Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. М. Вершик, Пример Колмогорова (обзор действий бесконечномерных групп с инвариантной вероятностной мерой), *Теория вероятн. и ее примен.*, 2003, том 48, выпуск 2, 386–391

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp291>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.82.47.9

26 апреля 2023 г., 14:47:14

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

© 2003 г.

ВЕРШИК А. М.*

ПРИМЕР КОЛМОГОРОВА (ОБЗОР ДЕЙСТВИЙ БЕСКОНЕЧНОМЕРНЫХ
ГРУПП С ИНВАРИАНТНОЙ ВЕРОЯТНОСТНОЙ МЕРОЙ)

В конце 40-х годов А. Н. Колмогоров привел замечательный простой пример транзитивного, но не эргодического действия группы всех перестановок натурального ряда. Оказалось, что такие примеры возникают, как правило, в теории действий не локально-компактных групп, а для локально-компактных групп такого явления быть не может. Пример Колмогорова помогает также дать правильное определение того, что такое разложение на эргодические компоненты и разбиение на траектории для действия общих групп.

Ключевые слова и фразы: инвариантное множество, группа подстановок, транзитивное действие, эргодические компоненты, симплекс инвариантных мер.

Известные ученые часто не публикуют важные факты, замеченные или открытые ими, из-за того, что рассматривают их скорее как конструкции, примеры, комментарии и т.п., а не как серьезные результаты. Поэтому эти факты попадают в работы других математиков (со ссылками) или в научный фольклор, и только последующий ход развития математики иллюстрирует важность и плодотворность этих наблюдений и замечаний.

В работе [1], написанной в 1948 году Сергеем Васильевичем Фоминым (1919–1975), который был соавтором и отчасти сотрудником и Андрея Николаевича Колмогорова, и его ученика Израиля Моисеевича Гельфанда, упомянуты и приведены сразу два таких факта. Первый — конструкция И. М. Гельфанда скрещенного произведения в теории динамических систем — конструкция, ставшая в последующие годы основной в алгебраической теории динамических систем и теории представлений; она перекрывалась позже многими авторами и ее принадлежность И. М. малоизвестна.

Второй факт, являющийся предметом данной заметки, — это наблюдение А. Н. Колмогорова, которое, несмотря на его несомненную важность для теории динамических систем, в особенности для теории действий бесконечномерных групп, до сих пор не вошло в обиход специалистов.

1. Пример Колмогорова — группа всех подстановок натурального ряда. Я приведу этот пример как контрпример к, казалось бы, совершенно очевидному утверждению. Рассмотрим топологическую группу G , которая непрерывно действует на сепарабельном метрическом пространстве X . Предположим, что группа действует транзитивно, т.е. для любых двух точек $x, y \in X$ существует такой элемент $g \in G$, что $gx = y$.

Поставим вопрос: сколько может быть борелевских вероятностных мер, инвариантных (более общо — квазиинвариантных) относительно действия этой группы?

* С.-Петербургское отделение Математического института им. В. А. Стеклова РАН, ул. Фонтанка, 27, 191011 С.-Петербург, Россия.

Казалось бы, — очевидно, — не более одной, ведь непустое инвариантное множество в силу транзитивности — единственно! Ниже я докажу, что если группа G локально-компактна, то — да, не более одной, но и это неочевидно. Можно поставить вопрос более конкретно — пусть имеется инвариантная (или квазиинвариантная — об этих мерах речь в статье [1] не шла) эргодическая относительно эргодически действующей топологической группы G мера μ ; верно ли, что можно найти такое *инвариантное* измеримое множество, μ -мера которого равна 1, а по любой другой инвариантной эргодической мере его мера равна нулю? Если да, то и на предыдущий вопрос ответ положительный.

С. В. Фомин пишет (см. [1, с. 270]):

«Следующий пример, указанный мне А. Н. Колмогоровым, показывает, что для произвольной группы преобразований компакта этот результат может быть и не верен».

Прежде чем приводить очень естественный контрпример А. Н. Колмогорова, замечу, что с точки зрения теории меры понятие инвариантного множества относительно действия группы не является естественным. Правильным является понятие *инвариантного множества mod 0* — так называется такое измеримое множество A , что для любого элемента g группы G множества A и gA совпадают mod 0, т.е. отличаются на множество меры нуль. Для данного (одного) элемента группы можно исправить инвариантное множество mod 0 до инвариантного множества, а может так случиться, что удастся исправление выбрать общим для всех элементов группы G , однако, вообще говоря, такого единого исправления может и не существовать, и это иллюстрирует пример А. Н. Колмогорова. Таким образом, возникающая проблема подобна проблемам лифтинга — когда можно выбрать единое для континуального семейства объектов (в нашем случае — для всех преобразований из группы) измеримое множество с данным свойством (быть инвариантным для каждого преобразования).

Пример. Рассмотрим действие группы S^∞ — *всех бесконечных подстановок натурального ряда* — на компакте $\{0; 1\}^{\mathbb{N}}$ всех бесконечных последовательностей нулей и единиц со слабой топологией. Запас инвариантных множеств относительно действия всей этой группы легко описать — это, во-первых, множество всех последовательностей с бесконечным числом нулей и единиц и, кроме того, счетное число счетных множеств последовательностей, у которых число нулей или число единиц — конечно. (Объединение всех этих счетных множеств можно удалить из компакта, и тогда группа будет действовать транзитивно на оставшемся множестве, правда оно уже не будет компактом, хотя и будет полным сепарабельным метризуемым пространством в подправленной топологии.) А теперь воспользуемся классической теоремой де Финетти, которая утверждает, что запас непрерывных эргодических мер, инвариантных относительно группы S^∞ , состоит из всех бернуллиевских (продакт-) мер и, следовательно, параметризуется интервалом $(0, 1)$. Очевидно, все эти меры нельзя отделить с помощью инвариантных множеств, так как такое множество положительной меры — одно. С другой стороны, очевидно, что борелевское множество последовательностей, имеющих заданную частоту нулей, имеет по эргодической теореме полную вероятность относительно бернуллиевской меры и является *инвариантным mod 0* относительно любой подстановки. Это можно показать и непосредственно: любая подстановка, переводящая одну последовательность с бесконечным числом нулей и единиц в другую такую же последовательность (например, ставящая нули на четные, а единицы на нечетные места), хотя, вообще говоря, меняет частоты нулей и единиц в последовательностях, но делает это лишь на множестве последовательностей, имеющем меру нуль по *любой* бернуллиевской мере. Разумеется, это множество существенно зависит от подстановки. Ниже мы приведем и другие более сложные примеры такого рода.

2. Локально-компактные группы. Вопросы об эргодических и инвариантных множествах относятся к кругу идей, характерных для работ 30–50-х годов (Н. М. Крылов — Н. Н. Боголюбов, Дж. фон Нейман, А. Н. Колмогоров, В. А. Рохлин, С. Улам, Дж. Окстоби и др., см. книгу [7]), и ориентированы были в основном на динамические системы классического стиля, т.е. на действия циклической или однопараметрической групп, на компакте. Только позже, в 60-х годах стали систематически рассматривать

действия более общих групп — в основном локально-компактных групп — на общих пространствах с мерой. Пример Колмогорова был одним из первых, если не первым, в котором появилась не локально-компактная, а существенно бесконечномерная группа (S^∞). В последние годы теория представлений и действий бесконечномерных групп оказалась в центре внимания и специалистов по математической физике, топологов и вероятностников.

Кардинальное отличие локально-компактных и большинства бесконечномерных групп сказывается, например, в следующем факте, родственном обсуждаемой теме. Для локально-компактных групп положительное решение имеет следующая проблема лифтинга, поставленная независимо Дж. Макки и В. А. Рохлиным.

Теорема 1 (см. [2]–[4]). *Пусть задана локально-компактная группа $\{T_g\}$, $g \in G$, состоящая из классов mod 0 совпадающих преобразований пространства Лебега (X, μ) , сохраняющих меру μ . Тогда можно выбрать множество полной меры $\hat{X}$ и группу измеримых всюду определенных на нем преобразований $\{\hat{T}_g\}$, $g \in G$, так, что при всех $g \in G$ преобразование $\hat{T}_g$ лежит в классе mod 0 преобразования T_g .*

В доказательстве этой теоремы центральную роль играет построение так называемой свободной меры в линейном пространстве [3], линеаризующее конструкции теории меры, а также теорема о гладком векторе для представлений локально-компактных групп. Вопрос, для каких не локально-компактных групп имеет место такой же факт, исследован недостаточно.

Мы приведем лишь несколько вариаций на тему примера Колмогорова. Прежде всего, докажем, что для локально-компактных групп ситуация примера Колмогорова невозможна.

Теорема 2. *Пусть G — сепарабельная локально-компактная группа, непрерывно транзитивно действующая на метрическом сепарабельном пространстве X . Существует не более одной борелевской G -инвариантной вероятностной меры на X ; аналогично, существует одна с точностью до эквивалентности G -квазиинвариантная борелевская мера на X .*

Доказательство. Пусть μ — G -квазиинвариантная вероятностная борелевская мера на X . Поскольку X есть (левое) однородное пространство группы G , можно группу G расслоить над X со слоем — стационарная подгруппа G_x какой-либо точки $x \in X$. Рассмотрим левоинвариантную меру Хаара m_x на подгруппе G_x и представим группу G как пространство с мерой в виде прямого произведения базы (X, μ) и подгруппы (G_x, m_x) — это возможно в силу того, что над любой точкой $y \in X$ слой есть стационарная подгруппа этой точки, которая сопряжена с G_x , и сопряжение переводит меру Хаара на G_x в меру Хаара на G_y , следовательно, установлен изоморфизм слоев как пространств с мерой, что достаточно для изоморфизма сепарабельных пространств с мерой и, в частности, для изоморфизма глобального пространства, т.е. группы G с прямым произведением (разумеется, этот изоморфизм не является топологическим, вообще говоря). Но прямое произведение левоквазиинвариантных мер на сомножителях прямого произведения есть левоквазиинвариантная мера на прямом произведении относительно группы G . Поскольку на локально-компактной группе левоквазиинвариантная (как и правоквазиинвариантная) мера единственна с точностью до эквивалентности, то полученная мера на группе G эквивалентна мере Хаара. А тогда ее проекция на X определена с точностью до эквивалентности однозначно. Если мера μ была G -инвариантна, то тогда то же рассуждение показывает, что эта мера эквивалентна проекции меры Хаара и, следовательно, совпадает с единственной инвариантной мерой на однородном пространстве X . Теорема доказана.

Как видно, все рассуждение основано на единственности (с точностью до эквивалентности) квазиинвариантной меры на группе. Попутно заметим, что это — более специальный факт по сравнению с широко известной единственностью меры Хаара с точностью до множителя, он следует из сходных соображений и весьма полезен, хотя и не отмечается в стандартных руководствах.

Как только мы переходим к не локально-компактным группам, эти соображения перестают работать, так как даже квазиинвариантной меры относительно всех сдвигов уже не существует.

3. Дальнейшие примеры. Теперь мы покажем, что пример Колмогорова весьма характерен для бесконечномерных групп. Свежий пример такого рода возник в связи с работой автора по классификации измеримых функций нескольких аргументов и универсальности [8], [11].

Рассмотрим случайный граф в смысле Реньи–Эрдёша [6], т.е. граф со счетным числом вершин, ребра которого выбраны случайно (например, с вероятностью $\frac{1}{2}$ ребро между двумя вершинами ставится и с той же вероятностью не ставится, причем выбор происходит независимо по всем парам вершин). Известно, что с вероятностью единица такой граф изоморфен так называемому универсальному графу Γ , т.е. графу, в который вкладывается любой конечный граф и любые два изоморфных конечных подграфа которого могут быть совмещены автоморфизмом всего графа. Поскольку универсальный граф единственен с точностью до изоморфизма, отсюда следует, что почти все графы в смысле выбранной меры изоморфны между собой, т.е. переводятся друг в друга некоторой перенумерацией вершин.

Рассмотрим матрицы инцидентности графов, изоморфных универсальному ($c_{i,j} = 0$ или 1 в зависимости от того, соединены вершины ребром или нет). Легко описать такие матрицы непосредственно.

Лемма. *Симметричная 0–1 матрица A с нулевой диагональю является матрицей инцидентности графа, изоморфного универсальному, тогда и только тогда, когда выполнено следующее условие: для любого n и любого 0–1 вектора длины n существует столбец матрицы A , начинающийся с этого вектора.*

Обозначим множество таких матриц через $\mathcal{A}$.

Теорема 3. *Группа S^∞ , действующая на пространстве матриц одновременно подстановками строк и столбцов, сохраняет инвариантным множество $\mathcal{A}$ и действует на нем транзитивно. На этом множестве имеется континуум эргодических инвариантных относительно этой группы мер.*

Заметим, что меры Реньи–Эрдёша суть просто продакт-меры на множестве $\mathcal{A}$, иначе говоря, матричные элементы $c_{i,j}$ — независимы относительно этих мер при $i > j$. Но, в отличие от случая де Финетти (см. выше), продакт-меры составляют лишь небольшую часть всех S^∞ -инвариантных эргодических мер (см. [11]). Таким образом, мы снова находимся в той же ситуации, когда эргодические меры не различаются инвариантными множествами — такое множество единственно, как и в примере Колмогорова. Подобные примеры возникают в большом количестве в теории бесконечномерных групп.

4. Группы диффеоморфизмов. Интерес к примеру Колмогорова усилился в связи со следующим вопросом, поднятым в статье [5, с. 16], где цитируется пример Колмогорова: рассмотрим некоторую группу G диффеоморфизмов гладкого многообразия M , разумеется, она оставляет лебегову меру квазиинвариантной. Предположим, что группа G действует транзитивно на M ; существуют ли на M сингулярные квазиинвариантные относительно G меры? Если группа G содержит локально-компактную подгруппу диффеоморфизмов, действующую транзитивно, то из п. 3 вытекает, что других мер — нет. Но таких подгрупп в группе G может не быть. Однако это условие можно ослабить, и этого хватает для применений, рассмотренных в [5]. В то же время общий вопрос — может ли произвольная транзитивно действующая на многообразии группа диффеоморфизмов иметь сингулярную квазиинвариантную меру? — остается открытым.

Теорема 4. *Пусть группа G — замкнутая в C^1 -топологии подгруппа группы диффеоморфизмов $\text{Diff}(M)$ многообразия M . Предположим, что имеется конечное или счетное семейство однопараметрических подгрупп G_i , $i = 1, \dots$, порождающих подгруппу G . Если эта группа транзитивно действует на M , то лебегова мера является единственной с точностью до эквивалентности G -квазиинвариантной мерой.*

Наметим доказательство этой теоремы.

Так как поставленный вопрос является локальным, то, не умаляя общности, можно считать, что многообразие M есть открытый шар некоторой размерности d с центром в 0, группа G заменена некоторой группой ростков диффеоморфизмов в 0,

порожденной ростками нескольких однопараметрических подгрупп, и действует транзитивно в окрестности 0. Базой индукции по размерности служит одномерный случай, где ответ очевиден. Предположим, что утверждение доказано для размерностей $< d$, и рассмотрим размерность шара, равную d . Сформулируем лемму о перестройке однопараметрических подгрупп.

Лемма. Пусть C^1 -замкнутая группа ростков диффеоморфизмов шара размерности d порождена семейством ростков однопараметрических подгрупп, транзитивно действующих в некоторой окрестности 0. Тогда в этой группе можно найти такое семейство ростков однопараметрических подгрупп, которое действует транзитивно на слоях расслоения на шары размерности $d - 1$.

Предположим, что мы выделили такую подгруппу, которая транзитивно действует на каждом слое разбиения шара M на шары меньшей размерности $d - 1$. Тогда по индукционному предположению на слоях условные меры эквивалентны лебеговой мере. Выделим любую однопараметрическую подгруппу (росток), действующую трансверсально к разбиению на слои; по замечанию, сделанному выше, условные меры на орбитах этой подгруппы также эквивалентны лебеговой мере, тем самым, локально мера эквивалентна прямому произведению лебеговых мер.

5. Общие факты о разложении на эргодические компоненты. В заключение рассмотрим вопрос о разложении на эргодические компоненты действия произвольной группы, тесно связанный с вышеизложенными фактами. Пусть G — произвольная сепарабельная топологическая группа, которая действует на пространстве Лебега (X, μ) измеримым образом (т.е. отображение $G \times X \rightarrow X$ — измеримо в естественном смысле), сохраняя вероятностную меру μ . Часто возникает вопрос: имеет ли какой-либо инвариантный смысл разбиение на траектории этой группы? Более точно этот вопрос означает следующее: можно ли определить разбиение на траектории действия так, чтобы при изменении действия $\text{mod } 0$ разбиение также менялось $\text{mod } 0$? Уже для того, чтобы определить траекторное разбиение группы, нужно сначала построить индивидуальное действие этой группы на множестве полной меры, а затем необходимо проверить, что при изменении $\text{mod } 0$ действия каждого из элементов группы это разбиение тоже меняется на множестве нулевой меры. Если группа G счетна или локально-компактна, то траекторное разбиение можно корректно определить и это не совсем очевидное для континуальных групп утверждение следует из теоремы 3. Но в общем случае положение более сложное. Начать с того, что есть группы (например, группа всех унитарных операторов в бесконечномерном сепарабельном гильбертовом пространстве), которые имеют непрерывное действие (например, в пространстве со стандартной гауссовой мерой), но, скорее всего, вообще не имеют измеримой реализации, в частности, нельзя найти множество полной меры, на котором бы действовали корректно все преобразования сразу. Тем более, нельзя нетривиальным образом определить траекторное разбиение.

С другой стороны, для любой непрерывно действующей группы корректно определено измеримое разбиение на эргодические компоненты и, тем самым, понятие эргодического действия. Действительно, пусть G — произвольная сепарабельная топологическая группа и определено ее непрерывное представление в $L^2(X, \mu)$ унитарными операторами, отвечающими преобразованиям, сохраняющим меру μ . Рассмотрим подпространства в L^2 инвариантных относительно G функций. Легко видеть, что это подкольцо в смысле частичного умножения в L^2 и, по теореме Рохлина, ему отвечает измеримое разбиение, укрупняющее разбиение на траектории; при этом оно совпадает с ξ_G . Если определено разбиение на траектории (вообще говоря, не измеримое), то разбиение на эргодические компоненты есть его *измеримая оболочка*, т.е. наименьшее измеримое разбиение, укрупняющее разбиение на траектории. Если эта измеримая оболочка тривиальна, то действие группы эргодично. Поэтому для всякого действия сепарабельной группы на пространстве Лебега или на метрическом пространстве разложение на эргодические компоненты определено однозначно. Однако конструктивное его описание, как правило, весьма затруднительно.

Если мы находимся в топологической ситуации, т.е. рассматриваем действие произвольной группы гомеоморфизмов G компакта с инвариантной мерой, о чем идет речь в [1], то очевидным образом *разложение на эргодические компоненты совпадает с*

единственным разложением точки симплекса инвариантных мер по экстремальным точкам симплекса (см. [9]). Экстремальные точки этого симплекса соответствуют эргодическим мерам, и по общей теории Шоке носители мер попарно дизъюнкты (любые две эргодические инвариантные меры либо равны, либо взаимно сингулярны — этот факт верен также для всех сепарабельных групп, хотя наиболее эффективное его доказательство следует из индивидуальной эргодической теоремы, доказанной далеко не для всех групп и действий).

Из сравнительно новых фактов, относящихся к этому кругу вопросов, отметим следующий: для каких групп гомеоморфизмов компакта множество эргодических мер замкнуто и, наоборот, когда эргодические меры всюду плотны в множестве всех инвариантных мер? Например, действие группы подстановок S^∞ на пространстве последовательностей по теореме де Финетти имеет замкнутое множество эргодических инвариантных мер. То же верно и для многих подобных примеров — действий групп на пространстве путей диаграмм, отвечающих бесконечномерным аналогам классических групп. В то же время давно известно, что для многих коммутативных и амenable групп имеет место прямо противоположный факт — множество эргодических мер слабо всюду плотно в симплексе всех инвариантных мер. Как было доказано в [10]: любые два симплекса с всюду плотными множествами экстремальных точек аффинно изоморфны (такой симплекс называется симплексом Полсена (Poulsen)). Несколько неожиданное следствие этого результата в том, что аффинная структура симплекса инвариантных мер и, в частности, структура разложения мер на эргодические компоненты одинакова для всех динамических систем, для которых множество эргодических мер всюду плотно в множестве всех инвариантных мер. Например, имеет место следующее утверждение.

Теорема 5. *Симплексы инвариантных относительно трансляций мер на конфигурациях на решетках $\mathbb{Z}^d$ разной размерности $d = 1, 2, \dots$ метрически и аффинно изоморфны.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Фомин С. В. О мерах, инвариантных относительно некоторой группы преобразований. — Изв. АН СССР, 1950, т. 14, № 3, с. 261–274.
2. Mackey G. Point realizations of transformation groups. — Illinois J. Math., 1962, v. 6, № 2, p. 327–335.
3. Вершик А. М. Измеримые реализации непрерывных групп автоморфизмов унитарного кольца. — Изв. АН СССР, 1964, т. 20, № 1, с. 127–136.
4. Вершик А. М. Измеримые реализации групп автоморфизмов и интегральные представления положительных операторов. — Сиб. матем. журн., 1987, т. 28, № 1, с. 52–60.
5. Вершик А. М., Гельфанд И. М., Граев М. И. Представления группы диффеоморфизмов. — Успехи матем. наук, 1975, т. 30, № 6, с. 3–50.
6. Erdős P., Rényi A. Asymmetric graphs. — Acta Math. Acad. Sci. Hungar., 1963, v. 14, p. 295–315.
7. Окстоби Дж. Мера и категория. М.: Мир, 1974, 158 с.
8. Вершик А. М. Случайное метрическое пространство есть пространство Урысона. — Докл. АН СССР, 2002, т. 387, № 6, с. 1–4.
9. Фелпс Р. Лекции о теоремах Шоке. М.: Мир, 1968, 112 с.
10. Lusky W. A note on the paper «The Poulsen simplex» of Lindenstrauss, Olsen and Sternfeld. — Ann. Inst. Fourier (Grenoble), 1978, v. 28, № 2, p. 233–243.
11. Вершик А. М. Классификация измеримых функций нескольких аргументов и инвариантно распределенные случайные матрицы. — Функци. анализ и его прил., 2002, т. 36, № 2, с. 12–27.

Поступила в редакцию
5.II.2003