Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Н. Ширяев, М. Йор, К вопросу о стохастических интегральных представлениях функционалов от броуновского движения. I, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2003, том 48, выпуск 2, 375–385

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp290>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.82.47.9

26 апреля 2023 г., 15:49:59

© 2003 г.

ШИРЯЕВ А. Н.*, ЙОР М.**

К ВОПРОСУ О СТОХАСТИЧЕСКИХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ПРЕДСТАВЛЕНИЯХ ФУНКЦИОНАЛОВ ОТ БРОУНОВСКОГО ДВИЖЕНИЯ. I¹⁾

Для функционалов $S = S(\omega)$ от броуновского движения предлагается метод отыскания стохастических интегральных представлений, основанный на использовании формулы Ито для ассоциированного с S мартингала Леви. В качестве иллюстрации метода рассматриваются функционалы «максимального» типа: S_T , S_{T-a} , S_{g_T} и S_{θ_T} , где $S_T = \max_{t \leq T} B_t$, $S_{T-a} = \max_{t \leq T-a} B_t$ с $T-a = \inf\{t > 0: B_t = -a\}$, $a > 0$, и $S_{g_T} = \max_{t \leq g_T} B_t$, $S_{\theta_T} = \max_{t \leq \theta_T} B_t$, g_T и θ_T — немарковские моменты: g_T — момент последнего нуля броуновского движения на $[0, T]$, а θ_T — момент, когда броуновское движение достигает на $[0, T]$ своего максимального значения.

Ключевые слова и фразы: броуновское движение, марковские моменты, немарковские моменты, стохастический интеграл, формула Ито.

§ 1. Введение

1.1. Пусть $B = (B_t)_{t \geq 0}$ — стандартное броуновское движение, заданное на полном вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$. Будем обозначать $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ фильтрацию, порожденную броуновским движением ($\mathcal{F}_t = \sigma(B_s, s \leq t)$, $t \geq 0$, где все рассматриваемые σ -алгебры предполагаются пополненными множествами из $\mathcal{F}$ нулевой $\mathbf{P}$ -вероятности; полагаем также $\mathcal{F}_\infty = \sigma(\bigcup_{t \geq 0} \mathcal{F}_t)$).

Хорошо известно (см. [1]–[3]), что если $S = S(\omega)$ есть $\mathcal{F}_\infty$ -измеримая случайная величина (т.е. $\mathcal{F}_\infty$ -измеримый функционал от броуновского движения) с $\mathbf{E}S^2 < \infty$ ($S \in L^2(\Omega, \mathcal{F}_\infty, \mathbf{P})$), то найдется такой процесс $Y = (Y_t)_{t \geq 0}$, согласованный с фильтрацией $\mathbb{F}$ (т.е. Y_t — $\mathcal{F}_t$ -измеримы,

* Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, ул. Губкина, 8, 119991 Москва, ГСП-1, Россия; e-mail: shiryaev@mi.ras.ru

** Laboratoire de Probabilités et Modèles Aléatoires, Université Pierre et Marie Curie, Boîte courrier 188, 4 place Jussieu, 75252 Paris Cedex 05, France.

¹⁾ Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант 02-01-00834, и Франко-русского центра им. А. М. Ляпунова (МГУ–INRIA), проект 3-97.

$t \geq 0$), что имеет место следующее стохастическое интегральное представление:

$$S = \mathbf{E}S + \int_0^\infty Y_t dB_t, \quad (1)$$

где

$$\mathbf{E} \int_0^\infty Y_t^2 dt < \infty. \quad (2)$$

Следует подчеркнуть, что хотя формула (1) принципиально и решает вопрос о представлении S в виде стохастического интеграла, отыскание *явных* выражений для Y_t , $t \geq 0$, является делом довольно-таки непростым.

Известен один достаточно общий результат, называемый «формулой Кларка–Окона», который дает для Y_t следующее выражение:

$$Y_t = \mathbf{E}(DS(t, \infty) | \mathcal{F}_t), \quad (3)$$

где DS — производная Маллявена (см., например, [4]).

Однако даже в сравнительно простых случаях вычисление Y_t по формуле (3) требует значительных усилий.

1.2. Подход к нахождению *явных* формул для Y_t , $t \geq 0$, применяемый в настоящей работе, иной и состоит в идейном отношении в следующем.

Свяжем с функционалом S ассоциированный мартингал Леви

$$\mathbf{M}_t = \mathbf{E}(S | \mathcal{F}_t), \quad t \geq 0,$$

и попытаемся представить $\mathbf{E}(S | \mathcal{F}_t)(\omega)$ в виде $F(t, \omega; B_t(\omega))$, где последний функционал таков, что к нему возможно применение (обобщенной) *формулы Ито*. (См., например, [8], [9]; ср. также с соответствующими методами в теории оптимальной нелинейной фильтрации, [5].)

По самой своей структуре формула Ито содержит *стохастический интеграл* по броуновскому движению, который и должен дать (с точностью до константы) стохастическое интегральное представление для мартингала $(\mathbf{M}_t)_{t \geq 0}$. Поскольку по теореме Леви

$$\mathbf{M}_t = \mathbf{E}(S | \mathcal{F}_t) \longrightarrow \mathbf{E}(S | \mathcal{F}_\infty) = S \quad (\mathbf{P}\text{-п.н.}),$$

то, тем самым, получаем, как следствие, и требуемое стохастическое интегральное представление для функционала S .

1.3. Осуществление намеченной программы будет ниже продемонстрировано на примерах нескольких функционалов λ «максимального» типа. Именно, пусть

$$S_t = \max_{u \leq t} B_u.$$

В первой части работы в § 2 рассматривается стохастическое интегральное представление для функционала $S = S_T$, где T — некоторая константа, т.е. для случая $S = \max_{u \leq T} B_u$.

В § 3 исследуется случай $S = S_{T-a}$, т.е. $S = \max_{u \leq T-a} B_u$, где

$$T_{-a} = \inf\{t > 0: B_t = -a\}, \quad a > 0.$$

Моменты T и T_{-a} являются, очевидно, марковскими моментами. Во второй части работы рассматриваются вопросы интегрального представления для функционалов

$$S = S_{g_T} \quad \text{и} \quad S = S_{\theta_T},$$

где g_T и θ_T — немарковские моменты:

g_T — момент последнего нуля броуновского движения на $[0, T]$ с $g_T = T$, если такого момента нет; и

θ_T — момент, когда броуновское движение достигает на $[0, T]$ своего максимального значения.

Эти два случая рассматриваются соответственно в §§ 4 и 5 второй части работы.

В заключение настоящего введения отметим, что, помимо собственно результатов относительно стохастических интегральных представлений для «частичных» максимумов S_T , S_{T-a} , S_{g_T} и S_{θ_T} , данная работа содержит также ряд нетрадиционных методов и приемов стохастического анализа (см., например, лемму 1 о стохастическом интегральном соотношении для индикатора $I(T_a < T)$ марковского момента T_a , $a > 0$), которые, как нам представляется, могут быть полезными и в других задачах теории случайных процессов.

§ 2. Случай $S_T = \max_{t \leq T} B_t$

2.1. Вопрос о стохастическом интегральном представлении функционала S_T рассматривался в ряде работ (см., например, [1], [2], [4], [6]), согласно которым справедливо следующее утверждение.

Теорема 1. Для S_T имеет место стохастическое интегральное представление:

$$S_T = \mathbf{E}S_T + 2 \int_0^T \left[1 - \Phi\left(\frac{S_t - B_t}{\sqrt{T-t}}\right) \right] dB_t, \quad (4)$$

где $S_t = \max_{u \leq t} B_u$,

$$\mathbf{E}S_T = \mathbf{E} \max_{t \leq T} B_t = \mathbf{E}|B_T| = \sqrt{\frac{2T}{\pi}}, \quad \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-y^2/2} dy.$$

Ниже будут приведены два способа доказательства представления (4), основанные на изложенной выше стратегии, опирающейся на применение формулы Ито к ассоциированному мартингалу $(\mathbf{E}[S | \mathcal{F}_t])_{t \geq 0}$.

Доказательство. Первый способ. Для каждой неотрицательной случайной величины ξ справедливо представление

$$\xi = \int_0^\infty I(a < \xi) da.$$

Следовательно,

$$S_T = \max_{t \leq T} B_t = \int_0^\infty I(a < \max_{t \leq T} B_t) da = \int_0^\infty I(T_a < T) da, \quad (5)$$

где

$$T_a = \inf\{t \geq 0: B_t = a\}, \quad a \geq 0.$$

Следующий результат, интересный и сам по себе, дает стохастическое интегральное соотношение для момента остановки T_a .

Лемма 1. Для всякого $a > 0$ (P-п.н.)

$$I(T_a < T) = \mathbf{P}\{T_a < T\} + 2 \int_0^{T_a \wedge T} \varphi_{T-t}(B_t - a) dB_t, \quad (6)$$

где

$$\varphi_t(a) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-a^2/(2t)}. \quad (7)$$

Доказательство. Рассмотрим стохастическую экспоненту

$$\mathcal{E}_t(\lambda) = e^{\lambda B_t - \lambda^2 t/2}, \quad \lambda \in \mathbf{R}. \quad (8)$$

По теореме Дуба об остановке для мартингалов находим, что

$$\mathbf{E}(\mathcal{E}_{T_a}(\lambda) | \mathcal{F}_t) = \mathcal{E}_{T_a \wedge t}(\lambda) \quad (\mathbf{P}\text{-п.н.}). \quad (9)$$

По формуле Ито

$$d\mathcal{E}_t(\lambda) = \lambda \mathcal{E}_t(\lambda) dB_t, \quad \mathcal{E}_0(\lambda) = 1. \quad (10)$$

Отсюда и из (9)

$$\mathbf{E}(\mathcal{E}_{T_a}(\lambda) | \mathcal{F}_t) = 1 + \lambda \int_0^{T_a \wedge t} e^{\lambda B_s - \lambda^2 s/2} dB_s, \quad (11)$$

и, поскольку $\mathcal{E}_{T_a}(\lambda) = e^{\lambda a - \lambda^2 T_a/2}$ (P-п.н.),

$$\mathbf{E}(e^{-\lambda^2 T_a/2} | \mathcal{F}_t) = e^{-\lambda a} + \lambda \int_0^{T_a \wedge t} e^{-\lambda(a-B_s) - \lambda^2 s/2} dB_s. \quad (12)$$

В частности, полагая $t \rightarrow \infty$, получаем, что (P-п.н.)

$$e^{-\lambda^2 T_a/2} = e^{-\lambda a} + \lambda \int_0^{T_a} e^{-\lambda(a-B_s) - \lambda^2 s/2} dB_s. \quad (13)$$

Преобразуем правые части в (12), (13). С этой целью положим

$$\gamma_a(t) = \frac{d}{dt} \mathbf{P}\{T_a \leq t\}. \quad (14)$$

Известно (см. [3], [7]), что

$$\gamma_a(t) = \frac{a}{\sqrt{2\pi t^3}} e^{-a^2/(2t)} \quad \left(= -\frac{\partial}{\partial a} \varphi_t(a) \right). \quad (15)$$

Из (9)

$$\mathbf{E} e^{\lambda^2 T_a/2} = e^{-\lambda a}. \quad (16)$$

Поэтому для всякого $c > 0$

$$\begin{aligned} \lambda e^{-\lambda c} &= -\frac{d}{dc} e^{-\lambda c} = -\frac{d}{dc} (\mathbf{E} e^{-\lambda^2 T_c/2}) \\ &= -\frac{d}{dc} \int_0^\infty e^{-\lambda^2 t/2} \gamma_c(t) dt = -\int_0^\infty e^{-\lambda^2 t/2} \left(\frac{\partial}{\partial c} \gamma_c(t) \right) dt \\ &= \int_0^\infty e^{-\lambda^2 t/2} \left(\frac{\partial^2}{\partial c^2} \varphi_t(c) \right) dt = 2 \int_0^\infty e^{-\lambda^2 t/2} \left(\frac{\partial}{\partial t} \varphi_t(c) \right) dt, \end{aligned} \quad (17)$$

поскольку

$$\frac{\partial \varphi_t(c)}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \varphi_t(c)}{\partial c^2}. \quad (18)$$

Из (12), (16) и (17), учитывая, что $B_s < a$ на множестве $\{\omega: s < T_a\}$, находим

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(e^{-\lambda^2 T_a/2} | \mathcal{F}_t) &= \mathbf{E} e^{-\lambda^2 T_a/2} + 2 \int_0^{T_a \wedge t} \left[\int_0^\infty e^{-\lambda^2 u/2} \left(\frac{\partial}{\partial u} \varphi_u(a - B_s) \right) du \right] e^{-\lambda^2 s/2} dB_s \\ &= \mathbf{E} e^{-\lambda^2 T_a/2} + 2 \int_0^{T_a \wedge t} \left[\int_0^\infty e^{-\lambda^2 (u+s)/2} \left(\frac{\partial}{\partial u} \varphi_u(B_s - a) \right) du \right] dB_s. \end{aligned} \quad (19)$$

Отсюда для достаточно «хороших» и не слишком быстро растущих функций $f = f(x)$ получаем (детали см. во второй части работы), что (Р-п.н.)

$$\mathbf{E}(f(T_a) | \mathcal{F}_t) = \mathbf{E} f(T_a) + 2 \int_0^{T_a \wedge t} \left[\int_0^\infty f(u+s) \left(\frac{\partial}{\partial u} \varphi_u(B_s - a) \right) du \right] dB_s. \quad (20)$$

В частности, полагая $f(t) = I(t < T)$, приходим к следующему:

$$\begin{aligned} I(T_a < T) &= \mathbf{P}\{T_a < T\} \\ &\quad + 2 \int_0^{T_a} \left[\int_0^\infty I(u+s < T) \left(\frac{\partial}{\partial u} \varphi_u(B_s - a) \right) du \right] dB_s \\ &= \mathbf{P}\{T_a < T\} + 2 \int_0^{T_a} \left[\int_0^{T-s} \frac{\partial}{\partial u} \varphi_u(B_s - a) du \right] dB_s \\ &= \mathbf{P}\{T_a < T\} + 2 \int_0^{T_a \wedge t} \varphi_{T-s}(B_s - a) dB_s, \end{aligned} \quad (21)$$

что и доказывает требуемое представление. Лемма 1 доказана.

2.2. Из представления (6) и из (5) видим, что

$$\begin{aligned}
 S_T &= \max_{t \leq T} B_t = \int_0^\infty I(T_a < T) da \\
 &= \int_0^\infty \mathbf{P}\{T_a < T\} da + 2 \int_0^\infty \left[\int_0^{T_a \wedge T} \varphi_{T-s}(B_s - a) dB_s \right] da \\
 &= \int_0^\infty \mathbf{P}\left(\max_{s \leq T} B_s > a\right) da \\
 &\quad + 2 \int_0^\infty \int_0^\infty I(s < T_a \wedge T) \varphi_{T-s}(B_s - a) dB_s da \\
 &= \mathbf{E} \max_{s \leq T} B_s + 2 \int_0^T \left[\int_0^\infty I(s < T_a) \varphi_{T-s}(B_s - s) da \right] dB_s \\
 &= \mathbf{E} S_T + 2 \int_0^T \left[\int_0^\infty \varphi_{T-u}(B_u - a) I(S_u < a) da \right] dB_u. \quad (22)
 \end{aligned}$$

Здесь

$$\begin{aligned}
 \int_0^\infty \varphi_{T-u}(B_u - a) I(S_u < a) da &= \int_{S_u}^\infty \varphi_{T-u}(B_u - a) da \\
 &= \int_{S_u}^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi(T-u)}} \exp\left(-\frac{(B_u - a)^2}{2(T-u)}\right) da \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{(S_u - B_u)/\sqrt{T-u}}^\infty e^{-a^2/2} da = 1 - \Phi\left(\frac{S_u - B_u}{\sqrt{T-u}}\right). \quad (23)
 \end{aligned}$$

Из (22) и (23) получаем представление (4).

Следствие. Пусть $M_T = \min_{t \leq T} B_t$. Тогда

$$M_T = \mathbf{E} M_T - 2 \int_0^T \left[1 - \Phi\left(\frac{B_t - M_t}{\sqrt{T-t}}\right) \right] dB_t. \quad (24)$$

Для доказательства достаточно лишь заметить, что если $M_t = M_t(B) (= \min_{u \leq t} B_u)$ и $S_t = S_t(B) (= \max_{u \leq t} B_u)$, то $M_t(B) = -S_t(-B)$ и (24) следует из (4).

2.3. Доказательство теоремы 1. Второй способ.

В приведенном выше доказательстве формулы (4) ключевыми являлись формула (5) и представление (6) для индикатора $I(T_a < T)$, интересное и само по себе.

Приводимый ниже способ отыскания представлений типа (4) состоит в непосредственном рассмотрении ассоциированных мартингалов с последующим применением формулы Ито. При этом рассматриваться будет не только интересующий нас процесс броуновского движения $B = (B_t)_{t \geq 0}$, но и более общие процессы, а именно процессы Леви.

Лемма 2. Пусть $X = (X_t)_{t \geq 0}$ — процесс Леви с $\mathbf{E} S_T < \infty$, где $T < \infty$ и $S_t = \sup_{u \leq t} X_u$. Пусть $F_{T-t}(s) = \mathbf{P}\{S_{T-t} \leq s\}$ и $\mathcal{F}_t^X =$

$\sigma(X_u, u \leq t)$. Тогда для $t \leq T$

$$\mathbf{E}(S_T | \mathcal{F}_t^X) = S_t + \int_{S_t - X_t}^{\infty} (1 - F_{T-t}(u)) du. \quad (25)$$

Доказательство, в основном, следует п. 3 работы [6]. Из свойств процессов Леви следует, что

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(S_T | \mathcal{F}_t^X) &= \mathbf{E}\left(\max\left(S_t, \sup_{t \leq u \leq T} S_u\right) | \mathcal{F}_t^X\right) \\ &= S_t + \mathbf{E}\left(\left(\sup_{t \leq u \leq T} S_u - S_t\right)^+ | \mathcal{F}_t^X\right) \\ &= S_t + \mathbf{E}\left(\left[\sup_{t \leq u \leq T} (S_u - X_t) - (S_t - X_t)\right]^+ | \mathcal{F}_t^X\right) \\ &= S_t + \mathbf{E}(S_{T-t} - (s - x))^+ |_{x=X_t, s=S_t}. \end{aligned} \quad (26)$$

Воспользовавшись формулой $\mathbf{E}(\xi - c)^+ = \int_c^{\infty} \mathbf{P}\{\xi > z\} dz$, из (26) находим требуемое представление (25).

Заметим, что правая часть в (25) имеет вид $f(t, X_t, S_t)$, где

$$f(t, x, s) = s + \int_{s-x}^{\infty} (1 - F_{T-t}(u)) du. \quad (27)$$

В частности, если $X_t = B_t^\mu$, где $B_t^\mu = \mu t + B_t$ (броуновское движение со сносом), то применение формулы Ито к непрерывному мартингалу $f(t, B_t^\mu, S_t^\mu)$, $t \leq T$, с $S_t^\mu = \max_{u \leq t} B_u^\mu$ дает следующее представление:

$$\mathbf{E}(S_T^\mu | \mathcal{F}_t^B) = \mathbf{E}S_T^\mu + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x}(s, B_s^\mu, S_s^\mu) dB_s, \quad (28)$$

где $\partial f / \partial x$ есть частная производная функции $f = f(t, x, s)$.

Из (19) и (28) получаем

$$\mathbf{E}(S_T^\mu | \mathcal{F}_t^B) = \mathbf{E}S_T^\mu + \int_0^t [1 - F_{T-u}(S_u^\mu - B_u^\mu)] dB_u. \quad (29)$$

В случае броуновского движения со сносом (см. [3], [7])

$$F_{T-u}(s) = \mathbf{P}\{S_{T-u} \leq s\} = \Phi\left(\frac{s - \mu(T-u)}{\sqrt{T-u}}\right) - e^{2\mu s} \Phi\left(\frac{-s - \mu(T-u)}{\sqrt{T-u}}\right).$$

Тем самым,

$$\mathbf{E}(S_T^\mu | \mathcal{F}_t^B) = \mathbf{E}S_T^\mu + \int_0^t H_u^\mu dB_u, \quad (30)$$

где

$$\begin{aligned} H_u^\mu &= 1 - \Phi\left(\frac{(S_u^\mu - B_u^\mu) - \mu(T-u)}{\sqrt{T-u}}\right) \\ &\quad + \exp\{2\mu(S_u^\mu - B_u^\mu)\} \Phi\left(\frac{-(S_u^\mu - B_u^\mu) - \mu(T-u)}{\sqrt{T-u}}\right). \end{aligned} \quad (31)$$

Если $\mu = 0$, то из (30) и (31) получаем представление (4).

§ 3. Случай $S_{T-a} = \max_{t \leq T-a} B_t$, $a > 0$

3.1. Поскольку $\mathbf{E}S_{T-a} = \infty$, то непосредственное обращение к ассоциированному мартингалу становится невозможным. Поэтому рассмотрим некоторую достаточно «хорошую» неотрицательную функцию $f = f(x)$ такую, что $\mathbf{E}f(S_{T-a}) < \infty$. (См. далее условия в теореме 2.)

Обозначим $F = f(S_{T-a})$, и пусть $(F_t)_{t \geq 0}$ является ассоциированным с F мартингалом Леви, $F_t = \mathbf{E}(F | \mathcal{F}_t^B)$.

Зафиксируем сейчас некоторое $t > 0$. Тогда на множестве $\{t < T-a\}$

$$F_t = \mathbf{E}(f(S_{T-a}) | \mathcal{F}_t^B) = \mathbf{E} \left[f \left(\max \left(S_t, \sup_{t \leq u \leq T-a} B_u \right) \right) | \mathcal{F}_t^B \right].$$

Если положить $\hat{B}_u = B_{u+t} - B_t$, $u \geq 0$, и $\hat{T}_{-b} = \inf\{u > 0: \hat{B}_u = -b\}$, $b > 0$, то найдем, что тождественно

$$\begin{aligned} \sup_{t \leq u \leq T-a} B_u &= B_t + \sup_{t \leq u \leq T-a} (B_u - B_t) = B_t + \sup_{0 \leq v \leq \hat{T}_{-a+t}} (B_{v+t} - B_t) \\ &= B_t + \sup_{0 \leq u \leq \hat{T}_{-(a+B_t)}} (B_{u+t} - B_t), \end{aligned} \quad (32)$$

где последнее равенство следует из того, что на множестве $\{t < T-a\}$

$$\begin{aligned} \hat{T}_{-(a+B_t)} &= \inf\{u \geq 0: \hat{B}_u = -(a+B_t)\} \\ &= \inf\{u \geq 0: B_{u+t} - B_t = -(a+B_t)\} \\ &= \inf\{u \geq 0: B_{u+t} = -a\} = T-a-t. \end{aligned}$$

Из (32) следует, что на $\{t < T-a\}$

$$\sup_{t \leq u \leq T-a} B_u = B_t + \hat{S}_{\hat{T}_{-(a+B_t)}},$$

где $\hat{S}_t = \sup_{u \leq t} \hat{B}_u$, и, значит, на этом множестве

$$F_t = \mathbf{E} \left[f(\max(S_t, B_t + \hat{S}_{\hat{T}_{-(a+B_t)}})) | \mathcal{F}_t \right]. \quad (33)$$

3.2. Для дальнейшего упрощения правой части равенства (33) нам понадобится следующая (известная специалистам) лемма, приводимая вместе с доказательством для полноты изложения.

Лемма 3. Пусть $M = (M_t)_{t \geq 0}$ — непрерывный неотрицательный мартингал ($M \in \mathcal{M}^c$, $M \geq 0$) с $M_0 = b > 0$ и $M_\infty \equiv \lim_{t \rightarrow \infty} M_t = 0$. Тогда

$$\sup_{t \geq 0} M_t \stackrel{\text{law}}{=} \frac{b}{U},$$

где $U = U[0, 1]$ — случайная величина, равномерно распределенная на $[0, 1]$, т.е.

$$\mathbf{P} \left\{ \sup_{t \geq 0} M_t \leq b + x \right\} = \frac{x}{b + x}, \quad x \geq 0. \quad (34)$$

Доказательство. Пусть $T_{b+x} = \inf\{t \geq 0: M_t = b+x\}$ и $\widetilde{M}_t = M_{t \wedge T_{b+x}}$. Мартингал $\widetilde{M} = (\widetilde{M}_t)_{t \geq 0}$ является ограниченным и сверху, и снизу ($0 \leq \widetilde{M}_t \leq b+x$). Поэтому согласно теореме Дуба об остановке $\mathbf{E}\widetilde{M}_0 = \mathbf{E}\widetilde{M}_{T_{b+x}}$, и, значит,

$$\begin{aligned} b &= \mathbf{E}\widetilde{M}_0 = \mathbf{E}\widetilde{M}_{T_{b+x}} = \mathbf{E}M_{T_{b+x}} = \mathbf{E}M_{T_{b+x}} I(T_{b+x} < \infty) \\ &= (b+x)\mathbf{P}\{T_{b+x} < \infty\} = (b+x)\mathbf{P}\left\{\sup_{t \geq 0} M_t \geq b+x\right\}, \end{aligned}$$

что и доказывает равенство (34).

Применяя эту лемму к $M_t = b + \widehat{B}_{t \wedge \widehat{T}_{-b}}$, видим, что

$$\mathbf{P}\left\{\sup_{t \leq \widehat{T}_{-b}} \widehat{B}_t > x\right\} = \mathbf{P}\left\{\sup_{t \geq 0} M_t > b+x\right\} = \frac{b}{b+x},$$

или

$$\mathbf{P}\left\{\sup_{t \leq \widehat{T}_{-b}} \widehat{B}_t \in dx\right\} = \frac{b dx}{(b+x)^2}, \quad x \geq 0. \quad (35)$$

Из (33) и (35), с учетом независимости броуновского движения $\widehat{B} = (\widehat{B}_u)_{u \geq 0}$ от $\mathcal{F}_t$, находим, что на множестве $\{t \leq T_{-a}\}$

$$F_t = \int_0^\infty f(\max(S_t, B_t + x)) \frac{b dx}{(b+x)^2}, \quad b = a + B_t. \quad (36)$$

Если $B_t + x \leq S_t$ (т.е. $x \leq S_t - B_t$), то

$$\begin{aligned} F_t &= \int_0^{S_t - B_t} f(S_t) \frac{b dx}{(b+x)^2} + \int_{S_t - B_t}^\infty f(B_t + x) \frac{b dx}{(b+x)^2} \\ &= f(S_t) \frac{S_t - B_t}{a + S_t} + \int_0^\infty f(S_t + y) \frac{b dy}{(a + S_t + y)^2} \\ &= f(S_t) \frac{S_t - B_t}{a + S_t} + (a + B_t) \int_0^\infty f(S_t + y) \frac{dy}{(a + S_t + y)^2} \\ &= \left[f(S_t) \frac{S_t}{a + S_t} + a \int_0^\infty \frac{f(S_t + y)}{(a + S_t + y)^2} dy \right] \\ &\quad + B_t \left[-\frac{f(S_t)}{a + S_t} + \int_0^\infty \frac{f(S_t + y)}{(a + S_t + y)^2} dy \right] \equiv g(S_t) + B_t h(S_t), \quad (37) \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} g(\sigma) &= \frac{\sigma f(\sigma)}{a + \sigma} + a \int_0^\infty \frac{f(\sigma + y)}{(a + \sigma + y)^2} dy, \\ h(\sigma) &= -\frac{f(\sigma)}{a + \sigma} + \int_0^\infty \frac{f(\sigma + y)}{(a + \sigma + y)^2} dy \\ &= \int_0^\infty [f(\sigma + y) - f(\sigma)] \frac{dy}{(a + \sigma + y)^2}. \end{aligned}$$

Процесс $S = (S_t)_{t \geq 0}$ является процессом ограниченной вариации. Поэтому из (37) по формуле Ито находим, что на множестве $\{t < T_{-a}\}$

$$dF_t = [g'(S_t) + B_t h'(S_t)] dS_t + h(S_t) dB_t. \quad (38)$$

Но $B_t h'(S_t) dS_t = S_t h'(S_t) dS_t$ (в смысле выполнения соответствующего интегрального соотношения). Отсюда и из (38), с учетом легко проверяемого равенства $g'(\sigma) + \sigma h'(\sigma) = 0$, получаем, что на множестве $\{t \leq T_{-a}\}$

$$F_t = F_0 + \int_0^t h(S_u) dB_u = g(0) + \int_0^t h(S_u) dB_u. \quad (39)$$

З а м е ч а н и е. «Исчезновение» в (38) первого слагаемого в правой части можно было предвидеть, и не обращаясь к равенству $g'(\sigma) + \sigma h'(\sigma) = 0$, поскольку процесс $(F_t)_{t \geq 0}$ должен быть мартингалом, а стохастический дифференциал по dB_t в интегральной форме дает локальный мартингал.

Из (39) предельным переходом $t \uparrow T_{-a}$ приходим к следующему утверждению.

Теорема 2. Пусть функция $f = f(x)$, $x \geq 0$, такова, что для $a > 0$, $\sigma \geq 0$

$$\int_0^\infty \frac{|f(\sigma + y)|}{(a + \sigma + y)^2} dy < \infty$$

и

$$\int_0^{T_{-a}} h^2(S_u) du < \infty \quad (\mathbf{P}\text{-н.н.}).$$

Тогда справедливо следующее стохастическое интегральное представление:

$$f\left(\max_{u \leq T_{-a}} B_u\right) = \mathbf{E}f\left(\max_{u \leq T_{-a}} B_u\right) + \int_0^{T_{-a}} h(S_u) dB_u, \quad (40)$$

где

$$\mathbf{E}f\left(\max_{u \leq T_{-a}} B_u\right) = \int_0^\infty \frac{af(y)}{(a + y)^2} dy. \quad (41)$$

Следствие. Из (40)

$$I\left(\max_{u \leq T_{-a}} B_u > z\right) = \frac{a}{a + z} + \int_0^{T_{-a}} \frac{I(S_u < z)}{a + z} dB_u. \quad (42)$$

Интересно отметить, что соотношение (42) равносильно тому, что

$$(a + z)I(S_{T_{-a}} > z) = a + B_{T_{-a} \wedge T_z}. \quad (43)$$

Это равенство на самом деле является очевидным. Действительно, на множестве $\{S_{T_{-a}} > z\}$ левая часть равна $a + z$, а правая часть также равна $a + z$, поскольку $B_{T_{-a} \wedge T_z} = z$ на множестве $\{S_{T_{-a}} > z\}$. Если же $S_{T_{-a}} \leq z$, то обе части в (43) равны нулю.

3.3. Обратимся снова к представлению (42). Поскольку стохастический интеграл $\int_0^{T-a} dB_u = -a$, то (42) может быть переписано в виде

$$I\left(\max_{u \leq T-a} B_u > z\right) = - \int_0^{T-a} \frac{I(z < S_u)}{a+z} dB_u.$$

Отсюда

$$\begin{aligned} S_{T-a} = \max_{u \leq T-a} B_u &= \int_0^\infty I(S_{T-a} > z) dz = - \int_0^\infty \left[\int_0^{T-a} \frac{I(z < S_u)}{a+z} dB_u \right] dz \\ &= - \int_0^{T-a} \left[\int_0^\infty \frac{I(z < S_u)}{a+z} dz \right] dB_u = - \int_0^{T-a} \left[\int_0^{S_u} \frac{dz}{a+z} \right] dB_u \\ &= - \int_0^{T-a} \ln \frac{a+S_u}{a} dB_u. \end{aligned}$$

Следовательно, справедливо стохастическое интегральное представление

$$\max_{u \leq T-a} B_u = - \int_0^{T-a} \ln \left(1 + \frac{S_u}{a} \right) dB_u. \quad (44)$$

Как уже отмечалось, $E \max_{u \leq T-a} B_u = \infty$. Тем самым, формула (44) дает пример стохастического интегрального представления для функционала от броуновского движения с бесконечным математическим ожиданием.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Clark I. M. C. The representation of functionals of Brownian motion by stochastic integrals. — Ann. Math. Statist., 1970, v. 41, № 4, p. 1282–1295.
2. Itô K. Multiple Wiener integral. — J. Math. Soc. Japan, 1951, v. 3, № 1, p. 157–169.
3. Revuz D., Yor M. Continuous Martingales and Brownian Motion. Berlin–Heidelberg: Springer-Verlag, 1994, 560 p.
4. Rogers L. C. G., Williams D. Diffusions, Markov Processes, and Martingales. V. 2: Itô Calculus. Chichester: Wiley, 1987, 475 p.
5. Лунцер П. III., Ширяев А. Н. Статистика случайных процессов. М.: Наука, 1974.
6. Graversen S. E., Peskir G., Shiryaev A. N. Stopping Brownian motion without anticipation as close as possible to its ultimate maximum. — Теория вероятн. и ее примен., 2000, т. 45, в. 1, с. 125–136.
7. Ширяев А. Н. Основы стохастической финансовой математики. Т. 1: Факты, модели. Т. 2: Теория. М.: ФАЗИС, 1998, 512 с., 544 с.
8. Kunita H. Some extensions of Itô's formula. — Lecture Notes in Math., 1981, v. 850, p. 118–141.
9. Вентцель А. Д. Об уравнениях теории условных марковских процессов. — Теория вероятн. и ее примен., 1965, т. 10, в. 2, с. 390–393.

Поступила в редакцию
1.XII.2002