt{n}}{\pi} \beta^{n-1}(T) \int_T^\infty e^{-t^2/2} \left| 1 + \frac{\theta_4}{4!} t^4 \right| dt. \end{aligned}$$

Разложения Эджворта–Крамера, продемонстрированные в теоремах 1–3 (при условии, что момент β_{m+2} , $m = 2, 3$, и 4, конечен), можно получать и при больших значениях m . При этом оказывается, что остаточные части разложений убывают при росте n как $1/n^{m/2}$, а в главные части этих разложений необходимо включать функции $H_l \varphi$ с $l = 3, 4, \dots, 3m - 3$, $l \neq 3m - 4$, с некоторыми коэффициентами, зависящими от распределения исходных случайных величин $X_1, X_2, \dots$ и от числа слагаемых в нормированных суммах этих величин. Для каждого фиксированного $l > 5$ коэффициенты при $H_l \varphi$ при увеличении m изменяются до тех пор, пока они не станут равными $\theta_l(F_n)/l!$, где $\theta_l(F_n)$ — момент Чебышёва–Эрмита порядка l функции распределения F_n . Эти величины вычисляются по формулам

$$\frac{\theta_l(F_n)}{l!} = \sum \frac{n!}{k_0! k_3! \dots k_l!} \left(\frac{\theta_3}{3! n^{3/2}} \right)^{k_3} \dots \left(\frac{\theta_l}{l! n^{l/2}} \right)^{k_l},$$

где $\theta_3, \dots, \theta_l$ — моменты Чебышёва–Эрмита функции распределения F , а суммирование проводится по всем наборам неотрицательных целых чисел $k_0, k_3, \dots, k_l$ таким, что

$$k_0 + k_3 + \dots + k_l = n, \quad 3k_3 + \dots + lk_l = l.$$

Попытки получить при условии конечности момента β_{m+2} , $m \geq 3$, асимптотические разложения, остаточные части которых с ростом n убывают как $1/n^{m/2}$ и в которых коэффициенты при $H_l \varphi$, $l = 3, \dots, 3m - 3$, $l \neq 3m - 4$, с самого начала совпадают с $\theta_l(F_n)/l!$, не могут привести к успеху, поскольку при этом понадобится информация о моментах функции распределения F вплоть до порядка $3m - 3 > m + 2$. Однако можно получать асимптотические разложения, в которых коэффициенты при $H_l \varphi$, $l = 3, 4, \dots, m + 1$, совпадают с $\theta_l(F_n)/l!$, а коэффициенты при $H_l \varphi$, $l = m + 2, \dots, 3m - 3$, $l \neq 3m - 4$, связаны с так называемыми квазимоментами Чебышёва–Эрмита $\theta_l^{(m+1)}(F_n)$ (уровня $m + 1$) распределения F_n , которые получаются по той же формуле, что и $\theta_l(F_n)$, в которой следует опустить слагаемые,

связанные с θ_j , $j > m + 1$. Так получают асимптотические разложения, которые мы называем короткими разложениями Грама–Шарлье. Пример такого разложения дает следующая теорема.

Теорема 5. Пусть выполнены условия теоремы 2. Тогда для тех же n , что и в теореме 2, и всех действительных x

$$p_n(x) = \varphi(x) + \frac{\theta_3}{3!} \frac{1}{\sqrt{n}} H_3(x) \varphi(x) + \frac{\theta_4}{4!} \frac{1}{n} H_4(x) \varphi(x) + \frac{n-1}{2n} \left(\frac{\theta_3}{3!} \right)^2 \frac{1}{n} H_6(x) \varphi(x) + R,$$

где

$$\begin{aligned} |R| \leq & \frac{\|\theta_5\|}{5!} \frac{B_{5,n-1}}{n^{3/2}} + \frac{|\theta_3|}{3!} \frac{|\theta_4|}{4!} \frac{B_7}{n^{3/2}} + \frac{1}{3!} \left| \frac{\theta_3}{3!} \right|^3 \frac{B_9}{n^{3/2}} + \frac{\|\theta_6^{(4)}\|}{6!} \frac{B_{6,n-1}}{n^2} \\ & + \frac{1}{1-\rho} \frac{1}{2} \left(\frac{\theta_4}{4!} \right)^2 \frac{B_8}{n^2} + \frac{|\theta_3|}{3!} \frac{|\theta_4|}{4!} \frac{B_{7,n}}{n^{5/2}} + \frac{1}{2} \left| \frac{\theta_3}{3!} \right|^3 \frac{B_{9,n}}{n^{5/2}} \\ & + \frac{1}{2} \left(\frac{\theta_3}{3!} \right)^2 \frac{\|\theta_4\|}{4!} \frac{B_{10,n-1}}{n^3} + \frac{1}{3!} \left| \frac{\theta_3}{3!} \right|^3 \frac{B_{9,n}}{n^{7/2}} + \frac{1}{4} \left(\frac{\theta_3}{3!} \right)^2 \frac{\|\theta_5^{(3)}\|}{5!} \frac{B_{11,n-1}}{n^{7/2}} \\ & + \frac{1}{8} \left(\frac{\theta_3}{3!} \right)^4 \frac{B_{12,n}}{n^4} + \frac{\sqrt{n}}{\pi} \alpha^{n-\nu}(T) \int_T^\infty |f(t)|^\nu dt \\ & + \frac{\sqrt{n}}{\pi} \beta^{n-1}(T) \int_T^\infty e^{-t^2/2} \left| 1 + \frac{\theta_4}{4!} t^4 \right| dt + \frac{1}{2} \left(\frac{\theta_3}{3!} \right)^2 \frac{1}{n^2} L_6(T\sqrt{n}), \end{aligned}$$

а

$$L_6(T\sqrt{n}) = \frac{1}{\pi} \int_{T\sqrt{n}}^\infty t^6 e^{-t^2/2} dt.$$

В коротких разложениях Грама–Шарлье, как и в разложениях Эджворта–Крамера, оценки остаточных частей разложений содержат несколько слагаемых, убывающих с ростом n как $1/n^{m/2}$. Можно получать разложения, оценки остаточных частей которых содержат лишь одно слагаемое $(\|\theta_{m+2}\|/(m+2)!)/(B_{m+2,n-1}/n^{m/2})$, убывающее при росте n как $1/n^{m/2}$ (во всех оценках остаточных частей разложений, приводившихся выше, только это слагаемое связано с β_{m+2}). Такие разложения мы называем средними разложениями Грама–Шарлье, они аналогичны уточненным разложениям Эджворта–Крамера, и здесь мы их не приводим.

Дальнейшее развитие предложенных асимптотических разложений приводит к так называемым длинным разложениям Грама–Шарлье, в оценках остаточных частей которых величина $\|\theta_{m+2}\|$ заменяется на β_{m+2} . Этим оценкам можно придать вид

$$|R| \leq \frac{\beta_{m+2}}{(m+2)!} \frac{B_{m+2}}{n^{m/2}} \left(1 + O\left(\frac{1}{\sqrt{n}} \right) \right), \quad n \rightarrow \infty.$$

По-видимому, величина постоянной в этой оценке (по крайней мере, для четных m) неумлучшаема. Для величины $O(1/\sqrt{n})$ можно указать явную оценку.

Перейдем теперь к асимптотическим разложениям для функций распределения в случае решетчатых распределений.

Пусть функция распределения F исходных случайных величин $X_1, X_2, \dots$ решетчата с (максимальным) шагом $h > 0$. Хорошо известно, что в этом случае точки роста функции распределения F_n нормированной суммы $(X_1 + \dots + X_n)/\sqrt{n}$ принадлежат решетке $D_n = \{a_n + kh/\sqrt{n} : k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$, где a_n — некоторое действительное число, $F_n(x)$ изменяется только скачками, точки скачков принадлежат D_n и величина максимального среди этих скачков не меньше $ch/\sqrt{n}$, где $c > 0$ — абсолютная постоянная. Поэтому равномерное расстояние между $F_n(x)$ и $\Phi(x)$ при росте n не может убывать быстрее, чем $1/\sqrt{n}$, ни при каких, сколь угодно сильных, ограничениях на моменты F . Однако оказывается, что для $x \in D_n + h/(2\sqrt{n})$ (т.е., грубо говоря, для середин тех интервалов постоянства функции распределения F_n , в которых $F_n(x) \neq 0$ и $F_n(x) \neq 1$ и которые не содержат точек из D_n) точность аппроксимации $F_n(x)$ нормальным законом $\Phi(x)$ может быть выше $1/\sqrt{n}$. В частности, если третий момент α_3 равен нулю, то $F_n(x) - \Phi(x) = O(1/n)$ при $n \rightarrow \infty$ для $x \in D_n + h/(2\sqrt{n})$, если $\beta_4 < \infty$.

Такой результат в случае, когда F — распределение Бернулли (т.е. имеет лишь две точки роста), был получен Я. В. Успенским в 1937 г. Здесь и далее мы обозначаем $D_n + h/(2\sqrt{n})$ сдвиг множества D_n на $h/(2\sqrt{n})$.

Оказывается, что для $x \in D_n + h/(2\sqrt{n})$ можно строить и асимптотические разложения функции распределения F_n сколь угодно высокой точности, если у функции распределения F существует достаточное число моментов. Мы сформулируем соответствующий результат лишь для четных m . При этом нам понадобится величина

$$\|\theta T\|_{3,m+1} = 3! \sum_{k=3}^{m+1} \frac{|\theta_k|}{k!} T^{k-3}, \quad T > 0,$$

и числа Бернулли, которые мы будем обозначать $\tilde{B}_{2k}$, $k = 1, 2, \dots$.

Теорема 6. Пусть для некоторого целого числа $m \geq 4$ момент β_{m+2} решетчатой функции распределения F с шагом $h > 0$, нулевым средним и единичной дисперсией конечен. Пусть для некоторой пары (μ, T) , где $0 < T \leq \min(1, \pi/h)$, выполнено условие (3) и

$$e^{-t^2/2} \left| 1 + \sum_{k=3}^{m+1} \frac{\theta_k}{k!} (it)^k \right| \leq \mu(t) \quad \text{при всех } |t| \leq T,$$

где $\theta_3, \dots, \theta_{m+1}$ — моменты Чебышёва–Эрмита функции распределения F . Пусть $\|\theta T\|_{3,m+1} < 3$ и число $n \geq m+2$ таково, что

$$\frac{\|\theta T\|_{3,m+1}}{3} + \frac{1}{n} \left(\frac{\|\theta T\|_{3,m+1}}{3!} \right)^2 \left(\frac{(m+1)^3}{2} + 9(m+1)^2 + 27(m+1) + 9 \right) < 1.$$

Тогда для любого $x \in D_n + h/(2\sqrt{n})$, где D_n — решетка, на которой сосредоточено распределение F_n , при четном m справедливо равенство

$$\begin{aligned} F_n(x) = & \Phi(x) - \sum_{l=3}^{m+1} \frac{\theta_l(F_n)}{l!} H_{l-1}(x) \varphi(x) - \sum_{\substack{l=m+2, \\ l \neq 3m-1}}^{3m} \frac{\theta_l^{(m+1)}(F_n)}{l!} H_{l-1}(x) \varphi(x) \\ & + \sum_{j=0}^{m/2-1} \frac{2(2^{m-1-2j}-1)}{(m-2j)!} \tilde{B}_{m-2j} \left(\frac{h}{2\sqrt{n}} \right)^{m-2j} H_{m-2j-1}(x) \varphi(x) \\ & + \sum_{j=1}^{m/2-1} \frac{2(2^{m-1-2j}-1)}{(m-2j)!} \tilde{B}_{m-2j} \left(\frac{h}{2\sqrt{n}} \right)^{m-2j} \\ & \times \sum_{\substack{l=3, \\ l \neq 6j-1}}^{6j} \frac{\theta_l^{(m+1)}(F_n)}{l!} H_{l+m-2j-1}(x) \varphi(x) + O\left(\frac{1}{n^{m/2}} \right). \end{aligned}$$

Мы не приводим здесь явную оценку величины $O(1/n^{m/2})$ из-за ее громоздкости. Кроме того, для формулировки этой оценки требуется вводить дополнительные характеристики функции распределения F . Отметим лишь, что единственное слагаемое в оценке $O(1/n^{m/2})$, которое при росте n убывает как $1/n^{m/2}$, есть

$$c(T, h) \frac{\|\theta_{m+2}\|}{(m+2)!} \frac{B_{m+2,n-1}}{n^{m/2}},$$

где $c(T, h) = Th/(2 \sin(Th/2)) \leq \pi/2$. Отметим также, что сумма

$$\Phi(x) - \sum_{l=3}^{m+1} \frac{\theta_l(F_n)}{l!} H_{l-1}(x) \varphi(x) - \sum_{\substack{l=m+2, \\ l \neq 3m-1}}^{3m} \frac{\theta_l^{(m+1)}(F_n)}{l!} H_{l-1}(x) \varphi(x) \quad (5)$$

в главной части разложения $F_n(x)$ для решетчатых распределений совпадает с главной частью среднего разложения Грама–Шарлье $F_n(x)$, $-\infty < x < \infty$, для гладких

распределений. Для того чтобы величина (5) давала для нерешетчатой функции распределения $F(x)$ асимптотическое разложение $F_n(x)$ с точностью $O(1/n^{m/2})$, $n \rightarrow \infty$, достаточно выполнения условия Крамера

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} |f(t)| < 1.$$

Для нечетных m асимптотическое разложение и оценка его остаточной части выглядят аналогично, лишь в некоторых местах следует заменить m на $m - 1$. Мы не будем останавливаться на этом.

В теоремах 2–6 присутствуют ограничения $\theta_4 < 6$ и $\|\theta T\|_{3,m+1} < 3$. Эти ограничения можно обойти, но мы также не останавливаемся на этом.

Один из промежуточных результатов, полученных при доказательстве теоремы 6, позволяет доказать следующее утверждение.

Теорема 7. Пусть F — решетчатая функция распределения с шагом $h > 0$, нулевым средним, единичной дисперсией и конечным четвертым моментом. Для любого $n \geq 2$, любого $x \in D_n + h/(2\sqrt{n})$ и любого числа $0 < \delta < \frac{1}{3}$ справедливо неравенство

$$\begin{aligned} |F_n(x) - \Phi(x)| \leq & \frac{|\alpha_3|}{6\sqrt{2\pi n}} \left(\frac{n}{n-1}\right)^{3/2} (1-\delta)^{-3/2} + \frac{\beta_4 + 3}{12\pi n} \left(\frac{n}{n-1}\right)^2 (1-\delta)^{-2} \\ & + \left(\frac{h}{\sqrt{n}}\right)^2 \left(\frac{(1-\delta)^{-2}}{3\pi} + \frac{1}{24\sqrt{2\pi e}}\right) + \alpha^n \left(\frac{1}{\pi} \log\left(\frac{\pi}{3} \frac{\beta_3}{\delta h}\right) + \frac{\pi}{6}\right) \\ & + \frac{1}{\pi} \left(\frac{\beta_3}{3\delta\sqrt{n}}\right)^2 e^{-9\delta^2 n/(2\beta_3^2)} + \frac{1}{\pi^3} \left(\frac{h}{\sqrt{n}}\right)^2 e^{-\pi^2 n/(2h^2)}, \end{aligned}$$

где α_3 — третий момент функции распределения F , $\alpha = \max\{|f(t)| : 3\delta/\beta_3 \leq t \leq \pi/h\} < 1$, а f — характеристическая функция распределения F .

Следствием теоремы 7 является неравенство

$$\sup_{-\infty < x < \infty} |F_n(x) - \Phi(x)| \leq \frac{|\alpha_3|}{6\sqrt{2\pi n}} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{h}{2\sqrt{n}} + O\left(\frac{1}{n}\right), \quad n \rightarrow \infty.$$

Для величины $O(1/n)$ легко получить явную оценку. Отметим, что оба слагаемых в правой части последнего неравенства, убывающие при росте n как $1/\sqrt{n}$, являются правильными.

Отметим также, что если в левой части последнего неравенства снять знак верхней грани, то во второе слагаемое правой части можно добавить множитель, асимптотически (при $n \rightarrow \infty$) равный $e^{-x^2/2}$.

Перечисленные результаты и ряд других, вместе с их доказательствами, содержатся в монографии «Центральная предельная теорема: точность аппроксимации и асимптотические разложения», готовящейся к печати в издательстве «ТВП».

© 2006 г.

PANG T.-X.*, LIN Z.-Y.*

A NONCLASSICAL CHUNG-TYPE LAW OF THE ITERATED LOGARITHM FOR I.I.D. RANDOM VARIABLES¹⁾

Пусть $\{X, X_n; n \geq 1\}$ — последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин; положим $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$. Мы определяем последовательность положительных констант $\{d(n), n \geq 1\}$,

* Department of Mathematics, Zhejiang University, Hangzhou 310028, China; e-mail: pangtianxiao@tom.com; zlin@zju.edu.cn

¹⁾ Project supported by NSFC (10571159).