Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Куликова, Ю. В. Прохоров, Распределение дробных долей случайных векторов: гауссовский случай. I, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2003, том 48, выпуск 2, 399–402

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp293>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.135.184

26 апреля 2023 г., 14:37:35

© 2003 г.

КУЛИКОВА А. А.*, ПРОХОРОВ Ю. В.**

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ДРОБНЫХ ДОЛЕЙ СЛУЧАЙНЫХ ВЕКТОРОВ: ГАУССОВСКИЙ СЛУЧАЙ. I¹⁾

В статье рассматривается распределение вероятностей дробной части s -мерного гауссовского случайного вектора. Доказаны неравенства для отклонения этого распределения от равномерного. Доказательства используют формулу суммирования Пуассона и некоторые факты теории представлений целых чисел квадратичными формами. Основное внимание этой части работы уделено случаю относительно небольших значений s . Случай весьма больших значений s будет рассмотрен дополнительно.

Ключевые слова и фразы: равномерное распределение, формула суммирования Пуассона, дробные доли гауссовских векторов.

1. Обозначения. Будут использованы следующие обозначения. Если $x = (x_1, \dots, x_s) \in \mathbf{R}^s$, то $|x| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_s^2}$; если $t = (t_1, \dots, t_s) \in \mathbf{R}^s$, то $(t, x) = t_1 x_1 + \dots + t_s x_s$; $\mathbf{Z}^s$ — совокупность всех точек $\mathbf{R}^s$ с целочисленными координатами; $V_s = \pi^{s/2} / \Gamma(s/2 + 1)$ — объем единичного шара в $\mathbf{R}^s$; $f(t; X)$ — характеристическая функция случайного вектора $X \in \mathbf{R}^s$; $p(x; X)$ — соответствующая плотность вероятности (если она существует); если $z \in \mathbf{R}$, то $\{z\}$ — дробная часть числа z ; если $z = (z_1, \dots, z_s) \in \mathbf{R}^s$, то $\{z\} = (\{z_1\}, \dots, \{z_s\})$; $r_s(N)$ — число целых точек на сфере $|m|^2 = N$ в $\mathbf{R}^s$; $\sigma_k(N)$ — сумма k -х степеней делителей числа N ; $\tilde{\sigma}_1(N)$ — сумма делителей N , кратных четырем.

2. Оценка величины $|p(x; \{\sigma X\}) - 1|$. Пусть X — гауссовский случайный вектор в пространстве $\mathbf{R}^s$ с нулевым средним и матрицей ковариации Σ , $\lambda > 0$ — минимальное собственное значение Σ . Характеристическая функция X имеет вид

$$f(t; X) = e^{-(\Sigma t, t)/2}.$$

Оценим отклонение случайной величины $\{\sigma X\}$ ($\sigma > 0$) от равномерного распределения в кубе $[0, 1]^s$.

Пользуясь формулой суммирования Пуассона, получаем при $x \in [0, 1]^s$

$$\begin{aligned} p(x; \{\sigma X\}) &= \sum_{l \in \mathbf{Z}^s} p(x_1 + l_1, \dots, x_s + l_s; \sigma X) = \sum_{m \in \mathbf{Z}^s} f(2\pi m; \sigma X) e^{-2\pi i(m, x)} \\ &= 1 + \sum_{m \in \mathbf{Z}^s, m \neq 0} e^{-(\sigma^2 \Sigma(2\pi m), 2\pi m)/2} e^{-2\pi i(m, x)} \\ &= 1 + \sum_{m \in \mathbf{Z}^s, m \neq 0} e^{-2\pi^2 \sigma^2 (\Sigma m, m)} e^{-2\pi i(m, x)}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\Delta = \sup_{x \in [0, 1]^s} |p(x; \{\sigma X\}) - 1| = \left| \sum_{m \in \mathbf{Z}^s, m \neq 0} e^{-2\pi^2 \sigma^2 (\Sigma m, m)} e^{-2\pi i(m, x)} \right|$$

* Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, факультет вычислительной математики и кибернетики, Ленинские горы, 119992 Москва, Россия; e-mail: anna.q@mail.ru

** Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, ул. Губкина, 8, 119991 Москва, ГСП-1, Россия.

¹⁾ Работа выполнена при частичной поддержке РФФИ (грант № 03-01-00259).

$$\begin{aligned} &\leq \sum_{m \in \mathbf{Z}^s, m \neq 0} \left| e^{-2\pi^2 \sigma^2 (\Sigma m, m)} e^{-2\pi i (m, x)} \right| = \sum_{m \in \mathbf{Z}^s, m \neq 0} e^{-2\pi^2 \sigma^2 (\Sigma m, m)} \\ &\leq \sum_{m \in \mathbf{Z}^s, m \neq 0} e^{-2\pi^2 \sigma^2 \lambda |m|^2} = \sum_{N=1}^{\infty} \sum_{m: |m|^2=N} e^{-2\pi^2 \sigma^2 \lambda N} = \sum_{N=1}^{\infty} r_s(N) q^N, \end{aligned}$$

где $q = e^{-2\pi^2 \sigma^2 \lambda}$.

З а м е ч а н и е. Очевидно, что

$$\Delta \geq |p(0; \{\sigma X\}) - 1| \geq \sum_{N=1}^{\infty} r_s(N) \tilde{q}^N,$$

где $\tilde{q} = e^{-2\pi^2 \sigma^2 \Lambda}$, Λ — максимальное собственное значение Σ . Отсюда видно, что указанные верхняя и нижняя оценки для Δ отличаются тем сильнее, чем больше отношение Λ/λ .

3. Случай $s = 4$. По [1, теорема 386]

$$r_4(N) = 8\sigma_1(N) - \tilde{\sigma}_1(N),$$

и, следовательно,

$$r_4(N) \leq 8\sigma_1(N).$$

Тогда, пользуясь [2, 24.3.3 I В], получаем

$$\sum_{N=1}^{\infty} r_4(N) q^N \leq 8 \sum_{N=1}^{\infty} \sigma_1(N) q^N = 8 \sum_{N=1}^{\infty} \frac{N q^N}{1 - q^N} \leq \frac{8}{1 - q} \sum_{N=1}^{\infty} N q^N = \frac{8q}{(1 - q)^3}.$$

Таким образом,

$$\Delta \leq \frac{8}{(1 - q)^3} q.$$

4. Случай $s = 8$. По [1, ф-ла в начале п. 20.13, с. 314] $r_8(N) = 16(-1)^N \times \sum_{d|N} (-1)^d d^3$, и, следовательно,

$$r_8(N) \leq 16\sigma_3(N).$$

Тогда, пользуясь [2, 24.3.3 I В], получаем

$$\begin{aligned} \sum_{N=1}^{\infty} r_8(N) q^N &\leq 16 \sum_{N=1}^{\infty} \sigma_3(N) q^N = 16 \sum_{N=1}^{\infty} \frac{N^3 q^N}{1 - q^N} \\ &\leq \frac{16}{1 - q} \sum_{N=1}^{\infty} N^3 q^N = \frac{16 q (1 + 4q + q^2)}{(1 - q)^5}. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\Delta \leq \frac{16 (1 + 4q + q^2)}{(1 - q)^5} q.$$

5. Случай $s = 12$. Пусть $N = 2^\gamma u$, где u — нечетное. Тогда по [3, теорема 6]

$$r_{12}(N) = 8(2 + (-1)^N) \frac{10 \cdot 2^{5\gamma} + 21}{31} \sigma_5(u) + 8 \sum_{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = N} (x_1^4 - 3x_1^2 x_2^2).$$

Если N — нечетное, то $\gamma = 0$, $u = N$ и

$$8(2 + (-1)^N) \frac{10 \cdot 2^{5\gamma} + 21}{31} \sigma_5(u) = 8\sigma_5(N);$$

если N — четное, то $\gamma \geq 1$ и

$$8(2 + (-1)^N) \frac{10 \cdot 2^{5\gamma} + 21}{31} \sigma_5(u) = 24 \frac{10 \cdot 2^{5\gamma} + 21}{31} \frac{2^5 - 1}{2^{5(\gamma+1)} - 1} \sigma_5(N) \leq 8\sigma_5(N).$$

Для любого натурального N

$$\begin{aligned} 8 \sum_{x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2=N} (x_1^4 - 3x_1^2x_2^2) &= 2 \sum_{x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2=N} (2(x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 + x_4^4) - N^2) \\ &\leq 2 \sum_{x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2=N} (2N^2 - N^2) = 2N^2 r_4(N) \leq 16 N^2 \sigma_1(N). \end{aligned}$$

Следовательно, $r_{12}(N) \leq 8\sigma_5(N) + 16 N^2 \sigma_1(N)$ и

$$\sum_{N=1}^{\infty} r_{12}(N) q^N \leq 8 \sum_{N=1}^{\infty} \sigma_5(N) q^N + 16 \sum_{N=1}^{\infty} N^2 \sigma_1(N) q^N.$$

Пользуясь [2, 24.3.3 I B], получаем

$$8 \sum_{N=1}^{\infty} \sigma_5(N) q^N = 8 \sum_{N=1}^{\infty} \frac{N^5 q^N}{1 - q^N} \leq \frac{8}{1 - q} \sum_{N=1}^{\infty} N^5 q^N = \frac{8q(1 + 26q + 66q^2 + 26q^3 + q^4)}{(1 - q)^7}$$

и

$$\begin{aligned} 16 \sum_{N=1}^{\infty} N^2 \sigma_1(N) q^N &= 16 \sum_{N=1}^{\infty} \frac{N^3 q^N (1 + q^N)}{(1 - q^N)^3} \leq \frac{16}{(1 - q)^3} \left(\sum_{N=1}^{\infty} N^3 q^N + \sum_{N=1}^{\infty} N^3 q^{2N} \right) \\ &= \frac{16}{(1 - q)^3} \left(\frac{q(1 + 4q + q^2)}{(1 - q)^4} + \frac{q^2(1 + 4q^2 + q^4)}{(1 - q^2)^4} \right). \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\Delta \leq \left(\frac{16}{(1 - q)^3} \left(\frac{1 + 4q + q^2}{(1 - q)^4} + \frac{q + 4q^3 + q^5}{(1 - q^2)^4} \right) + \frac{8(1 + 26q + 66q^2 + 26q^3 + q^4)}{(1 - q)^7} \right) q.$$

6. Случай произвольного s . Применяя преобразование Абеля, получаем

$$\begin{aligned} \sum_{N=1}^{\infty} r_s(N) q^N &= \sum_{N=1}^{\infty} (r_s(1) + \dots + r_s(N)) (q^N - q^{N+1}) \\ &= q(1 - q) \sum_{N=1}^{\infty} (r_s(1) + \dots + r_s(N)) q^{N-1}. \end{aligned}$$

Имеем $r_s(1) + \dots + r_s(N) \leq V_s(\sqrt{N} + \sqrt{s}/2)^s \leq V_s(1 + \sqrt{s}/2)^s N^{s/2}$. Далее,

$$\sum_{N=1}^{\infty} N^{s/2} q^{N-1} = 1 + \sum_{N=1}^{\infty} (N + 1)^{s/2} q^N \leq 1 + 2^{s/2} \sum_{N=1}^{\infty} N^{s/2} q^N.$$

При $y \geq 0$ функция $y^{s/2} q^y$ достигает единственного максимума в точке $y_1 = s/(4\pi^2 \sigma^2 \lambda)$. Тогда

$$\sum_{N=1}^{\infty} N^{s/2} q^N \leq \int_0^{\infty} y^{s/2} q^y dy + 2y_1^{s/2} q^{y_1} = \frac{\Gamma(s/2 + 1)}{(2\pi^2 \sigma^2 \lambda)^{s/2+1}} + 2 \left(\frac{s}{e4\pi^2 \sigma^2 \lambda} \right)^{s/2}.$$

Следовательно,

$$\sum_{N=1}^{\infty} N^{s/2} q^{N-1} \leq 1 + 2^{s/2} \left(\frac{\Gamma(s/2 + 1)}{(2\pi^2 \sigma^2 \lambda)^{s/2+1}} + 2 \left(\frac{s}{e4\pi^2 \sigma^2 \lambda} \right)^{s/2} \right).$$

Таким образом,

$$\Delta \leq (1 - q) V_s \left(1 + \frac{\sqrt{s}}{2} \right)^s \left(1 + 2^{s/2} \left(\frac{\Gamma(s/2 + 1)}{(2\pi^2 \sigma^2 \lambda)^{s/2+1}} + 2 \left(\frac{s}{e4\pi^2 \sigma^2 \lambda} \right)^{s/2} \right) \right) q.$$

7. Пример. Пусть X_n , $n \in \mathbf{Z}$, — гауссовская марковская последовательность. Предположим, что $\mathbf{E}X_n = 0$, $\mathbf{D}X_n = 1$ и коэффициент корреляции $0 < \mu < 1$. Образует s -мерный гауссовский вектор $X = (X_1, \dots, X_s)$ из первых s членов последовательности. Тогда матрица ковариации Σ имеет вид $\Sigma_{i,j} = \mu^{|i-j|}$, $1 \leq i, j \leq s$. Обозначим λ — минимальное собственное значение Σ , Λ — максимальное собственное значение Σ .

Утверждение.

$$\lambda \geq \frac{1-\mu}{1+\mu}, \quad \Lambda \leq \frac{1+\mu}{1-\mu}.$$

З а м е ч а н и е. Этот пример интересен тем, что указанные выше границы для λ и Λ не зависят от s .

Д о к а з а т е л ь с т в о. По [4, с. 7]

$$\Sigma^{-1}(y_1, \dots, y_s) = \frac{1}{1-\mu^2} \left(\sum_{j=1}^s y_j^2 + \mu^2 \sum_{j=2}^{s-1} y_j^2 - 2\mu \sum_{j=1}^{s-1} y_j y_{j+1} \right).$$

По неравенству Коши–Буняковского

$$\left(\sum_{j=1}^{s-1} y_j y_{j+1} \right)^2 \leq \left(\sum_{j=1}^s y_j^2 - y_s^2 \right) \left(\sum_{j=1}^s y_j^2 - y_1^2 \right).$$

На единичной сфере из соотношений

$$\sum_{j=1}^s y_j^2 = 1, \quad \sum_{j=2}^{s-1} y_j^2 = 1 - y_1^2 - y_s^2, \quad \left| \sum_{j=1}^{s-1} y_j y_{j+1} \right| \leq \sqrt{(1 - y_1^2)(1 - y_s^2)}$$

следует

$$\begin{aligned} \frac{1}{1-\mu^2} \left(1 + \mu^2(1 - y_1^2 - y_s^2) - 2\mu \sqrt{(1 - y_1^2)(1 - y_s^2)} \right) &\leq \Sigma^{-1}(y_1, \dots, y_s) \\ &\leq \frac{1}{1-\mu^2} \left(1 + \mu^2(1 - y_1^2 - y_s^2) + 2\mu \sqrt{(1 - y_1^2)(1 - y_s^2)} \right). \end{aligned}$$

Находя максимум функции $1 + \mu^2(1 - z_1 - z_2) + 2\mu \sqrt{(1 - z_1)(1 - z_2)}$ и минимум функции $1 + \mu^2(1 - z_1 - z_2) - 2\mu \sqrt{(1 - z_1)(1 - z_2)}$ в области $z_1, z_2 \geq 0$, $z_1 + z_2 \leq 1$, получаем, что

$$\frac{(1-\mu)^2}{(1-\mu^2)} \leq \Sigma^{-1}(y_1, \dots, y_s) \leq \frac{(1+\mu)^2}{(1-\mu^2)}.$$

Отсюда

$$\lambda \geq \frac{(1-\mu^2)}{(1+\mu)^2} = \frac{1-\mu}{1+\mu}, \quad \Lambda \leq \frac{(1-\mu^2)}{(1-\mu)^2} = \frac{1+\mu}{1-\mu}.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Hardy G. H., Wright E. M. An Introduction to the Theory of Numbers. Oxford: Clarendon Press, 1960, 421 p.
2. Абрамовиц М., Стиган И. (ред.) Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами. М.: Наука, 1979, 830 с.
3. Ломадзе Г. А. О представлении чисел суммами квадратов. — Труды Тбил. матем. ин-та им. А. М. Размадзе, 1948, т. 16, с. 273–275.
4. Линник Ю. В. Математическая статистика. Л.: Наука, 1982, 284 с.

Поступила в редакцию
15.IV.2003