Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. М. Круглов, Нормальная и пуассоновская сходимости, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2003, том 48, выпуск 2, 392–398

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp292>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.187.58

26 апреля 2023 г., 10:49:35

© 2003 г.

КРУГЛОВ В. М.*

НОРМАЛЬНАЯ И ПУАССОНОВСКАЯ СХОДИМОСТИ¹⁾

Приведены необходимые и достаточные условия для слабой сходимости распределений сумм независимых случайных величин к нормальному и пуассоновскому распределениям в терминах моментов не выше четвертого порядка урезанных слагаемых и некоторого условия, гарантирующего асимптотическое равенство распределений упомянутых сумм и сумм урезанных слагаемых. Доказанные теоремы представляют собой аналоги известных критериев нормальной и пуассоновской сходимостей.

Ключевые слова и фразы: нормальная сходимость, пуассоновская сходимость, теорема Линдберга–Феллера, слабая сходимость, моменты случайных величин.

Предельные теоремы для сумм независимых случайных величин излагались с разной степенью подробности во многих монографиях и учебниках с тех пор, как они были впервые изложены в монографии [1]. Из большого числа теорем неизменно выделяют теоремы о сходимости распределений сумм к нормальному, пуассоновскому и вырожденному распределениям. О причинах особого интереса к этим трем теоремам можно узнать, в частности, из введения упомянутой монографии [1]. Формулировки этих трех теорем переписываются авторами новых монографий в том виде, в каком они появились в [1]. В предлагаемой заметке теоремам о сходимости к нормальному и пуассоновскому распределениям придается другая форма. Эти новые формулировки базируются на характеристиках нормального и пуассоновского распределений в классе безгранично делимых распределений. У нас нет полной уверенности в том, что характеристика этих распределений, особенно нормального, являются новыми. С другой стороны, в доступной нам литературе найти их не удалось.

1. Характеризации нормального и пуассоновского распределений.

Пусть $\mathbf{N}$ — множество натуральных чисел, $\mathbf{R}$ — множество вещественных чисел, Φ — стандартная нормальная функция распределения, $\Pi_\lambda(x) = \sum_{k \leq x} \lambda^k e^{-\lambda} / k!$, $x \in \mathbf{R}$, $k \in \mathbf{N}$, — пуассоновская функция распределения с параметром $\lambda > 0$.

Условимся говорить, что функция распределения F имеет нормальный тип, если $F(\sigma x + a) = \Phi(x)$ для всех $x \in \mathbf{R}$ и для некоторых $a \in \mathbf{R}$ и $\sigma > 0$. Функция распределения F имеет пуассоновский тип, если $F(x + a) = \Pi_\lambda(x)$ для всех $x \in \mathbf{R}$ или $F(x + a) = 1 - \Pi_\lambda(-x)$ для всех $x \in \mathbf{R}$ и для некоторых $a \in \mathbf{R}$ и $\lambda > 0$. Мы пользуемся стандартным обозначением $\Pi_\lambda(-x)$ для предела справа указанной функции в точке $-x$.

Пусть F — некоторая функция распределения. Первый момент (математическое ожидание) α и центральный момент k -го порядка β_k функции распределения F вычисляются по известным формулам $\alpha = \int_{-\infty}^{\infty} x dF(x)$, $\beta_k = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \alpha)^k dF(x)$, $k \in \mathbf{N}$. Если $F(\sigma x + a) = \Phi(x)$, то стандартные вычисления приводят к следующим равенствам: $\alpha = a$, $\beta_{2k+1} = 0$, $\beta_{2k} = \sigma^{2k} (2k)! / (k! 2^k)$, $k \in \mathbf{N}$. Если $F(x + a) = \Pi_\lambda(x)$, то $\alpha = a + \lambda$, $\beta_2 = \beta_3 = \lambda$, $\beta_4 = \lambda + 3\lambda^2$. Если $F(x + a) = 1 - \Pi_\lambda(-x)$, то $\alpha = a - \lambda$, $\beta_2 = \lambda$, $\beta_3 = -\lambda$, $\beta_4 = \lambda + 3\lambda^2$.

Теорема 1. Пусть F — невырожденная безгранично делимая функция распределения с конечным абсолютным моментом четвертого порядка, α — математическое ожидание и β_k , $k = 2, 3, 4$, — центральные моменты F .

* Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, факультет вычислительной математики и кибернетики, Ленинские горы, 119992 Москва, Россия; e-mail: vkrug@dataforce.net

¹⁾ Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, гранты 02-01-01080, 02-01-00949, 01-01-00644.

(i) Для того чтобы функция распределения F имела нормальный тип, необходимо и достаточно, чтобы $\beta_4 \leq 3\beta_2^2$.

(ii) Для того чтобы функция распределения F имела пуассоновский тип, необходимо и достаточно, чтобы $\beta_2 \leq |\beta_3|$ и $\beta_4 \leq \beta_2 + 3\beta_2^2$. Более того, если дополнительно известно, что $\alpha = \beta_2 \leq \beta_3$, то F совпадает с Π_λ .

Доказательство. Докажем сначала (i). Если функция распределения F имеет нормальный тип, то $\beta_4 = 3\beta_2^2$. Пусть F — невырожденная безгранично делимая функция распределения с конечным абсолютным моментом четвертого порядка и выполнено неравенство $\beta_4 \leq 3\beta_2^2$. Характеристическая функция, соответствующая F , может быть записана по формуле Колмогорова (см. [1, с. 92])

$$f(t) = \exp \left\{ i\gamma t + \int_{-\infty}^{\infty} (e^{itx} - 1 - itx) x^{-2} dK(x) \right\}, \quad t \in \mathbf{R}, \quad (1)$$

где γ — вещественное число, K — неубывающая, непрерывная слева, ограниченная функция, определенная на $\mathbf{R}$. Указанное представление f единственно, если $K(-\infty) = 0$. Мы будем предполагать, что последнее условие выполнено. Воспользовавшись известным равенством $f^{(k)}(0) = i^k \int_{-\infty}^{\infty} x^k dF(x)$ между k -м моментом функции распределения F и k -й производной характеристической функции f , вычисленной в нуле, мы получим

$$\beta_2 = \int_{-\infty}^{\infty} dK(x), \quad \beta_3 = \int_{-\infty}^{\infty} x dK(x), \quad \beta_4 = 3 \left(\int_{-\infty}^{\infty} dK(x) \right)^2 + \int_{-\infty}^{\infty} x^2 dK(x). \quad (2)$$

Отсюда и из предполагаемого неравенства $\beta_4 \leq 3\beta_2^2$ следует, что $K(x) = 0$, если $x \leq 0$, и $K(x) = \sigma^2 > 0$ — постоянная, если $x > 0$. Обращаясь к формуле (1), мы видим, что функция распределения F имеет нормальный тип.

Докажем теперь (ii). Если функция распределения F имеет пуассоновский тип, то $\beta_2 = |\beta_3|$ и $\beta_4 = \beta_2 + 3\beta_2^2$. Пусть F — невырожденная безгранично делимая функция распределения с конечным абсолютным моментом четвертого порядка и выполняются неравенства $\beta_2 \leq |\beta_3|$ и $\beta_4 \leq \beta_2 + 3\beta_2^2$. Из (2) и из неравенства $\beta_4 \leq \beta_2 + 3\beta_2^2$ следует, что $\int_{-\infty}^{\infty} x^2 dK(x) \leq \beta_2$. Последнее неравенство вместе с предположением, что $\beta_2 \leq |\beta_3|$, дают

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2 dK(x) \int_{-\infty}^{\infty} dK(x) \leq |\beta_3|^2 = \left(\int_{-\infty}^{\infty} x dK(x) \right)^2. \quad (3)$$

По неравенству Коши–Буняковского правая часть неравенства (3) не превосходит левой части, и, следовательно, оно обращается в равенство. Неравенство Коши–Буняковского (3) обращается в равенство тогда и только тогда, когда существует вещественное число b такое, что $\int_{-\infty}^{\infty} (x - b)^2 dK(x) = 0$. Последнее равенство означает, что $K(x) = 0$, если $x \leq b$, и $K(x) = \lambda > 0$ — постоянная, если $x > b$. Привлекая (2), мы получим, что $\beta_2 = \lambda$, $\beta_3 = b\lambda$, $\beta_4 = 3\lambda^2 + b^2\lambda$. Отсюда и из предполагаемых неравенств $\beta_2 \leq |\beta_3|$ и $\beta_4 \leq 3\beta_2^2 + \beta_2$ вытекает, что $|b| = 1$. Характеристическая функция (1) принимает вид $f(t) = \exp\{it(\gamma - \lambda b) + \lambda(e^{itb} - 1)\}$, и, следовательно, F имеет пуассоновский тип. Далее, если дополнительно известно, что $\alpha = \beta_2 \leq \beta_3$, то $b = 1$, $\gamma = \lambda$ и, следовательно, $F = \Pi_\lambda$. Теорема доказана.

2. Аналоги классических критериев. Пусть на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ определены случайные величины $X_{n,k}$, $k = 1, \dots, m_n$, $n \in \mathbf{N}$, независимые для каждого $n \in \mathbf{N}$ и удовлетворяющие условию предельной равномерной малости:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \max_{1 \leq k \leq m_n} \mathbf{P}\{|X_{n,k}| > \varepsilon\} = 0, \quad \forall \varepsilon > 0. \quad (4)$$

Пусть τ — фиксированное положительное число, $I[A]$ — индикаторная функция множества $A \subseteq \Omega$, $S_n = X_{n,1} + \dots + X_{n,m_n}$, $X_{n,k}(\tau) = X_{n,k} I[|X_{n,k}| \leq \tau]$, $S_n(\tau) = X_{n,1}(\tau) + \dots + X_{n,m_n}(\tau)$, F_n — функция распределения случайной величины $S_n(\tau)$. В формулировках нижеиследующих теорем будут фигурировать математические ожидания и центральные моменты второго — четвертого порядков сумм $S_n(\tau)$. Подчеркнем, что предлагаемые условия для нормальной и пуассоновской сходимостей, на

самом деле, выражаются в терминах отдельных слагаемых, так как величины $\mathbf{E}S_n(\tau)$, $\mathbf{E}[S_n(\tau) - \mathbf{E}S_n(\tau)]^2$ и $\mathbf{E}[S_n(\tau) - \mathbf{E}S_n(\tau)]^3$ являются суммами аналогичных моментов слагаемых и

$$\begin{aligned} \mathbf{E}[X_{n,k}(\tau) - \mathbf{E}X_{n,k}(\tau)]^4 &= \sum_{k=1}^{m_n} \mathbf{E}[X_{n,k}(\tau) - \mathbf{E}X_{n,k}(\tau)]^4 \\ &\quad + 6 \sum_{1 \leq k < l \leq m_n} \mathbf{E}[X_{n,k}(\tau) - \mathbf{E}X_{n,k}(\tau)]^2 \mathbf{E}[X_{n,l}(\tau) - \mathbf{E}X_{n,l}(\tau)]^2. \end{aligned}$$

Следующая теорема представляет собой аналог известного (см. [1, с. 136] или [2, с. 329]) критерия нормальной сходимости. Можно надеяться, что предлагаемые условия в некоторых случаях окажутся более удобными для проверки.

Теорема 2. Пусть даны числа $\alpha \in \mathbf{R}$ и $\sigma > 0$. Предположим, что выполнено условие (4). Для того чтобы

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}\{S_n < x\} = \Phi(\sigma^{-1}(x - \alpha)), \quad \forall x \in \mathbf{R}, \quad (5)$$

необходимо и достаточно, чтобы для некоторого $\tau > 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{m_n} \mathbf{P}\{|X_{n,k}| > \tau\} = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{E}S_n(\tau) = \alpha, \quad (6)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{E}[S_n(\tau) - \mathbf{E}S_n(\tau)]^2 = \sigma^2, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{E}[S_n(\tau) - \mathbf{E}S_n(\tau)]^4 \leq 3\sigma^4. \quad (7)$$

Доказательство. Необходимость. Если выполнены (4) и (5), то условия (6) и первое условие в (7) выполняются по упомянутому выше критерию нормальной сходимости. Привлекая равенства

$$\mathbf{P}\{|S_n - S_n(\tau)| > 0\} \leq \mathbf{P}\left\{\max_{1 \leq k \leq m_n} |X_{n,k}| > \tau\right\} \leq \sum_{k=1}^{m_n} \mathbf{P}\{|X_{n,k}| > \tau\} \quad (8)$$

и первое условие в (6), мы видим, что последовательность $\{F_n\}_{n \geq 1}$ слабо сходится к нормальной функции распределения с параметрами α и σ^2 . Убедимся, что последовательность случайных величин $\{|S_n(\tau) - \mathbf{E}S_n(\tau)|^4\}_{n \geq 1}$ равномерно интегрируема. Для этого достаточно доказать, что

$$\sup_{n \in \mathbf{N}} \mathbf{E}|S_n(\tau) - \mathbf{E}S_n(\tau)|^6 < \infty. \quad (9)$$

С целью доказать (9) воспользуемся равенством

$$\begin{aligned} \mathbf{E}|S_n(\tau) - \mathbf{E}S_n(\tau)|^6 &= \sum_{k=1}^{m_n} \mathbf{E}|X_{n,k}(\tau) - \mathbf{E}X_{n,k}(\tau)|^6 \\ &\quad + 15 \sum_{1 \leq i \neq j \leq m_n} \mathbf{E}|X_{n,i}(\tau) - \mathbf{E}X_{n,i}(\tau)|^4 \mathbf{E}|X_{n,j}(\tau) - \mathbf{E}X_{n,j}(\tau)|^2 \\ &\quad + 20 \sum_{1 \leq i < j \leq m_n} \mathbf{E}[X_{n,i}(\tau) - \mathbf{E}X_{n,i}(\tau)]^3 \mathbf{E}[X_{n,j}(\tau) - \mathbf{E}X_{n,j}(\tau)]^3 + 90 \sum_{1 \leq i < j < k \leq m_n} A_{i,j,k}, \end{aligned}$$

где $A_{i,j,k} = \mathbf{E}|X_{n,i}(\tau) - \mathbf{E}X_{n,i}(\tau)|^2 \mathbf{E}|X_{n,j}(\tau) - \mathbf{E}X_{n,j}(\tau)|^2 \mathbf{E}|X_{n,k}(\tau) - \mathbf{E}X_{n,k}(\tau)|^2$. Так как $|X_{n,i}(\tau) - \mathbf{E}X_{n,i}(\tau)| \leq 2\tau$, то

$$\begin{aligned} \mathbf{E}|S_n(\tau) - \mathbf{E}S_n(\tau)|^6 &\leq (2\tau)^4 \sum_{k=1}^{m_n} \mathbf{E}|X_{n,k}(\tau) - \mathbf{E}X_{n,k}(\tau)|^2 \\ &\quad + 35(2\tau)^2 \left(\sum_{k=1}^{m_n} \mathbf{E}|X_{n,k}(\tau) - \mathbf{E}X_{n,k}(\tau)|^2 \right)^2 + 90 \left(\sum_{k=1}^{m_n} \mathbf{E}|X_{n,k}(\tau) - \mathbf{E}X_{n,k}(\tau)|^2 \right)^3. \end{aligned}$$

Отсюда и из первого условия в (7) следует (9). По известной теореме (см. [2, с. 196])

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{E}[S_n(\tau) - \mathbf{E}S_n(\tau)]^4 = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \alpha)^4 d\Phi\left(\frac{x - \alpha}{\sigma}\right) = 3\sigma^4.$$

Доказательство необходимости условий теоремы завершено.

Достаточность. Для любого $\varepsilon > 0$ выполняется неравенство

$$\mathbf{P}\{|X_{n,k}(\tau)| > \varepsilon\} \leq \mathbf{P}\{|X_{n,k}| > \varepsilon\} + \mathbf{P}\{|X_{n,k}| > \tau\}.$$

Отсюда и из условия (4) следует, что слагаемые сумм $S_n(\tau)$, $n \in \mathbf{N}$, удовлетворяют условию предельной равномерной малости. Из второго условия в (6) и из первого условия в (7) вытекает, что последовательность функций распределения $\{F_n\}_{n \geq 1}$ условно слабо компактна. Пусть $\{F_{k_n}\}_{n \geq 1}$ — подпоследовательность последовательности $\{F_n\}_{n \geq 1}$ — слабо сходится к функции распределения F . По теореме Хинчина (см. [1, с. 123]) F — безгранично делимая функция распределения. Обратим внимание, что снова выполняется (9). Привлекая второе условие в (6), условия (7) и упомянутую выше теорему (см. [2, с. 196]), мы получим

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{E}|S_{k_n}(\tau) - \mathbf{E}S_{k_n}(\tau)|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \alpha)^2 dF(x), \\ 3\sigma^4 &\geq \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{E}|S_{k_n}(\tau) - \mathbf{E}S_{k_n}(\tau)|^4 = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \alpha)^4 dF(x). \end{aligned}$$

По теореме 1(i) F — нормальная функция распределения с математическим ожиданием α и дисперсией σ^2 . Мы доказали, что каждая слабо сходящаяся подпоследовательность последовательности $\{F_n\}_{n \geq 1}$ имеет своим пределом нормальную функцию распределения с параметрами α и σ^2 . Последнее означает, что сама последовательность $\{F_n\}_{n \geq 1}$ слабо сходится к нормальной функции распределения с указанными параметрами. Привлекая первое условие в (6) и неравенства (8), мы приходим к (5). Теорема доказана.

Следующей нашей целью является придать новую форму знаменитой теореме Линдеберга–Феллера.

Теорема 3. Пусть дано число $\sigma > 0$. Предположим, что выполнено условие (4) и

$$\sum_{k=1}^{m_n} \mathbf{E}X_{n,k}^2 = \sigma^2, \quad \mathbf{E}X_{n,k} = 0, \quad k = 1, \dots, m_n, \quad n \in \mathbf{N}. \quad (10)$$

Для того чтобы

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}\{S_n < x\} = \Phi\left(\frac{x}{\sigma}\right), \quad \forall x \in \mathbf{R}, \quad (11)$$

необходимо и достаточно, чтобы для некоторого $\tau > 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{m_n} \int_{|x| > \tau} x^2 d\mathbf{P}\{X_{n,k} < x\} = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{E}[S_n(\tau) - \mathbf{E}S_n(\tau)]^4 \leq 3\sigma^4. \quad (12)$$

Доказательство. Если выполнены (4), (10) и (11), то первое условие в (12) выполняется по теореме Линдеберга–Феллера (см. [1, с. 110] или [2, с. 294]). Второе условие в (12) вытекает из (9) и (11). Доказательство достаточности можно скопировать с незначительными изменениями с доказательства достаточности условия из предыдущей теоремы. Теорема доказана.

Заметим, что в условиях теоремы 3 второе условие в (12) равносильно условию $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{E}S_n^4(\tau) \leq 3\sigma^4$. Для этого достаточно убедиться, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{E}S_n(\tau) = 0$, так как $\mathbf{E}[S_n(\tau) - \mathbf{E}S_n(\tau)]^4 = \sum_{k=0}^4 C_4^k \mathbf{E}S_n^k(\tau)(\mathbf{E}S_n(\tau))^{4-k}$ и справедливо (9). Требуемое утверждение является следствием условий (10), первого условия в (12) и следующих соотношений:

$$|\mathbf{E}S_n(\tau)| = \left| - \sum_{k=1}^{m_n} \int_{|x| > \tau} x d\mathbf{P}\{X_{n,k} < x\} \right| \leq \frac{1}{\tau} \sum_{k=1}^{m_n} \int_{|x| > \tau} x^2 d\mathbf{P}\{X_{n,k} < x\}.$$

Классический критерий пуассоновской сходимости (см. [1, с. 141] или [2, с. 330]) также можно сформулировать в новой форме.

Теорема 4. Пусть дано число $\lambda > 0$. Предположим, что выполнено условие (4). Для того чтобы

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}\{S_n < x\} = \Pi_\lambda(x) \quad (13)$$

для любого $x \in \mathbf{R}$ — точки непрерывности функции Π_λ , необходимо и достаточно, чтобы для некоторого $\tau > 1$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{m_n} \mathbf{P}\{|X_{n,k}| > \tau\} = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{E}S_n(\tau) = \lambda, \quad (14)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{E}[S_n(\tau) - \mathbf{E}S_n(\tau)]^2 = \lambda \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{E}[S_n(\tau) - \mathbf{E}S_n(\tau)]^3, \quad (15)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{E}[S_n(\tau) - \mathbf{E}S_n(\tau)]^4 \leq \lambda + 3\lambda^2. \quad (16)$$

Доказательство. Необходимость. Если выполнены условия (4) и (13), то условия (14) и первое условие в (15) выполняется по упомянутому выше критерию пуассоновской сходимости. Второе условие в (15) и условие (16) вытекают из (9), (13) и из теоремы 1(ii).

Достаточность. Из второго условия в (14) и первого условия в (15) следует, что последовательность $\{F_n\}_{n \geq 1}$ условно слабо компактна. Пусть F — функция распределения, предельная для некоторой подпоследовательности последовательности $\{F_n\}_{n \geq 1}$. Рассуждая, как при доказательстве достаточности условий в теореме 2, мы убедимся, что слагаемые сумм $S_n(\tau)$ удовлетворяют условию предельной равномерной малости. По теореме Хинчина (см. [1, с. 123]) F — безгранично делимая функция распределения. Далее мы можем рассуждать, как рассуждали при доказательстве достаточности условий в теореме 2. Привлекая (9) и условия (14)–(16), мы убедимся в справедливости следующих соотношений:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x dF(x) = \lambda, \quad \int_{-\infty}^{\infty} (x - \lambda)^2 dF(x) = \lambda, \quad \int_{-\infty}^{\infty} (x - \lambda)^4 dF(x) \leq 3\lambda^2 + \lambda.$$

По теореме 1(ii) $F = \Pi_\lambda$. Мы доказали, что каждая слабо сходящаяся подпоследовательность последовательности $\{F_n\}_{n \geq 1}$ имеет своим пределом пуассоновскую функцию распределения Π_λ . Последнее означает, что сама последовательность $\{F_n\}_{n \geq 1}$ слабо сходится к Π_λ . Привлекая (8) и первое условие в (14), мы приходим к (13). Теорема доказана.

3. Новая форма теоремы Золотарева. Современное состояние теории предельных теорем подытожено в монографии [3]. Одним из центральных результатов этой теории является теорема Золотарева, обобщающая теорему Линдеберга–Феллера на случай, когда условие (4) нарушено. В этом пункте мы приводим новый вариант теоремы Золотарева.

Предположим, что случайные величины $X_{n,k}$, $k = 1, \dots, m_n$, $n \in \mathbf{N}$, удовлетворяют условиям (10). Пусть $F_{n,k}$ — функция распределения случайной величины $X_{n,k}$, $\Phi_{n,k}$ — нормальная функция распределения с нулевым математическим ожиданием и дисперсией $\mathbf{E}X_{n,k}^2$, L — расстояние Леви (метрика на множестве функций распределения, определенных на вещественной прямой; ее определение приведено в [1, с. 38]), $\alpha_n = \max_{1 \leq k \leq m_n} L(F_{n,k}, \Phi_{n,k})$, $U_n = \{k \in \{1, \dots, m_n\} : \mathbf{E}X_{n,k}^2 < \sqrt{\alpha_n}\}$,

$$B_{n,2}(\tau) = \mathbf{E} \left[\sum_{k \in U_n} (X_{n,k}(\tau) - \mathbf{E}X_{n,k}(\tau)) \right]^2, \quad B_{n,4}(\tau) = \mathbf{E} \left[\sum_{k \in U_n} (X_{n,k}(\tau) - \mathbf{E}X_{n,k}(\tau)) \right]^4.$$

Величины $B_{n,2}(\tau)$ и $B_{n,4}(\tau)$ полагаются равными нулю, если U_n — пустое множество.

Теорема 5. Пусть дано число $\sigma > 0$. Предположим, что выполнены условия (10). Для того чтобы выполнялось (11), необходимо и достаточно, чтобы $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0$ и для некоторого $\tau > 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k \in U_n} \int_{|x| > \tau} x^2 dF_{n,k}(x) = 0, \quad \liminf_{n \rightarrow \infty} (3B_{n,2}^2(\tau) - B_{n,4}(\tau)) \geq 0. \quad (17)$$

Доказательство. Необходимость. Если выполнены (10) и (11), то условие $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0$ и первое условие в (17) выполняются по теореме Золотарева (см. [3, с. 312] или [4]). Докажем второе условие в (17). Пусть $\bar{U}_n = \{1, \dots, m_n\} \setminus U_n$, G_n^1, G_n^2, G_n^3 — функции распределения соответственно $\sum_{k \in \bar{U}_n} X_{n,k}$, $\sum_{k \in U_n} X_{n,k}$, $\sum_{k \in U_n} (X_{n,k}(\tau) - \mathbf{E}X_{n,k}(\tau))$. В силу условий (10) и неравенства Чебышева мы имеем, что $G_n^k(-x) + 1 - G_n^k(x) \leq x^{-2}\sigma^2$, $k = 1, 2$, для любого $x > 0$. Последнее неравенство влечет условную слабую компактность последовательностей $\{G_n^k\}_{n \geq 1}$, $k = 1, 2$. Обратим внимание на следующие соотношения:

$$\mathbf{P}\left\{\left|\sum_{k \in U_n} (X_{n,k} - X_{n,k}(\tau))\right| > 0\right\} \leq \sum_{k \in U_n} \mathbf{P}\{|X_{n,k}| > \tau\} \leq \frac{1}{\tau^2} \sum_{k \in U_n} \int_{|x| > \tau} x^2 dF_{n,k}(x),$$

$$\left|\sum_{k \in U_n} \mathbf{E}X_{n,k}(\tau)\right| = \left|-\sum_{k \in U_n} \int_{|x| > \tau} x dF_{n,k}\right| \leq \frac{1}{\tau} \sum_{k \in U_n} \int_{|x| > \tau} x^2 dF_{n,k}(x). \quad (18)$$

Из этих соотношений и из первого условия в (17) следует, что последовательность $\{G_n^3\}_{n \geq 1}$ условно слабо компактна. Более того, предельные функции распределения для соответствующих слабо сходящихся подпоследовательностей последовательностей $\{G_n^2\}_{n \geq 1}$ и $\{G_n^3\}_{n \geq 1}$ совпадают. Пусть $\{k_n\}_{n \geq 1}$ — неубывающая последовательность натуральных чисел такая, что $\lim_{n \rightarrow \infty} (3B_{k_n,2}^2(\tau) - B_{k_n,4}(\tau)) = \liminf_{n \rightarrow \infty} (3B_{n,2}^2(\tau) - B_{n,4}(\tau))$. Выберем подпоследовательность последовательности $\{k_n\}_{n \geq 1}$ такую, чтобы соответствующие подпоследовательности последовательностей $\{G_{k_n}^1\}_{n \geq 1}$ и $\{G_{k_n}^2\}_{n \geq 1}$ слабо сходились. Без ограничения общности рассуждений можно считать, что сами эти последовательности слабо сходятся, скажем, к функциям распределения G^1 и G^2 . В силу (11) свертка G^1 и G^2 является нормальной функцией распределения. По теореме Крамера (см. [2, с. 286]) G^1 и G^2 — нормальные функции распределения. Выше было отмечено, что последовательность $\{G_{k_n}^3\}_{n \geq 1}$ также слабо сходится к G^2 . Рассуждая, как при доказательстве (9), мы убедимся, что $\sup_{n \in \mathbf{N}} \mathbf{E}|\sum_{k \in U_n} (X_{n,k}(\tau) - \mathbf{E}X_{n,k}(\tau))|^6 < \infty$. По известной теореме (см. [2, с. 196])

$$0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} x dG_{k_n}^3(x) = \int_{-\infty}^{\infty} x dG^2(x), \quad (19)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} B_{k_n,2} = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 dG^2(x), \quad \lim_{n \rightarrow \infty} B_{k_n,4} = \int_{-\infty}^{\infty} x^4 dG^2(x). \quad (20)$$

Отсюда следует второе условие в (17), так как G^2 — нормальная функция распределения с нулевым математическим ожиданием.

Достаточность. Из условий (10) следует, что последовательности $\{G_n^1\}_{n \geq 1}$ и $\{G_n^2\}_{n \geq 1}$ условно слабо компактны. Обозначим Φ_n^1 свертку нормальных функций распределения $\Phi_{n,k}$, $k \in \bar{U}_n$ и $\sigma_{n,1}^2 = \sum_{k \in \bar{U}_n} \mathbf{E}X_{n,k}^2$, $\sigma_{n,2}^2 = \sum_{k \in U_n} \mathbf{E}X_{n,k}^2$. В упомянутой статье [4] доказано, что равенство $\lim_{n \rightarrow \infty} L(G_n^1, \Phi_n^1) = 0$ является следствием условия $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0$. Пусть $\{k_n\}_{n \geq 1}$ — возрастающая подпоследовательность натуральных чисел такая, что подпоследовательности $\{G_{k_n}^1\}_{n \geq 1}$ и $\{G_{k_n}^2\}_{n \geq 1}$ слабо сходятся, скажем, к функциям распределения G^1 и G^2 , числовые последовательности $\{\sigma_{k_n,1}^2\}_{n \geq 1}$ и $\{\sigma_{k_n,2}^2\}_{n \geq 1}$ сходятся, скажем, к числам σ_1^2 и σ_2^2 , числовые последовательности $\{B_{k_n,2}\}_{n \geq 1}$ и $\{B_{k_n,4}\}_{n \geq 1}$ сходятся, скажем, к числам B_2 и B_4 . Если $\sigma_2^2 = 0$, то последовательности $\{\Phi_{k_n}^1\}_{n \geq 1}$ и $\{G_{k_n}^2\}_{n \geq 1}$ слабо сходятся соответственно к $\Phi(x/\sigma)$ и к функции распределения, вырожденной в нуле. Отсюда следует (11), так как последовательности $\{\Phi_{k_n}^1\}_{n \geq 1}$ и $\{G_{k_n}^1\}_{n \geq 1}$ имеют общий слабый предел. Предположим теперь, что $\sigma_2^2 > 0$. Слагаемые суммы $\sum_{k \in U_n} X_{n,k}$ удовлетворяют условию (4). По упомянутой теореме Хинчина (см. [1, с. 123]) G^2 — безгранично делимая функция распределения. Как при доказательстве необходимости условий, мы убедимся, что последовательность $\{G_n^3\}_{n \geq 1}$ слабо компактна, предельные функции распределения для соответствующих слабо сходящихся подпоследовательностей последовательностей $\{G_n^2\}_{n \geq 1}$ и $\{G_n^3\}_{n \geq 1}$ совпадают и выполняются равенства (19) и (20). В силу второго условия в (17) и теоремы 1(i), G^2 — нормальная функция распределения. Она имеет нулевое математическое ожидание и дисперсию, скажем, Δ_2^2 .

Заметим, что $\sum_{k \in U_n} |\int_{-\infty}^{\infty} x^2 dF_{n,k}(x) - \int_{|x| \leq \tau} x^2 dF_{n,k}(x)| \leq \sum_{k \in U_n} \int_{|x| > \tau} x^2 dF_{n,k}(x)$. Привлекая первое условие в (17), (18) и первое равенство в (20), мы убедимся, что $\Delta_2^2 = \sigma_2^2$. Подытоживая, мы находим, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}\{S_{k_n} < x\} = \lim_{n \rightarrow \infty} G_{k_n}^1 * G_{k_n}^2(x) = \Phi(\sigma^{-1}x), \quad \forall x \in \mathbf{R}.$$

Доказано, что любая слабо сходящаяся подпоследовательность последовательности распределений сумм S_n имеет своим слабым пределом нормальную функцию распределения с нулевым математическим ожиданием и дисперсией σ^2 . Это доказывает (11). Теорема доказана.

4. Заключительные замечания. В формулировках теорем 1–5 присутствуют условия, выраженные в виде неравенств между моментами случайных величин. На самом деле, эти неравенства обращаются в равенства. Тем не менее мы сформулировали эти условия в виде неравенств, считая, что в конкретных ситуациях доказать неравенства проще, чем доказать равенства.

Читатель, несомненно, заметил, что условие $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{m_n} \mathbf{P}\{|X_{n,k}| > \tau\} = 0$ заимствовано из традиционных формулировок критериев нормальной, пуассоновской и вырожденной сходимостей. В традиционных формулировках требуется, чтобы это условие выполнялось для любого $\tau > 0$. В наших формулировках требуется, чтобы оно выполнялось для некоторого $\tau > 0$.

Последнее наше замечание касается формулировки известного критерия вырожденной сходимости (см. [1, с. 143] или [2, с. 331]). Нам представляется, что она страдает некоторой избыточностью. Сначала мы приведем нашу формулировку, а затем укажем на имеющуюся, по нашему мнению, избыточность в традиционной формулировке критерия.

Теорема 6. Пусть выполнено условие (4). Для того чтобы

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}\{|S_n| > \varepsilon\} = 0, \quad \forall \varepsilon > 0, \quad (21)$$

необходимо и достаточно, чтобы для некоторого $\tau > 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{m_n} \mathbf{P}\{|X_{n,k}| > \tau\} = 0, \quad (22)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{E}S_n(\tau) = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{E}|S_n(\tau) - \mathbf{E}S_n(\tau)|^2 = 0. \quad (23)$$

Доказательство. Если выполнены (4) и (21), то условия (22) и (23) выполняются по упомянутому выше критерию вырожденной сходимости.

Достаточность. Если выполнены условия (23), то с помощью неравенства Чебышева легко убедиться, что последовательность сумм $\{S_n(\tau)\}_{n \geq 1}$ сходится по вероятности к нулю. Утверждение (21) теперь следует из (8) и (22). Теорема доказана.

Напомним, что традиционная формулировка критерия вырожденной сходимости гласит: утверждение (21) выполняется тогда и только тогда, когда условие (22) выполняется для *любого* $\tau > 0$ и условия (23) выполняются для *некоторого* $\tau > 0$. Требование, чтобы условие (22) выполнялось для *любого* $\tau > 0$ страдает избыточностью.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гнеденко Б. В., Колмогоров А. Н. Предельные распределения для сумм независимых случайных величин. М.: ГИТТЛ, 1949, 264 с.
2. Лозв М. Теория вероятностей. М.: ИЛ, 1962, 719 с.
3. Золотарев В. М. Современная теория суммирования независимых случайных величин. М.: Наука, 1986, 415 с.
4. Золотарев В. М. Обобщение теоремы Линдберга–Феллера. — Теория вероятн. и ее примен., 1967, т. 12, в. 4, с. 666–677.

Поступила в редакцию
31.X.2002