Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. А. Ватутин, В. Г. Михайлов, Асимптотические свойства матриц, связанных с отображениями разбиений, *Теория вероятн. и ее примен.*, 1996, том 41, выпуск 2, 241–250

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp2930>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.23.180.231

26 апреля 2023 г., 13:08:46

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ
И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЯ

Основан в январе 1956 г.

Выходит 4 раза в год

Москва • Наука • ТВП

Том 41

Выпуск 2, 1996 год

апрель, май, июнь

© 1996 г.

ВАТУТИН В. А.*, МИХАЙЛОВ В. Г.*

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА МАТРИЦ,
СВЯЗАННЫХ С ОТОБРАЖЕНИЯМИ РАЗБИЕНИЙ

Пусть $S = (S_1, \dots, S_r)$ — разбиение множества $\mathcal{N} = \{1, \dots, n\}$ на непустые непересекающиеся подмножества, Φ — подстановка на множестве $\mathcal{N}$, а $\xi_{ij} = |\Phi S_i \cap S_j|$ есть мощность пересечения множеств ΦS_i и S_j . В ситуации, когда разбиение S выбирается случайно и равномерно из множества всех разбиений, удовлетворяющих условию $|S_i| = s_i$, $i = 1, \dots, r$, а подстановка Φ (возможно, случайная) удовлетворяет определенным ограничениям, доказаны локальная и интегральная предельные теоремы для совместного распределения случайных величин ξ_{ij} , $i, j = 1, \dots, r$, при $n \rightarrow \infty$ и $s_i n^{-1} \rightarrow a_j \in (0, 1)$.

Ключевые слова и фразы: разбиения, локальная предельная теорема, интегральная предельная теорема.

Пусть на множестве $\mathcal{N} = \{1, \dots, n\}$ заданы разбиение $S = (S_1, \dots, S_r)$ на r непустых непересекающихся подмножеств $S_1, \dots, S_r$, $S_1 \cup \dots \cup S_r = \mathcal{N}$, и взаимно однозначное отображение (подстановка) $\Phi: \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{N}$. Пусть, далее, $\Phi S = (\Phi S_1, \dots, \Phi S_r)$ — разбиение, порожаемое парой (S, Φ) . Сопоставим разбиениям S и ΦS матрицу $\Xi = \Xi(S, \Phi) = \|\xi_{ij}\|$ размера $r \times r$, элемент ξ_{ij} которой равен мощности множества $\Phi S_i \cap S_j$, $i, j = 1, \dots, r$. Если отображение Φ выбирается случайно в соответствии с тем или иным законом распределения, либо случайным является разбиение S , то матрица $\Xi(S, \Phi)$ и ее элементы также случайны и их свойства описываются вероятностями $P\{\Xi = K\}$, где $K = \|k_{ij}\|$ есть $(r \times r)$ -матрица с неотрицательными целочисленными элементами. В ситуации, когда выбор разбиения S или отображения Φ производится в соответствии с достаточно простым законом распределения, можно выписать явные выражения для $P\{\Xi = K\}$.

*Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, ул. Вавилова, 42, 117966 Москва, Россия.

В качестве примера реализации такой схемы рассмотрим набор из n ячеек, расположенных по окружности и занумерованных числами от 1 до n по часовой стрелке. Разместим в эти ячейки по одной s_1 карточек с цифрой 1 и s_2 карточек с цифрой 2, $s_1 + s_2 = n$. Любой способ размещения приводит к некоторому разбиению $S = (S_1, S_2)$ множества $\mathcal{N}$. Выберем в качестве Φ подстановку $\Phi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ n & 1 & \dots & n-1 \end{pmatrix}$. Тогда величина ξ_{ij} равна числу упорядоченных пар вида (i, j) , образовавшихся в соседних ячейках. Если S выбирается случайно и равновероятно из множества всех разбиений указанного вида, то (см., например, [1, с. 118])

$$P\left\{\Xi = K \equiv \begin{pmatrix} s_1 - k & k \\ k & s_2 - k \end{pmatrix}\right\} = \frac{n}{k} \frac{\binom{s_1 - 1}{k - 1} \binom{s_2 - 1}{k - 1}}{\binom{n}{s_1}}, \quad (1)$$

если $0 \leq k \leq \min\{s_1, s_2\}$ и $P\{\Xi = K\} = 0$ для матриц K любого другого вида. Используя обозначения k_{ij} для элементов матрицы K , равенство (1) можно переписать в виде

$$P\{\Xi = K\} = \frac{s_1!(s_1 - 1)!s_2!(s_2 - 1)!}{(n - 1)!k_{11}!k_{12}!k_{21}!k_{22}!} (s_1 - k_{11}), \quad (2)$$

где, естественно,

$$k_{11} = s_1 - k, \quad k_{12} = k_{21} = k, \quad k_{22} = s_2 - k.$$

Вернемся теперь к общей ситуации и рассмотрим сначала случай, когда подстановка Φ является одноцикловой, а разбиение S выбрано случайно и равновероятно из множества всех разбиений множества $\mathcal{N}$, удовлетворяющих условию

$$|S_i| = s_i, \quad i = 1, \dots, r. \quad (3)$$

Как нетрудно проверить, в этом случае распределение матрицы Ξ не зависит от конкретного вида одноцикловой подстановки Φ .

Обозначим через $\mathcal{K}(s_1, \dots, s_r)$ множество всех $(r \times r)$ -матриц K с неотрицательными целочисленными элементами k_{ij} , удовлетворяющими соотношениям

$$\sum_{j=1}^r k_{ij} = s_i, \quad i = 1, \dots, r, \quad \sum_{i=1}^r k_{ij} = s_j, \quad j = 1, \dots, r. \quad (4)$$

Следующая теорема является естественным обобщением равенства (2).

Теорема 1 [2]. Пусть Φ — одноцикловая подстановка, а разбиение S выбирается случайно и равновероятно из множества разбиений, удовлетворяющих (3). Для любой матрицы $K \in \mathcal{K}(s_1, \dots, s_r)$ выполнено

соотношение

$$P\{\Xi(S, \Phi) = K\} = \frac{\prod_{i=1}^r (s_i! (s_i - 1)!)}{(n-1)! \prod_{i,j=1}^r k_{ij}} \det \|s_i \delta_{ij} - k_{ij}\|_{i,j=1}^{r-1}, \quad (5)$$

где δ_{ij} — символ Кронекера: $\delta_{ii} = 1$, $\delta_{ij} = 0$ ($i \neq j$).

Утверждение, аналогичное теореме 1, может быть получено и в случае, когда подстановка Φ имеет не один, а несколько циклов. Однако тогда ответ получается в виде свертки выражений типа (5), выписанных отдельно для каждого цикла, и имеет очень громоздкий вид (см. [2]). Еще более громоздкий вид имеют соответствующие утверждения для случайной подстановки, имеющей случайное число циклов, и, в частности, при равновероятном выборе подстановки из множества всех подстановок n -й степени.

В настоящей работе мы покажем, что задача существенно упростится, если устремить параметр n к бесконечности. В этом случае теорема 1 заменится многомерной локальной центральной предельной теоремой, из которой будет следовать соответствующая интегральная предельная теорема. Эта интегральная предельная теорема справедлива для весьма широкого класса подстановок Φ .

Сформулируем основные результаты. Предположим, что существуют пределы

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_i n^{-1} = a_i, \quad 0 < a_i < 1, \quad i = 1, \dots, r. \quad (6)$$

Введем обозначения

$$y_{ij} = y_{ij}(k_{ij}) = (k_{ij} - E\xi_{ij})(E\xi_{ij})^{-1/2}, \quad i, j = 1, \dots, r, \quad (7)$$

где, как нетрудно показать,

$$E\xi_{ij} = b_{ij} \equiv s_i s_j (n-1)^{-1} (1 - \delta_{ij} s_j^{-1}), \quad (8)$$

и

$$\begin{aligned} & \mathcal{K}(t; s_1, \dots, s_r) \\ &= \{K = \|k_{ij}\| \in \mathcal{K}(s_1, \dots, s_r): |y_{ij}(k_{ij})| \leq t, \forall i, j = 1, \dots, r\}. \end{aligned}$$

Теорема 2. Пусть при каждом n разбиение S выбирается случайно и равновероятно из множества разбиений вида (3), причем выполняется условие (6), а подстановка Φ при каждом n является одноцикловой. Тогда при любом фиксированном $t > 0$ и $n \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} & \sup_{K \in \mathcal{K}(t; s_1, \dots, s_r)} \left| P\{\Xi = K\} (2\pi n)^{(r-1)^2/2} \left(\prod_{i=1}^r a_i \right)^{r-1} \right. \\ & \quad \left. - \exp \left\{ -\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^r y_{ij}^2 \right\} \right| \rightarrow 0. \end{aligned} \quad (9)$$

З а м е ч а н и е 1. Запись (9) выражает равномерную сходимость для значений переменной в произвольном фиксированном параллелепипеде вокруг среднего значения в многомерной локальной предельной теореме для компонент матрицы $\Xi(S, \Phi)$.

Условимся рассматривать матрицы Ξ и K как векторы в r^2 -мерном пространстве. Введем обозначение $\mathcal{P}_n$ для $(r-1)^2$ -мерного подпространства в $\mathbf{R}^{r^2}$, определяемого равенствами

$$\sum_{i=1}^r x_{ij} \sqrt{b_{ij}} = 0, \quad j = 1, \dots, r, \quad \sum_{j=1}^r x_{ij} \sqrt{b_{ij}} = 0, \quad i = 1, \dots, r, \quad (10)$$

и обозначение $\mathcal{P}$ для $(r-1)^2$ -мерного подпространства в $\mathbf{R}^{r^2}$, задаваемого соотношениями

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^r x_{ij} \sqrt{a_i a_j} &= 0, & j &= 1, \dots, r, \\ \sum_{j=1}^r x_{ij} \sqrt{a_i a_j} &= 0, & i &= 1, \dots, r. \end{aligned} \quad (11)$$

Рассмотрим случайный вектор

$$\tilde{\Xi} = (\tilde{\xi}_{ij} = (\xi_{ij} - b_{ij}) b_{ij}^{-1/2}, \quad i, j = 1, \dots, r).$$

Очевидно, что $\tilde{\Xi} \in \mathcal{P}_n$.

Теорема 3 (интегральная предельная теорема). Пусть выполнены условия теоремы 2. Тогда функция распределения случайного вектора $\tilde{\Xi}$ сходится при $n \rightarrow \infty$ к функции распределения $(r-1)^2$ -мерного стандартного нормального закона, сосредоточенного на подпространстве $\mathcal{P}$.

Рассмотрим теперь векторную статистику $L = (L_1, \dots, L_m)$, где

$$L_k = \sum_{i,j=1}^r c_{ij}^{(k)} \xi_{ij},$$

а $c_{ij}^{(k)}$ — некоторые константы. Из теоремы 3 вытекает следующее утверждение.

Следствие 1. Пусть выполнены условия теоремы 2 и матрица ковариаций случайного вектора $n^{-1/2}L$ сходится при $n \rightarrow \infty$ к ненулевой матрице Σ . Тогда случайный вектор $n^{-1/2}(L - EL)$ асимптотически нормален при $n \rightarrow \infty$ с нулевым вектором средних и матрицей ковариаций Σ , т.е.

$$\mathcal{L}(n^{-1/2}(L - EL)) \rightarrow \mathcal{N}(0, \Sigma), \quad n \rightarrow \infty.$$

При $m = 1$ последнему утверждению можно придать иной вид.

Следствие 2. Пусть выполнены условия теоремы 2 и

$$DL_1 \asymp n \quad (n \rightarrow \infty). \quad (12)$$

Тогда

$$\mathcal{L}((L_1 - \mathbf{E}L_1)(DL_1)^{-1/2}) \rightarrow \mathcal{N}(0, 1), \quad n \rightarrow \infty.$$

З а м е ч а н и е 2. Можно показать, что условие (12) в следствии 2 эквивалентно тому, что вектор $\mathbf{c} = (c_{ij}^{(1)}) \in \mathbb{R}^{r^2}$ не лежит в ортогональном дополнении к подпространству $\mathcal{P}$.

З а м е ч а н и е 3. Утверждения следствий 1 и 2 будут по-прежнему справедливы, если условие (6) заменить на условие: существует такая величина $\delta > 0$, для которой

$$\delta \leq s_i n^{-1}, \quad i = 1, \dots, r. \quad (13)$$

Отсюда, разумеется, следует, что $s_i n^{-1} \leq 1 - \delta$.

Перейдем к случаю многоциклового подстановки Φ и обозначим через $\nu(\Phi)$ количество ее циклов. Естественно, что как и Φ , эта характеристика зависит от n .

Теорема 4. Пусть случайное разбиение S распределено равномерно на разбиениях вида (3) и при $n \rightarrow \infty$ параметры $s_1, \dots, s_r$ меняются так, что выполнено условие (6). Если число циклов подстановки Φ удовлетворяет условию

$$\nu(\Phi) \leq h(n), \quad (14)$$

где $h(n) = o(n^{1/2})$ ($n \rightarrow \infty$), то равномерно по всем Φ , удовлетворяющим (14), функция распределения вектора $\Xi(S, \Phi)$ сходится к стандартной нормальной функции распределения в $\mathcal{P}$.

Отметим следующее важное утверждение.

Следствие 3. Пусть в постановке теоремы 4 подстановка Φ выбирается при каждом n случайно и независимо от S . Если при этом

$$\mathbf{E}\nu(\Phi) = o(n^{1/2}) \quad (n \rightarrow \infty), \quad (15)$$

то заключение теоремы 4 остается в силе.

Заметим, что для подстановки Φ , выбираемой случайно и равновероятно из множества всех подстановок n -й степени, выполняется равенство

$$\mathbf{E}\nu(\Phi) = \ln n + O(1) \quad (n \rightarrow \infty)$$

(см., например, [1, с. 185]). Поэтому такая подстановка удовлетворяет условиям следствия 3.

Перейдем к доказательствам.

Лемма 1. Пусть $K = \|k_{ij}\| \in \mathcal{K}(t; s_1, \dots, s_r)$ при некотором $t > 0$ и каждом n и выполнено условие (6). Тогда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{s_r} \det \left\| \delta_{ij} - \frac{k_{ij}}{s_i} \right\|_{i,j=1}^{r-1} = 1. \quad (16)$$

Доказательство. Заметим, что, согласно условиям леммы,

$$k_{ij} = a_i a_j n + o(n), \quad s_i = a_i n + o(n) \quad (n \rightarrow \infty).$$

Следовательно,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} k_{ij} s_i^{-1} = a_j > 0, \quad i, j = 1, \dots, r,$$

и в силу непрерывной зависимости детерминанта матрицы от ее элементов

$$\det \|\delta_{ij} - k_{ij} s_i^{-1}\|_{i,j=1}^{r-1} \rightarrow \det \|\delta_{ij} - a_j\|_{i,j=1}^{r-1} \quad (n \rightarrow \infty). \quad (17)$$

Последний детерминант нетрудно вычислить (см., например, [3, задача 360]):

$$\det \|\delta_{ij} - a_j\|_{i,j=1}^{r-1} = 1 - \sum_{j=1}^{r-1} a_j = a_r. \quad (18)$$

Из (6), (18) и (17) следует (16). Лемма доказана.

Лемма 2. Пусть $p_1, \dots, p_k > 0$ и $p_1 + \dots + p_k = 1$, а $q = q_1 + \dots + q_k$, где $q_1, \dots, q_k$ — неотрицательные целые числа. Если $q \rightarrow \infty$, то равномерно по тем $(q_1, \dots, q_k)$, для которых

$$w = (w_i = (q_i - q p_i)(q p_i)^{-1/2}, \quad i = 1, \dots, k)$$

содержится в фиксированном конечном параллелепипеде пространства $\mathbf{R}^k$, выполнено соотношение

$$\frac{q!}{q_1! \dots q_k!} p_1^{q_1} \dots p_k^{q_k} = \frac{1}{(2\pi)^{(k-1)/2}} \left(\frac{q}{q_1 \dots q_k} \right)^{1/2} \times \exp \left\{ - \sum_{i=1}^k w_i^2 \right\} (1 + o(1)). \quad (19)$$

Доказательство этой леммы является упражнением на применение формулы Стирлинга, и мы его опускаем.

Доказательство теоремы 2. Перепишем равенство (5) в виде

$$P\{\Xi(S, \Phi) = K\} = \left(\frac{\prod_{i=1}^r s_i!}{n!} \right)^2 \frac{n!}{\prod_{i,j=1}^r k_{ij}!} \frac{n}{s_r} \det \|\delta_{ij} - k_{ij} s_i^{-1}\|_{i,j=1}^{r-1}.$$

Используя лемму 1 и условие (4), находим

$$\begin{aligned} P\{\Xi(S, \Phi) = K\} &= \left(\frac{\prod_{i=1}^r s_i!}{n!} \right) \frac{n!}{\prod_{i,j=1}^r k_{ij}!} (1 + o(1)) \\ &= (1 + o(1)) \left(\frac{n!}{\prod_{i=1}^r s_i!} \prod_{i=1}^r \left(\frac{s_i}{n} \right)^{s_i} \right)^{-2} \end{aligned}$$

$$\times \frac{n!}{\prod_{i,j=1}^r k_{ij}!} \prod_{i,j=1}^r \left(\frac{s_i}{n} \cdot \frac{s_j}{n} \right)^{k_{ij}}. \quad (20)$$

Заметим теперь, что

$$\sum_{i=1}^r \frac{s_i}{n} = 1, \quad \sum_{i,j=1}^r \frac{s_i}{n} \frac{s_j}{n} = 1.$$

Поэтому мы можем дважды воспользоваться леммой 2, взяв сначала $q = n$, $k = r$, $p_i = s_i n^{-1}$, $q_i = s_i$ и $w_i = (s_i - n p_i)(n p_i)^{-1/2} \equiv 0$, а затем $q = n$, $k = r^2$, $p_{ij} = s_i s_j n^{-2}$, $q_{ij} = k_{ij}$ и $w_{ij} = (k_{ij} - s_i s_j n^{-1})(s_i s_j n^{-1})^{1/2} = y_{ij}(1 + o(1))$, что приводит к соотношению

$$\begin{aligned} P\{\Xi(S, \Phi) = K\} &= \left(\frac{1}{(2\pi)^{(r-1)/2}} \left(\frac{n}{s_1 \cdots s_r} \right)^{1/2} \right)^{-2} \frac{1}{(2\pi)^{(r^2-1)/2}} \\ &\times \left(\frac{n}{\prod_{i,j=1}^r k_{ij}} \right)^{1/2} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^r y_{ij}^2 \right\} (1 + o(1)). \end{aligned}$$

Дальнейшие преобразования этой формулы дают равенство

$$\begin{aligned} P\{\Xi(S, \Phi) = K\} &= \frac{1}{(2\pi n)^{(r-1)/2}} \frac{1}{(\prod_{i=1}^r a_i)^{r-1}} \\ &\times \exp \left\{ -\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^r y_{ij}^2 \right\} (1 + o(1)), \end{aligned}$$

где величина $o(1)$ стремится к нулю равномерно для значений $(y_{ij}, i, j = 1, \dots, r)$, содержащихся в любом конечном параллелепипеде в $\mathbf{R}^{r^2}$. Теорема 2 доказана.

З а м е ч а н и е 4. Изменив последовательность оценок в приведенной выше цепочке рассуждений, мы получаем с учетом (6) равенство

$$P\{\Xi = K\} = G_0^{-2} G_1 (1 + o(1)),$$

где

$$G_1 = \frac{n!}{\prod_{i,j=1}^r k_{ij}!} \prod_{i,j=1}^r (a_i a_j)^{k_{ij}}$$

есть вероятность появления вектора числа исходов $(k_{ij}, i, j = 1, \dots, r)$ в полиномиальной схеме с n испытаниями и r^2 исходами, имеющими вероятности $a_i a_j$, а

$$G_0 = \frac{n!}{\prod_{i=1}^r s_i!} \prod_{i=1}^r a_i^{s_i}$$

есть вероятность появления вектора числа исходов $(s_1, \dots, s_r)$ в полиномиальной схеме с n испытаниями и r исходами, имеющими вероятности $a_1, \dots, a_r$.

Доказательство теоремы 3. Пусть Q обозначает решетку целочисленных векторов в $\mathbf{R}^{r^2}$, а $P(s_1, \dots, s_r)$ — линейное многообразие в $\mathbf{R}^{r^2}$, выделяемое условиями (4). Положим $Q' = Q'(s_1, \dots, s_r) = P(s_1, \dots, s_r) \cap Q$. Ясно, что множество $Q'(s_1, \dots, s_r)$ непусто (хотя бы потому, что на нем сосредоточено все распределение матрицы Ξ) и также является решеткой. Множество $K(s_1, \dots, s_r) \subseteq Q'(s_1, \dots, s_r)$.

Линейные многообразия $P(s_1, \dots, s_r)$ (и решетки $Q'(s_1, \dots, s_r)$ в них) при разных наборах $s_1, \dots, s_r$ отличаются друг от друга лишь сдвигом в пространстве $\mathbf{R}^{r^2}$. То же самое верно и относительно расположения решетки $Q'(s_1, \dots, s_r)$ внутри $P(s_1, \dots, s_r)$. По этой причине очевидное свойство, что число точек решетки, попадающих в большой куб, приблизительно пропорционально объему куба, выполнено для решеток $Q'(s_1, \dots, s_r)$ в $P(s_1, \dots, s_r)$ равномерно по $s_1, \dots, s_r$. А именно, для любого куба W_t в $P(s_1, \dots, s_r)$ с ребрами длины t

$$|Q' \cap W_t| = bt^{(r-1)^2} (1 + o(1)) \quad (t \rightarrow \infty), \quad (21)$$

причем равномерно по всем кубам W_t и наборам $s_1, \dots, s_r$. Константа $b > 0$ выражает плотность узлов решетки $Q'(s_1, \dots, s_r)$ в $P(s_1, \dots, s_r)$ и не зависит от $s_1, \dots, s_r$.

Теперь воспользуемся линейным соответствием

$$x_{ij} \longrightarrow (x_{ij} - b_{ij}) b_{ij}^{-1/2}, \quad i, j = 1, \dots, r.$$

Оно сопоставляет решетке Q' в $P(s_1, \dots, s_r)$ (путем сдвига и изменения масштабов) решетку M_n в $\mathcal{P}_n$. Этой решетке M_n принадлежит область значений случайного вектора $\tilde{\Xi}$.

С учетом изменения масштабов из (21) получаем, что при $nt^2 \rightarrow \infty$

$$|M_n \cap V_t| = b_n n^{(r-1)^2/2} t^{(r-1)^2} (1 + o(1)) \quad (22)$$

равномерно по n и по кубам $V_t \subseteq \mathcal{P}_n$ с ребрами длины t . Здесь величина $b_n > 0$ зависит от n , но, согласно (6) и (8), существует конечный предел $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n > 0$.

Пусть $\mathbf{z} \in \mathcal{P}_n$ и $V_t(\mathbf{z})$ — куб в $\mathcal{P}_n$ с центром в точке $\mathbf{z}$ и ребрами длины t . Для всех точек $\mathbf{y} = (y_{ij}(k_{ij}))$ (см. (7)), попавших в куб $V_t(\mathbf{z})$, при $n \rightarrow \infty$, $t \rightarrow 0$ выполняется (равномерно по всем таким точкам) равенство

$$(\mathbf{y}, \mathbf{y}) \equiv \sum_{i,j=1}^r y_{ij}^2(k_{ij}) = (\mathbf{z}, \mathbf{z}) (1 + o(1)).$$

Поэтому из (9) и (22) получаем, что при $n \rightarrow \infty$, $t \rightarrow 0$, $nt^2 \rightarrow \infty$

$$P\{\tilde{\Xi} \in V_t(\mathbf{z})\} = ct^{(r-1)^2} \exp\left\{-\frac{1}{2}(\mathbf{z}, \mathbf{z})\right\} (1 + o(1)), \quad (23)$$

равномерно по $\mathbf{z} \in \mathcal{P}_n$, $(\mathbf{z}, \mathbf{z}) \leq T$, при любом фиксированном T . Здесь величина $c > 0$. Равенство (23) означает, что плотность предельной функции распределения имеет вид

$$f(\mathbf{z}) = c \exp\left\{-\frac{1}{2}(\mathbf{z}, \mathbf{z})\right\}.$$

Здесь уже, естественно, $\mathbf{z} \in \mathcal{P} = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{P}_n$.

Теперь мы покажем, что

$$\int_{\mathcal{P}} f(\mathbf{z}) l(d\mathbf{z}) = 1, \quad (24)$$

где $l(\cdot)$ — мера Лебега в $\mathcal{P}$. Тогда очевидно, что $f(\mathbf{z})$ является плотностью стандартного нормального распределения на $\mathcal{P}$. Для доказательства (24) достаточно установить, что предельное распределение случайного вектора $\tilde{\Xi}$ является собственным. Покажем, что это действительно так.

Непосредственные вычисления дают соотношения

$$\begin{aligned} E\xi_{ij}^2 &= \frac{s_i s_j}{n-1} + \frac{s_i(s_i-1)s_j(s_j-1)}{(n-1)(n-2)}, \quad i \neq j, \\ E\xi_{ii}^2 &= \frac{s_i(s_i-1)}{n-1} + \frac{s_i(s_i-1)(s_i-2)(s_i-3)}{(n-1)(n-2)} + 2 \frac{s_i(s_i-1)(s_i-2)}{(n-1)(n-2)}. \end{aligned} \quad (25)$$

Используя (8), (25) и условие (6), находим, что

$$D\tilde{\xi}_{ij} = (1 - a_i)(1 - a_j) + o(1) \quad (n \rightarrow \infty),$$

и, следовательно, найдется такая величина $D < \infty$, что $D(\tilde{\Xi}, \tilde{\Xi}) \leq D$ при всех n . Поэтому для любого $\varepsilon > 0$ и всех n

$$P\left\{(\tilde{\Xi}, \tilde{\Xi}) > \left(\frac{D}{\varepsilon}\right)^{1/2}\right\} \leq \frac{\varepsilon}{D} D(\tilde{\Xi}, \tilde{\Xi}) \leq \varepsilon.$$

Таким образом, предельное распределение вектора $\tilde{\Xi}$ является собственным, что доказывает (24), а значит, и теорему 3.

Доказательство теоремы 4. Любую подстановку Φ с ν циклами можно изменить не более, чем в 2ν позициях так, что получится одноцикловая подстановка. Обозначим последнюю через Φ' . Очевидно, что для любого $A \subseteq \{1, \dots, n\}$ множества $\Phi(A)$ и $\Phi'(A)$ различаются не более 2ν элементами. Значит, с учетом условия (14)

$$|\xi_{ij}(\Phi) - \xi_{ij}(\Phi')| \leq 2h(n).$$

Учитывая вид нормировки в формуле для $\tilde{\Xi}$ и тот факт, что $h(n) = o(n^{1/2})$, $n \rightarrow \infty$, заключаем, что предельные распределения для $\tilde{\Xi}(S, \Phi)$ и $\tilde{\Xi}(S, \Phi')$ должны совпадать. Осталось применить к вектору $\tilde{\Xi}(S, \Phi')$ интегральную предельную теорему 3. Теорема 4 доказана.

Доказательство следствия 3. Положим

$$h(n) = n^{1/4} (\mathbf{E} \nu(\Phi))^{1/2}.$$

Ввиду условий следствия

$$h(n) = o(n^{1/2}) \quad (n \rightarrow \infty). \quad (26)$$

Введем случайную подстановку

$$\Phi^* = \begin{cases} \Phi, & \text{если } \nu(\Phi) \leq h(n), \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ 2 & 3 & \dots & 1 \end{pmatrix}, & \text{если } \nu(\Phi) > h(n). \end{cases}$$

Из (15) и (26) следует, что

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{\tilde{\Xi}(S, \Phi) \neq \tilde{\Xi}(S, \Phi^*)\} &\leq \mathbf{P}\{\nu(\Phi) > h(n)\} \\ &\leq \frac{\mathbf{E} \nu(\Phi)}{h(n)} = o(1) \quad (n \rightarrow \infty). \end{aligned} \quad (27)$$

Обозначим через Ψ_n множество подстановок ψ на множестве $\mathcal{N}$, удовлетворяющих условию $\nu(\psi) \leq h(n)$. Тогда $\Phi^* \in \Psi_n$ с вероятностью 1 и

$$\mathbf{P}\{\tilde{\Xi}(S, \Phi^*) \in B\} = \sum_{\psi \in \Psi_n} \mathbf{P}\{\tilde{\Xi}(S, \psi) \in B\} \mathbf{P}\{\Phi^* = \psi\}$$

для любого параллелепипеда B в $\mathcal{P}_n$. По теореме 3 вероятности $\mathbf{P}\{\tilde{\Xi}(S, \psi^*) \in B\}$ сходятся при $n \rightarrow \infty$ к соответствующим вероятностям стандартного нормального закона в подпространстве $\mathcal{P}$, причем равномерно по $\psi \in \Psi_n$. Значит, тем же свойством обладают и вероятности $\mathbf{P}\{\tilde{\Xi}(S, \Phi^*) \in B\}$. Остается воспользоваться оценкой (27). Следствие 3 доказано.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Сачков В. Н. Вероятностные методы в комбинаторном анализе. М.: Наука, 1978, 297 с.
2. Севастьянов Б. А. Случайные отображения и разбиения конечных множеств. — Теория вероятн. и ее примен., 1972, т. XVII, в. 1, с. 173–181.
3. Проскуряков И. В. Сборник задач по линейной алгебре. 6-е изд. М.: Наука, 1978, 384 с.

Поступила в редакцию
18.V.1993