Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Ф. Гапошкин, Спектральные критерии существования обобщенных эргодических преобразований, *Теория вероятн. и ее примен.*, 1996, том 41, выпуск 2, 251–271

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp2931>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 44.207.124.84

26 апреля 2023 г., 16:45:24

© 1996 г.

ГАПОШКИН В. Ф.*

**СПЕКТРАЛЬНЫЕ КРИТЕРИИ СУЩЕСТВОВАНИЯ
ОБОБЩЕННЫХ ЭРГОДИЧЕСКИХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ¹⁾**

Изучаются условия сходимости почти всюду односторонних и двусторонних эргодических преобразований

$$\sum_1^{\infty} b_k T^k f(x) \quad \text{и} \quad \sum_{-\infty}^{\infty} b_k T^k f(x),$$

где T — унитарный оператор в L^2 . Получены критерии существования этих преобразований, выраженные через свойства спектральной меры операторов. Рассматриваются аналоги этих результатов для нормальных операторов, стационарных и гармонизируемых случайных процессов.

Ключевые слова и фразы: унитарные операторы, нормальные операторы, стационарные процессы, гармонизируемые процессы, спектральная мера, эргодические преобразования, сходимость почти всюду.

Введение

Если $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ — некоторое измеримое пространство, T — унитарный оператор в $L^2(\Omega)$, то достаточно детально изучен вопрос о сходимости в L^2 и почти всюду средних

$$n^{-1} \sum_{k=1}^n T^k f(x) \tag{1}$$

или средних $(2n+1)^{-1} \sum_{k=-n}^n T^k f(x)$ при $n \rightarrow \infty$. В вероятностных терминах эта задача формулируется как усиленный закон больших чисел для стационарных в широком смысле процессов (ξ_k) .

Необходимые и достаточные условия сходимости п.в. средних (1) получены в работах автора [1], [2] в терминах спектральной меры оператора T . Пусть $dU(\lambda)$ — операторная мера с ортогональными приращениями, для $f \in L^2$ обозначим $dZ(\lambda) = dU(\lambda)f$; $\|dZ(\lambda)\|^2 = dF(\lambda)$.

*Московский государственный университет путей сообщения, кафедра прикладной математики, ул. Образцова, 15, 103055 Москва, Россия.

¹⁾Работа поддержана внебюджетным фондом НИР МПС РФ и РФФИ, грант № 96-01-01129.

Тогда

$$T^k f = \int_{-\pi}^{\pi} e^{ik\lambda} dZ(\lambda); \quad \int_{-\pi}^{\pi} dF(\lambda) = \|f\|^2 < \infty. \quad (2)$$

Как известно, средние (1) для любой фиксированной функции $f \in L^2$ сходятся в L^2 к значению $\xi = F(+0) - F(-0)$. В работах [1], [2] показано, что для сходимости этих средних п.в. необходимо и достаточно, чтобы

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \int_{0 < |\lambda| \leq 2^{-m}} dZ(\lambda) = 0 \quad \text{п.в.} \quad (3)$$

В частности, это условие выполнено, если

$$\int_{0 < |\lambda| \leq \pi} L_2^2(\lambda) dZ(\lambda) < \infty. \quad (3')$$

Здесь и далее используются обозначения

$$L_1(\lambda) = \log \frac{2\pi}{|\lambda|}; \quad L_2(\lambda) = \log \log \frac{4\pi}{|\lambda|}, \quad L_3(\lambda) = \log \log \log \frac{16\pi}{|\lambda|}, \dots \quad (4)$$

(все логарифмы берутся по основанию 2). Наряду со средними (1) в эргодической теории изучалось также (двустороннее) эргодическое преобразование Гильберта последовательности $\{T^k f(x)\}$:

$$\sigma'_n = \sum_{k=-n}^n k^{-1} T^k f(x) = \sum_{k=1}^n k^{-1} (T^k f(x) - T^{-k} f(x)). \quad (5)$$

Известно, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma'_n = \eta$ в L^2 всегда существует. В работе [3] тем же методом, что и в [1], [2], показано, что эргодическое преобразование Гильберта (5) сходится п.в. тогда и только тогда, когда

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \int_{0 < |\lambda| \leq 2^{-m}} \text{sign } \lambda dZ(\lambda) = 0 \quad \text{п.в.} \quad (6)$$

З а м е ч а н и е. Последний результат тесно связан с критерием сходимости п.в. разложения Котельникова–Шеннона для стационарного процесса с ограниченным спектром [2]. Если спектр процесса $\tilde{\xi}(t)$ сосредоточен на $[-\pi, \pi]$, это разложение имеет вид

$$\tilde{\xi}(t) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda t} d\tilde{Z}(\lambda) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=-n}^n \tilde{\xi}(k) \frac{\sin \pi(t-k)}{\pi(t-k)}. \quad (7)$$

Ряд (7) сходится п.в. (равномерно на любом конечном интервале $|t| \leq T$) тогда и только тогда, когда

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \left[\int_{0 < |\lambda + \pi| \leq 2^{-m}} d\tilde{Z}(\lambda) - \int_{0 < |\lambda - \pi| \leq 2^{-m}} d\tilde{Z}(\lambda) \right] = 0 \quad \text{п.в.} \quad (6')$$

Очевидно, что сходимость п.в. ряда (7) эквивалентна существованию п.в. предела $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=-n}^n (-1)^k k^{-1} \xi(k)$, т.е. существованию эргодического преобразования Гильберта для стационарной последовательности $\xi_k = (-1)^k \tilde{\xi}_k$. Условие (6) для последовательности (ξ_k) эквивалентно условию (6').

В работах [4]–[10] рассматривались аналоги и обобщения этих результатов для других классов операторов, случайных процессов и полей.

В §1 данной статьи исследуется сходимость п.в. одностороннего эргодического преобразования Гильберта, т.е. средних

$$\sigma_n'' = \sum_{k=1}^n k^{-1} T^k f(x), \quad \sigma_n = \sum_{k=1}^n k^{-1} (T^k f(x) + T^{-k} f(x)).$$

В §2 рассматриваются обобщенные двусторонние и односторонние эргодические преобразования, в которых вместо коэффициентов k^{-1} берутся коэффициенты $k^{-\alpha}$, $0 < \alpha < 1$. В §3 изучаются некоторые другие классы операторов и случайных процессов, а также более общие коэффициенты преобразований.

§1. Одностороннее преобразование Гильберта

В этом параграфе T — унитарный оператор в L^2 , $f \in L^2$. Тогда имеет место представление (2). Рассмотрим средние σ_n , σ_n' , σ_n'' :

$$\begin{aligned} \sigma_n' &= \sum_{k=1}^n k^{-1} (T^k f(x) - T^{-k} f(x)) = 2i \int_{|\lambda| \leq \pi} Q_n'(\lambda) dZ(\lambda), \\ \sigma_n &= \sum_{k=1}^n k^{-1} (T^k f(x) + T^{-k} f(x)) = 2 \int_{|\lambda| \leq \pi} Q_n(\lambda) dZ(\lambda), \\ \sigma_n'' &= \sum_{k=1}^n k^{-1} T^k f(x) = \int_{|\lambda| \leq \pi} Q_n''(\lambda) dZ(\lambda), \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} Q_n'(\lambda) &= \sum_{k=1}^n k^{-1} \sin k\lambda, \quad Q_n(\lambda) = \sum_{k=1}^n k^{-1} \cos k\lambda, \\ Q_n''(\lambda) &= Q_n(\lambda) + iQ_n'(\lambda). \end{aligned}$$

Известно, что $Q_n'(\lambda) = O(1)$ равномерно по λ ($n \rightarrow \infty$);

$$\lim_{n \rightarrow \infty} Q_n(\lambda) = \Phi(\lambda); \quad \Phi(\lambda) \sim \log \frac{2\pi}{|\lambda|} \quad \text{при } \lambda \rightarrow 0.$$

Отсюда сразу следует

Теорема 1. Средние σ_n (σ_n'') сходятся в L^2 к η (η'') тогда и только тогда, когда

$$F(+0) = F(-0) \quad (8)$$

и выполнено условие

$$\int_{0 < |\lambda| \leq \pi} L_1^2(\lambda) dF(\lambda) < \infty. \quad (9)$$

При этом

$$\begin{aligned} \eta &\stackrel{L^2}{=} 2 \int_{0 < |\lambda| \leq \pi} \Phi(\lambda) dZ(\lambda), \\ \eta'' &\stackrel{L^2}{=} \int_{0 < |\lambda| \leq \pi} \Phi(\lambda) dZ(\lambda) + i \int_{0 < |\lambda| \leq \pi} \frac{\pi - |\lambda|}{2} \operatorname{sign} \lambda dZ(\lambda). \end{aligned} \quad (10)$$

Далее нас будут интересовать условия сходимости средних σ_n, σ_n'' не только в L^2 , но и почти всюду. Так как условие (9) влечет за собой условие (3') и сходимость п.в. средних σ_n' , можно ограничиться исследованием лишь средних σ_n . Условия сходимости п.в. средних σ_n'' аналогичны.

Теорема 2. Пусть выполнены условия (8)–(10). Обозначим $N_m = 2^{2^m}$, $\lambda_m = 2\pi/N_m$.

1) Справедливо следующее представление средних σ_ν : если $N_m \leq \nu < N_{m+1}$, то

$$\sigma_\nu = \eta - 2 \int_{0 < |\lambda| \leq \lambda_m} L_1(\lambda) dZ(\lambda) + \eta_\nu, \quad (11)$$

где $\lim_{\nu \rightarrow \infty} \eta_\nu = 0$ п.в. и в L^2 .

2) В частности, $\lim_{\nu \rightarrow \infty} \sigma_\nu = \eta$ п.в. тогда и только тогда, когда

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \int_{0 < |\lambda| \leq \lambda_m} L_1(\lambda) dZ(\lambda) = 0 \quad \text{п.в.} \quad (12)$$

Теорема 3. 1) Если выполнено условие (8) и

$$\int_{0 < |\lambda| \leq \pi} L_1^2(\lambda) L_3^2(\lambda) dF(\lambda) < \infty, \quad (13)$$

то $\lim_{\nu \rightarrow \infty} \sigma_\nu = \eta$ п.в. и в L^2 .

2) Условие (13), вообще говоря, нельзя усилить. Именно, если $\omega(\lambda) \geq 1$,

$$\omega(\lambda) = \omega(-\lambda), \quad \omega(\lambda) = o(L_3(\lambda)) \quad \text{при } |\lambda| \rightarrow 0, \quad (14)$$

то существуют унитарный оператор T и функция $f \in L^2$ такие, что

$$\int_{0 < |\lambda| \leq \pi} L_1^2(\lambda) \omega^2(\lambda) dF(\lambda) < \infty, \quad (15)$$

но средние (σ_n) расходятся п.в.

Другие следствия теоремы 2 будут указаны далее. Доказательство теоремы 2 опирается на одну общую теорему, полученную в работе [2]. Сформулируем ее в нужной нам форме.

Лемма 1. Пусть $dZ_1(v)$ — спектральная мера с ортогональными приращениями на $0 < |v| \leq A$; $\|dZ_1(v)\|^2 = dF_1(v)$; $\int_{0 < |\lambda| \leq A} dF_1(v) < \infty$. Пусть $R_n(v)$ — последовательность непрерывных или кусочно-непрерывных функций при $0 < |v| \leq A$ и выполнено

У с л о в и е 1): при некоторых $\alpha > 0, \beta > 0, C > 0$

$$|R_n(v)| \leq C \min \left\{ (n|v|)^\alpha, (n|v|)^{-\beta} \right\}. \quad (16)$$

Тогда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{0 < |v| \leq A} R_{2^n}(v) dZ_1(v) = 0 \quad \text{н.в. и в } L^2. \quad (17)$$

Пусть, кроме того, выполнено

У с л о в и е 2):

$$|R_n(v) - R_k(v)| \leq C \min \left\{ |n - k|^{\alpha_1} |v|^{\beta_1} k^{-\gamma_1}; |n - k|^{\alpha_2} |v|^{\beta_2} k^{-\gamma_2}; (k|v|)^{-\beta_3} \right\}, \quad (18)$$

где постоянные $C > 0, \alpha_i, \beta_i$ удовлетворяют условиям $\alpha_1 > \frac{1}{2}, \alpha_2 > \frac{1}{2}, \gamma_2 > \frac{1}{2}, \beta_3 > \frac{1}{2}; \gamma_1 + \beta_1 \geq \alpha_1 > \gamma_1; \gamma_2 + \beta_2 \geq \alpha_2$.

Тогда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{0 < |v| \leq A} R_n(v) dZ_1(v) = 0 \quad \text{н.в. и в } L^2. \quad (19)$$

Следующие несколько лемм редуцируют нашу задачу к проверке равенства (19) для ядер $R_n(v)$, связанных с $Q_n(\lambda)$. Далее буквами C, C_1 обозначаются некоторые абсолютные постоянные. В силу четности функций $Q_n(\lambda)$ все оценки проводятся при $0 < \lambda < \pi$.

Лемма 2. Пусть $Q_n(\lambda) = \sum_{k=1}^n k^{-1} \cos k\lambda$, $\Phi(\lambda) = \sum_{k=1}^{\infty} k^{-1} \cos k\lambda$. При $0 < \lambda \leq \pi, n \geq 2, 1 \leq k \leq n$ справедливы оценки:

$$|Q_n(\lambda)| \leq \ln n + C_1 \leq C \log n, \quad (20)$$

$$|Q_n(\lambda) - \Phi(\lambda)| \leq C(n\lambda)^{-1}, \quad (21)$$

$$|Q_n(\lambda) - Q_k(\lambda)| \leq C \log \frac{n}{k}, \quad (22)$$

$$|Q_n(\lambda) - Q_k(\lambda)| \leq C(k\lambda)^{-1}. \quad (23)$$

Доказательство (20) и (22) сразу следует из неравенства $|Q_n(\lambda) - Q_k(\lambda)| \leq \sum_{\nu=k+1}^n \nu^{-1}$. Далее,

$$\begin{aligned} |Q_n(\lambda) - \Phi(\lambda)| &= \left| -(n+1)^{-1} D_n(\lambda) + \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \nu^{-1} (\nu+1)^{-1} D_\nu(\lambda) \right| \\ &\leq 4(n\lambda)^{-1}, \end{aligned}$$

где $D_n(\lambda)$ — ядро Дирихле, $D_n(\lambda) = \sin((n + \frac{1}{2})\lambda)/(2 \sin \lambda/2)$. Поэтому

$$|Q_n(\lambda) - Q_k(\lambda)| \leq 8(k\lambda)^{-1} \quad \text{при } 1 \leq k \leq n.$$

Пусть $0 < \lambda < \pi$, $v = (\log(2\pi/\lambda))^{-1}$; $0 < v \leq 1$. Обозначим $N_m = 2^{2^m}$ и пусть для $2^m \leq n < 2^{m+1}$

$$R_n(v) = \begin{cases} vQ_{2^n}(\lambda) & \text{при } 0 < N_m\lambda \leq 2\pi, \\ v(Q_{2^n}(\lambda) - \Phi(\lambda)) & \text{при } N_m\lambda > 2\pi. \end{cases} \quad (24)$$

Положим также

$$dZ_1(v) = L_1(\lambda) dZ(\lambda). \quad (25)$$

Мера $dZ_1(v)$ имеет ортогональные приращения на $(0, 1]$, и условие

$$\int_{+0}^{\pi} L_1^2(\lambda) dF(\lambda) < \infty \quad (9')$$

эквивалентно условию

$$\int_{+0}^1 dF_1(v) < \infty, \quad dF_1(v) = \|dZ_1(v)\|^2. \quad (26)$$

Лемма 3. При $2^m \leq k \leq n \leq 2^{m+1}$, $0 < v < 1$ справедливы оценки:

- а) $|R_n(v)| \leq C \min(nv; (nv)^{-1})$;
- б) $|R_n(v) - R_k(v)| \leq C(n-k)v$;
- в) $|R_n(v) - R_k(v)| \leq C(n-k)k^{-1}$.

Доказательство. а) Если $0 < N_m\lambda \leq 2\pi$, то $nv \leq 2$ и $|R_n(v)| \leq v|Q_{2^n}(\lambda)| \leq Cnv \leq 2C \min(nv; (nv)^{-1})$; если же $N_m\lambda > 2\pi$, то $nv > 1$, и в силу (21) имеем:

$$\begin{aligned} |R_n(v)| &\leq v|Q_{2^n}(\lambda) - \Phi(\lambda)| \leq C2^{-n} \left(\lambda \log \frac{2\pi}{\lambda} \right)^{-1} \\ &\leq C2^{-m} \leq 2C(nv)^{-1}. \end{aligned} \quad (27)$$

Поэтому $|R_n(v)| \leq 2C \min(nv; (nv)^{-1})$ и в области $N_m\lambda > 2\pi$.

Аналогично, при $2^m \leq k \leq n \leq 2^{m+1}$ из (22) следует неравенство б):

$$|R_n(v) - R_k(v)| \leq v|Q_{2^n}(\lambda) - Q_{2^k}(\lambda)| \leq C(n-k)v.$$

Если $kv \geq 2$, то б) $\Rightarrow$ в); если же $nv > kv > 2$, то $N_m\lambda \geq 2\pi$ и оценка в) тривиально следует из (27): $|R_n(v) - R_k(v)| \leq 4Ck^{-1} \leq C_1(n-k)k^{-1}$.

Лемма 4. Если (a_k) — произвольные числа,

$$S_n = \sum_{k=1}^n a_k \quad \text{и} \quad \lim_{\nu \rightarrow \infty} \nu^{-1} S_\nu = 0,$$

то и

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{1 \leq k \leq 2^n} \left| \sum_{\nu=2^n+1}^{2^n+k} \nu^{-1} a_\nu \right| = 0.$$

Действительно,

$$\begin{aligned} \left| \sum_{\nu=2^n+1}^{2^n+k} \nu^{-1} a_\nu \right| &= \left| -(2^n+1)^{-1} S_{2^n} + \sum_{\nu=2^n+1}^{2^n+k} \nu^{-1} (\nu+1)^{-1} S_\nu \right| \\ &\leq 2^{-n} |S_{2^n}| + \sup_{2^n < \nu \leq 2^{n+1}} \nu^{-1} |S_\nu|. \end{aligned}$$

Лемма 5. Если выполнено условие (9), то

$$2 \int_{0 < |\lambda| \leq \lambda_m} \Phi(\lambda) dZ(\lambda) = 2 \int_{0 < |\lambda| \leq \lambda_m} L_1(\lambda) dZ(\lambda) + \delta_m, \quad (28)$$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \delta_m = 0 \quad \text{н.в. и в } L^2. \quad (29)$$

Доказательство. При $0 < |\lambda| \leq \pi$ известна оценка (см. [11, гл. 5]): $\Phi(\lambda) = L_1(\lambda) + \Psi_1(\lambda)$, $|\Psi_1(\lambda)| \leq C_1$. Если обозначить

$$\delta_m = 2 \int_{0 < |\lambda| \leq \lambda_m} \Psi_1(\lambda) dZ(\lambda),$$

то из условия (9) легко следует сходимость ряда $\sum 2^{2^m} \|\delta_m\|^2$, что влечет за собой (29).

Доказательство теоремы 2. Пусть выполнены условия (8)–(10). Оценим сначала разность $\sigma_{2^n} - \eta$, где $2^m \leq n < 2^{m+1}$. Полагая $\lambda_m = 2\pi N_m^{-1}$, имеем:

$$\begin{aligned} \sigma_{2^n} - \eta &= 2 \int_{0 < |\lambda| \leq \pi} [Q_{2^n}(\lambda) - \Phi(\lambda)] dZ(\lambda) \\ &= -2 \int_{0 < |\lambda| \leq \lambda_m} \Phi(\lambda) dZ(\lambda) + 2 \int_{0 < |\lambda| \leq \lambda_m} Q_{2^n}(\lambda) dZ(\lambda) \\ &\quad + 2 \int_{\lambda_m < |\lambda| \leq \pi} [Q_{2^n}(\lambda) - \Phi(\lambda)] dZ(\lambda). \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\sigma_{2^n} = \eta - 2 \int_{0 < |\lambda| \leq \lambda_m} \Phi(\lambda) dZ(\lambda) + \varepsilon_n, \quad (30)$$

где остаток ε_n представляется в виде суммы двух интегралов ε'_n и ε''_n по промежуткам $0 < \lambda \leq \pi$ и $-\pi \leq \lambda < 0$. Первый интеграл переписывается в виде

$$\varepsilon'_n = \int_{+0}^1 R_n(v) dZ_1(v), \quad \int_{+0}^1 dF_1(v) < \infty.$$

В силу четности ядра $Q_n(\lambda)$ второй интеграл переписывается в виде

$$\varepsilon_n'' = \int_{+0}^1 R_n(v) dZ_2(v), \quad \int_{+0}^1 dF_2(v) < \infty,$$

где ядра $R_n(\lambda)$ определены согласно (24). Оценки а), б), в) леммы 3 показывают, что для ядер $R_n(\lambda)$ выполнены все требования леммы 1 (при $\alpha = \beta = \alpha_1 = \alpha_2 = \gamma_2 = \beta_1 = \beta_3 = 1; \gamma_1 = 0, \beta_2 = 0$). Значит,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n = 0 \quad \text{п.в. и в } L^2. \quad (31)$$

Для завершения доказательства применяем леммы 4 и 5. Тогда при $N_m \leq \nu < N_{m+1}$ получим требуемое представление (11), где для $\nu = 2^n + k, 2^m \leq n < 2^{m+1}, 1 \leq k < 2^n$, введены обозначения:

$$\eta_\nu = -\delta_m + \varepsilon_n + (\sigma_\nu - \sigma_{2^n}), \quad |\eta_\nu| \leq |\delta_m| + |\varepsilon_n| + \sup_{1 \leq k < 2^n} |\sigma_{2^n+k} - \sigma_{2^n}|.$$

З а м е ч а н и е. Вместо последовательности $N_m = 2^{2^m}$ в теореме 2 можно рассматривать любую последовательность $\tilde{N}_m = [q_1^{q_2^m}]$, $q_1 > 1$, $q_2 > 1$, или любую другую последовательность $\tilde{N}_m$, для которой $\log \log \tilde{N}_m = Am + O(1)$; $\tilde{\lambda}_m = \tilde{N}_m^{-1}$. Тогда число решений неравенств $N_m \leq \tilde{N}_n < N_{m+1}$ и $\tilde{N}_m \leq \tilde{N}_n < \tilde{N}_{m+1}$ не превосходит $C = C(A)$ при $m = 1, 2, \dots$ и условие (12) эквивалентно условию

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \int_{0 < |\lambda| \leq \tilde{\lambda}_m} L_1(\lambda) dZ(\lambda) = 0 \quad \text{п.в.}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о т е о р е м ы 3. С помощью представления (11) сведем задачу к задаче о сходимости п.в. некоторого ассоциированного ортогонального ряда $\sum_1^\infty \Phi_k$ (аналогично [1], [2]). Если $\Phi_k = 2 \int_{\lambda_{k+1} < |\lambda| \leq \lambda_k} L_1(\lambda) dZ(\lambda)$, то $(\Phi_k, \Phi_n) = 0$ при $k \neq n$, и в силу (9) имеем: $\sum_1^\infty \Phi_k \stackrel{L^2}{=} \eta$, $\sum \|\Phi_k\|^2 < \infty$. Так как $\log k \leq L_3(\lambda) \leq \log(k+1)$ при $\lambda_k < |\lambda| \leq \lambda_{k+1}$, то по условию (13) $\sum \|\Phi_k\|^2 \log^2 k < \infty$. По теореме Меньшова-Радемахера последовательность

$$\sum_{k=m}^\infty \Phi_k = \eta - \sum_{k=1}^{m-1} \Phi_k$$

сходится п.в. к 0, т.е. выполнено условие (12). Вторая часть теоремы получается с помощью известного контрпримера Меньшова (ср. [1], [2]).

Пусть $N_\nu = 2^{2^\nu}$ и $\lambda_\nu = 2\pi N_\nu^{-1}$. Если $\omega(u) = o(\log \log \log u)$ при $u \rightarrow \infty$, то для $\omega_1(\nu) = \omega(\lambda_\nu)$ имеем: $\omega_1(\nu) \geq 1$, $\omega_1(\nu) = o(\log \nu)$ при $\nu \rightarrow \infty$. Поэтому в $L^2[0, 1]$ существует такая ортогональная система $\{\Psi_\nu(x)\}_1^\infty$, что $\sum \|\Psi_\nu\|^2 \omega_1^2(\nu) < \infty$, но ряд $\sum_{\nu=1}^\infty \Psi_\nu(x)$ сходится в L^2 и расходится п.в. (см. [12]). Рассмотрим замкнутую линейную оболочку

системы $\{\Psi_\nu\}_1^\infty = H_1$ и в ее ортогональном дополнении H_2 выберем ортонормированный базис $\{\Phi_\mu\}$.

Введем унитарный оператор T в $L^2[0, 1]$ формулами:

$$T\Psi_\nu = \exp(i\lambda_\nu)\Psi_\nu \quad (\nu \geq 1); \quad T\Phi_\mu = \Phi_\mu.$$

Для элемента $f(x) \stackrel{L^2}{=} \sum_{\nu=1}^\infty \Psi_\nu(x) 2^{-\nu}$ имеем:

$$T^k f(x) = \sum_1^\infty \exp(i\lambda_\nu k) \Psi_\nu(x) 2^{-\nu}.$$

Поэтому $Tf = \int_{-\pi}^\pi e^{i\lambda} dZ(\lambda)$, где спектральная мера $dZ(\lambda)$ имеет скачки $\Psi_\nu(x) 2^{-\nu}$ в точках λ_ν ($\nu \geq 1$). Так как $L_1(\lambda_\nu) = 2^\nu$, то по теореме 2

$$\sigma_{N_m}(x) = \sum_{k=1}^{N_m} k^{-1} (T^k f(x) + T^{-k} f(x)) = \eta(x) - 2 \sum_{\nu=m}^\infty \Psi_\nu(x) + \eta_{N_m}(x). \quad (32)$$

Поэтому средние σ_{N_m} расходятся п.в. С другой стороны,

$$\int_{0 < |\lambda| \leq \pi} L_1^2(\lambda) \omega^2(\lambda) dF(\lambda) = \sum \|\Psi_\nu\|^2 \omega_1^2(\nu) < \infty.$$

З а м е ч а н и е. Представление (32) для данного оператора T и функции f легко проверить и непосредственным подсчетом.

Приведем также достаточные условия существования одностороннего преобразования Гильберта, выраженные через «корреляционную функцию» $R_1(n) = (T^n f, T^n f)$ или «усредненную корреляционную функцию»

$$R_2(n) = n^{-2} \left\| \sum_1^n T^k f \right\|^2 = n^{-1} \|f\|^2 + 2n^{-2} \sum_{k=1}^n (n-k) R_1(k).$$

Известно, что определенные ограничения на спектральную меру $dF(\lambda)$ при $\lambda \rightarrow 0$ переписываются в виде соответствующих условий, налагаемых на скорость убывания $R_2(n)$. В частности, условие (13) (вместе с условием (8)) эквивалентно сходимости ряда

$$\sum R_2(n) n^{-1} \log n \log \log \log^2 n \quad (33)$$

(см., например, [13]). Кроме того, сходимость ряда

$$\sum R_1(n) n^{-1} \log n \log \log \log^2 n \quad (34)$$

влечет за собой сходимость ряда (33). Отсюда получается следующая теорема.

Теорема 3а. Если сходится ряд (33) или ряд (34), то

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n k^{-1} T^k f(x) = \eta''(x) \quad \text{п.в.}$$

В работе [13] теорема 3а доказана другим, более сложным, методом. Там же содержится пример, показывающий неулучшаемость, в определенном смысле, условий теоремы 3а.

Отметим одну интересную задачу, возникающую в связи с данным кругом вопросов. Известно, что для сохраняющих меру унитарных преобразований пространства с конечной мерой в себя и порожденных ими унитарных операторов двустороннее эргодическое преобразование Гильберта всегда сходится п.в. и в L^2 (для $f \in L^2$). В работах [14], [15] было показано, что это утверждение можно вывести из цитированного выше результата работы [3] (см. соотношение (6)). Более того, для таких операторов не только при $\varepsilon_m = 2^{-m}$, но и при любых $\varepsilon_m \rightarrow +0$ справедливы равенства

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \int_{0 < \lambda \leq \varepsilon_m} dZ(\lambda) = 0, \quad \lim_{m \rightarrow \infty} \int_{-\varepsilon_m \leq \lambda < 0} dZ(\lambda) = 0 \quad \text{п.в.}$$

Возникает вопрос: всегда ли из сходимости в L^2 односторонних средних $\sum_{k=1}^n k^{-1} f(U^k x)$, где $f \in L^2$, U — сохраняющее меру преобразование Ω в себя, следует сходимость этих средних п.в.? Для решения этого вопроса было бы достаточно установить, что условие (9) в этом случае влечет за собой сходимость п.в. (при любых $\varepsilon_k \rightarrow +0$ или при $\varepsilon_k = 2\pi 2^{-2^k}$) последовательности интегралов $\{\int_{0 < \lambda \leq \varepsilon_k} L_1(\lambda) dZ(\lambda)\}$. Если (ξ_k) — гауссовская стационарная последовательность, $\xi_k = \xi_0(U^k x)$, то $Z(\lambda)$ — гауссовский процесс с независимыми приращениями и ответ на поставленный вопрос положительный.

§ 2. Обобщенные эргодические преобразования

Рассмотрим задачу о сходимости в L^2 и почти всюду более общих двусторонних и односторонних эргодических преобразований

$$\sum_{k=-n}^n a_k T^k f(x), \quad \sum_{k=-n}^n a_k \operatorname{sign} k T^k f(x), \quad \sum_{k=1}^n a_k T^k f(x),$$

где $a_{-k} = a_k$, $a_0 = 0$ и $(a_k)_1^\infty$ — некоторая стремящаяся к нулю последовательность. В этом параграфе исследуется случай $a_k = k^{-\alpha}$, $\alpha > 0$, в § 3 приводятся некоторые обобщения. Пусть снова T — унитарный оператор, $f \in L^2$,

$$\tilde{\sigma}'_n = \sum_{k=1}^n k^{-\alpha} (T^k f(x) - T^{-k} f(x)); \quad \tilde{\sigma}''_n = \sum_{k=1}^n k^{-\alpha} T^k f(x);$$

$$\tilde{\sigma}_n = \sum_{k=1}^n k^{-\alpha} (T^k f(x) + T^{-k} f(x)).$$

Используя спектральное представление (2), получим, что

$$\tilde{\sigma}'_n = 2i \int_{|\lambda| \leq \pi} S_n^\alpha(\lambda) dZ(\lambda); \quad \tilde{\sigma}_n = 2 \int_{|\lambda| \leq \pi} C_n^\alpha(\lambda) dZ(\lambda), \quad (35)$$

$$\tilde{\sigma}''_n = \frac{1}{2} (\tilde{\sigma}'_n + \tilde{\sigma}_n), \quad (36)$$

где

$$C_n^\alpha(\lambda) = \sum_{k=1}^n k^{-\alpha} \cos k\lambda, \quad (37)$$

$$S_n^\alpha(\lambda) = \sum_{k=1}^n k^{-\alpha} \sin k\lambda. \quad (38)$$

Таким образом, достаточно исследовать сходимость интегралов (35) при $n \rightarrow \infty$. Так как случай $\alpha > 1$ тривиален (для любой $f \in L^2$ средние $\tilde{\sigma}_n, \tilde{\sigma}'_n, \tilde{\sigma}''_n$ сходятся абсолютно п.в.), то далее считаем, что $0 < \alpha < 1$.

Известно, что при $\lambda \neq 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} C_n^\alpha(\lambda) = c_\alpha(\lambda), \quad c_\alpha(\lambda) \sim A_\alpha |\lambda|^{\alpha-1} \quad \text{при } \lambda \rightarrow 0, \quad (39)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n^\alpha(\lambda) = s_\alpha(\lambda), \quad s_\alpha(\lambda) \sim B_\alpha |\lambda|^{\alpha-1} \quad \text{при } \lambda \rightarrow 0, \quad (40)$$

где $A_\alpha = \Gamma(1-\alpha) \sin(\pi\alpha/2)$, $B_\alpha = \Gamma(1-\alpha) \cos(\pi\alpha/2)$ (см. [11]). При этом

$$\lim_{n \rightarrow \infty} C_n^\alpha(0) = \infty; \quad \lim_{n \rightarrow \infty} S_n^\alpha(0) = 0. \quad (41)$$

Из этих замечаний получаем следующее утверждение.

Теорема 4. Пусть $0 < \alpha < 1$. Средние $\tilde{\sigma}'_n$ сходятся в L^2 тогда и только тогда, когда выполнено условие

$$\int_{0 < |\lambda| \leq \pi} |\lambda|^{2\alpha-2} dF(\lambda) < \infty, \quad (42)$$

причем $\lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{\sigma}'_n \stackrel{L^2}{=} 2i \int_{0 < |\lambda| \leq \pi} s_\alpha(\lambda) dZ(\lambda) = \eta_\alpha$.

Средние $\tilde{\sigma}_n$ и $\tilde{\sigma}''_n$ сходятся в L^2 тогда и только тогда, когда выполнено условие (42) и условие (8). При этом

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{\sigma}'_n \stackrel{L^2}{=} 2 \int_{0 < |\lambda| \leq \pi} c_\alpha(\lambda) dZ(\lambda) = \xi_\alpha; \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{\sigma}''_n \stackrel{L^2}{=} \frac{1}{2} (\xi_\alpha + \eta_\alpha).$$

Теорема 5. Пусть выполнено условие (42). 1) Если $0 < \alpha < 1$, то справедливо представление

$$\tilde{\sigma}'_{2^m} = \eta_\alpha - 2iB_\alpha \int_{0 < |\lambda| \leq 2^{-m}} |\lambda|^{\alpha-1} \operatorname{sign} \lambda dZ(\lambda) + \gamma_{2^m}, \quad (43)$$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \gamma_{2^m} = 0 \quad \text{п.в. и в } L^2. \quad (44)$$

В частности, средние $\tilde{\sigma}'_{2^m}$ сходятся п.в. и в L^2 тогда и только тогда, когда

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \int_{0 < |\lambda| \leq 2^{-m}} |\lambda|^{\alpha-1} \operatorname{sign} \lambda dZ(\lambda) = 0 \quad \text{п.в.} \quad (45)$$

2) Если $\frac{1}{2} < \alpha < 1$, то также и при $2^m \leq n < 2^{m+1}$ справедливо представление

$$\tilde{\sigma}'_n = \eta_\alpha - 2iB_\alpha \int_{0 < |\lambda| \leq 2^{-m}} |\lambda|^{\alpha-1} \operatorname{sign} \lambda dZ(\lambda) + \gamma_n, \quad (43')$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \gamma_n = 0 \quad \text{п.в. и в } L^2. \quad (44')$$

В частности, средние $\tilde{\sigma}'_n$ сходятся п.в. и в L^2 тогда и только тогда, когда выполнено условие (45).

З а м е ч а н и е. Аналогичная теорема имеет место и для средних $\tilde{\sigma}''_n, \tilde{\sigma}_n$ со следующими отличиями: а) кроме условия (42) необходимо предполагать также, что выполнено условие (8); б) вместо представления (43') или (43) рассматривается представление с четной подынтегральной функцией, например, при $\alpha > \frac{1}{2}$, $2^m \leq n < 2^{m+1}$:

$$\tilde{\sigma}_n = \xi_\alpha - 2A_\alpha \int_{0 < |\lambda| \leq 2^{-m}} |\lambda|^{\alpha-1} dZ(\lambda) + \delta_n,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n = 0 \quad \text{п.в. и в } L^2;$$

в) представление средних $\tilde{\sigma}''_n$ получается как линейная комбинация представлений $\tilde{\sigma}_n$ и $\tilde{\sigma}'_n$.

Доказательство теоремы 5 проводится по той же схеме, что и доказательство теоремы 2 (и несколько проще). Будем оценивать, для определенности, интегралы $\int_{0 < |\lambda| \leq \pi} S_n^\alpha(\lambda) dZ(\lambda)$. Рассмотрим при $2^m \leq n < 2^{m+1}$ ядра

$$\tilde{S}_n^\alpha(\lambda) = \begin{cases} S_n^\alpha(\lambda) |\lambda|^{1-\alpha} & \text{при } |\lambda| \leq 2^{-m}, \\ (S_n^\alpha(\lambda) - s_\alpha(\lambda)) |\lambda|^{1-\alpha} & \text{при } |\lambda| > 2^{-m}. \end{cases}$$

Лемма 6. Справедливы оценки:

$$\text{а) } |\tilde{S}_n^\alpha(\lambda)| \leq C_\alpha \min((n|\lambda|)^{1-\alpha}, (n|\lambda|)^{-\alpha});$$

$$\text{б) } |\tilde{S}_n^\alpha(\lambda) - \tilde{S}_k^\alpha(\lambda)| \leq C_\alpha (n-k) |\lambda|^{1-\alpha} k^{-\alpha} \quad (2^m \leq k < n \leq 2^{m+1});$$

$$\text{в) } |\tilde{S}_n^\alpha(\lambda) - \tilde{S}_k^\alpha(\lambda)| \leq C_\alpha (k|\lambda|)^{-\alpha} \quad (2^m \leq k < n \leq 2^{m+1}).$$

Доказательство. Если $2^m |\lambda| \leq 1$, то $n|\lambda| \leq 2$, и

$$|\tilde{S}_n^\alpha(\lambda)| \leq |\lambda|^{1-\alpha} \sum_{j=1}^n \nu_j^{-\alpha} \leq C_\alpha (n|\lambda|)^{1-\alpha}.$$

Если же $2^m |\lambda| > 1$, то и $n |\lambda| > 1$; преобразование Абеля дает:

$$\begin{aligned} |\tilde{S}_n^\alpha(\lambda)| &= \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} k^{-\alpha} \sin k\lambda \right| \cdot |\lambda|^{1-\alpha} \\ &\leq \left| -(n+1)^{-\alpha} D_n(\lambda) + \sum_{k=n+1}^{\infty} D_k(\lambda) \Delta(k^{-\alpha}) \right| \cdot |\lambda|^{1-\alpha} \\ &\leq \bar{C}_\alpha (n |\lambda|)^{-\alpha}. \end{aligned}$$

Оценка в) вытекает из а). Наконец, при всех λ и $k < n$

$$|\tilde{S}_n^\alpha(\lambda) - \tilde{S}_k^\alpha(\lambda)| \leq |\lambda|^{1-\alpha} \sum_{\nu=k+1}^n \nu^{-\alpha} \leq (n-k) k^{-\alpha} |\lambda|^{1-\alpha}.$$

Лемма 7. Если выполнено условие (42) при некотором $\alpha > 0$, то

$$\begin{aligned} 2i \int_{0 < |\lambda| \leq 2^{-m}} s_\alpha(\lambda) dZ(\lambda) \\ = -2i B_\alpha \int_{0 < |\lambda| \leq 2^{-m}} |\lambda|^{1-\alpha} \operatorname{sign} \lambda dZ(\lambda) + \delta_m^\alpha, \end{aligned} \quad (46)$$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \delta_m^\alpha = 0 \quad \text{п.в. и в } L^2. \quad (47)$$

Эта лемма доказывается так же, как лемма 5.

Доказательство теоремы 5. При $2^m \leq n < 2^{m+1}$

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}'_n - \eta_\alpha &= 2i \int_{0 < |\lambda| \leq \pi} [S_n^\alpha(\lambda) - s_k^\alpha(\lambda)] dZ(\lambda) \\ &= -2i \int_{0 < |\lambda| \leq 2^{-m}} s_\alpha(\lambda) dZ(\lambda) + \eta_n^\alpha, \end{aligned} \quad (48)$$

где

$$\eta_n^\alpha = 2i \int_{0 < |\lambda| \leq \pi} \tilde{S}_n^\alpha(\lambda) dZ_1(\lambda), \quad (49)$$

$$dZ_1(\lambda) = |\lambda|^{\alpha-1} dZ(\lambda), \quad dF_1(\lambda) = \|dZ_1(\lambda)\|^2.$$

Спектральная мера $dZ_1(\lambda)$ также имеет ортогональные приращения, причем $\int_{0 < |\lambda| \leq \pi} dF_1(\lambda) < \infty$ в силу условия (42). Применим теперь лемму 1 к величинам η_n^α . Если $0 < \alpha < 1$, то по лемме 6 для ядер $\tilde{S}_n^\alpha(\lambda)$ выполнено условие 1) леммы 1, и поэтому $\lim_{m \rightarrow \infty} \eta_{2^m}^\alpha = 0$ п.в. и в L^2 . Используя также лемму 7, получим первое утверждение теоремы 5. Если $\alpha > \frac{1}{2}$, то применимо и условие 2) леммы 1 (в силу оценок леммы 6 можно взять $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$, $\beta_1 = \beta_2 = 1 - \alpha$, $\gamma_1 = \gamma_2 = \beta_3 = \alpha > \frac{1}{2}$, и выполнены условия $\beta_1 + \gamma_1 = 1 > \gamma_1$, $\beta_2 + \gamma_2 = 1 \geq \alpha_2$). Поэтому справедливо и второе утверждение теоремы 5.

Из теоремы Меньшова-Радемахера и представлений (43), (43') сразу вытекает следующее предложение (его аналоги справедливы и для $\tilde{\sigma}_n, \tilde{\sigma}_n''$).

Теорема 6. 1) Пусть выполнено условие

$$\int_{0 < |\lambda| \leq \pi} |\lambda|^{2\alpha-2} L_2(\lambda) dF(\lambda) < \infty. \quad (50)$$

Если $1 > \alpha > 0$, то $\lim_{m \rightarrow \infty} \tilde{\sigma}_{2^m}' = \eta_\alpha$ п.в.; если $1 > \alpha > \frac{1}{2}$, то и $\lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{\sigma}_n' = \eta_\alpha$ п.в.

2) Условие (50) является неулучшаемым в том же смысле, что и условие (13) в теореме 3.

Аналогом теоремы 3а является следующее утверждение.

Теорема 6а. Пусть сходится ряд

$$\sum R_2(n) n^{1-2\alpha} \log \log^2 n$$

или сходится ряд

$$\sum R_1(n) n^{1-2\alpha} \log \log^2 n.$$

Если $0 < \alpha < 1$, то средние $\tilde{\sigma}_{2^m}, \tilde{\sigma}_{2^m}', \tilde{\sigma}_{2^m}''$ сходятся п.в. и в L^2 ; если $\frac{1}{2} < \alpha < 1$, то и средние $\tilde{\sigma}_n, \tilde{\sigma}_n', \tilde{\sigma}_n''$ сходятся п.в. и в L^2 .

Действительно, сходимость второго ряда влечет за собой сходимость первого ряда, которая, в свою очередь, влечет сходимость интеграла (50) и условие (8) (см. [13]).

Утверждение теоремы 6а при $\alpha > \frac{1}{2}$ с помощью более сложных прямых оценок было получено в работе [13].

З а м е ч а н и е. При $0 < \alpha \leq \frac{1}{2}$ не только теряют силу утверждение 2) теоремы 5 (и соответствующие утверждения теорем 6 и 6а), но и другие, более сильные, чем (42), ограничения на спектральную меру не влекут за собой сходимость средних $\tilde{\sigma}_n$ ($\tilde{\sigma}_n', \tilde{\sigma}_n''$) почти всюду.

П р и м е р. Пусть $(\chi_n)_0^\infty$ — полная ортонормированная система Хаара в $L^2[0, 1]$. Она обладает следующими свойствами:

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} n^{-1/2} |\chi_n| \geq \frac{1}{2} \quad \text{п.в.}; \quad \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} n^{-1/2} |\chi_n| = 0 \quad \text{п.в.} \quad (51)$$

Положим $\varphi_0 = \chi_0, \varphi_{-1} = \chi_1, \varphi_1 = \chi_2, \varphi_2 = \chi_3, \dots$ и образуем стационарный процесс

$$\xi_n = \varphi_n - \varphi_{n+1} = U^n(\varphi_0 - \varphi_1), \quad -\infty < n < \infty,$$

U — унитарный оператор сдвига. Рассмотрим, например, односторонние средние

$$\tilde{\sigma}_n'' = \sum_{k=1}^n k^{-\alpha} \xi_k = -n^{-\alpha} \varphi_{n+1} + \sum_{k=1}^n \varphi_k b_k^\alpha.$$

Здесь $b_k^\alpha = O(k^{-\alpha-1})$, и поэтому ряд $\sum_1^\infty \varphi_k b_k^\alpha$ абсолютно сходится п.в.

Следовательно, предел $(\tilde{\sigma}_n'')$ существует тогда и только тогда, когда существует предел последовательности $(n^{-\alpha}\varphi_{n+1})$. В силу (51) при $\alpha \leq \frac{1}{2}$ последний предел не существует п.в. В то же время

$$dF(\lambda) = |1 - e^{i\lambda}|^2 d\lambda = 4 \sin^2 \frac{\lambda}{2} d\lambda;$$

$$R_2(n) = O(n^{-2}); \quad R_1(n) = 0 \quad (n \geq 2).$$

Следовательно,

$$\int_{0 < |\lambda| \leq \pi} |\lambda|^{-\beta} dF(\lambda) < \infty \quad \text{при } \beta < 3;$$

$$\sum R_2(n) n^\gamma < \infty \quad \text{при } \gamma < 1.$$

§ 3. Некоторые обобщения

3.1. Преобразования с общими весовыми коэффициентами.

Пусть $b(\tau)$ — положительная медленно меняющаяся функция (м.м.ф.) на $[1, \infty)$, т.е. $\forall \delta > 0 \quad b(\tau)\tau^{-\delta} \downarrow 0, \quad b(\tau)\tau^\delta \uparrow \infty$ при $\tau \rightarrow \infty$.

Вместо средних $\tilde{\sigma}_n, \tilde{\sigma}_n', \tilde{\sigma}_n''$ из § 2 можно рассмотреть средние с коэффициентами $a_k = b(k)k^{-\alpha}$. Приведем формулировки для средних $\tilde{\sigma}_n'$ ($a_{-k} = a_k \operatorname{sign} k$); для $\tilde{\sigma}_n$ и $\tilde{\sigma}_n''$ они аналогичны.

Пусть

$$\tilde{\sigma}_n' = \sum_{k=1}^n b(k) k^{-\alpha} [T^k f(x) - T^{-k} f(x)], \quad f \in L^2.$$

Тогда $\tilde{\sigma}_n' = 2i \int_{|\lambda| \leq \pi} \tilde{S}_n^\alpha(\lambda) dZ(\lambda)$,

$$\tilde{S}_n^\alpha(\lambda) = \sum_{k=1}^n b(k) k^{-\alpha} \sin k\lambda; \quad \tilde{s}_\alpha(\lambda) = \sum_{k=1}^{\infty} b(k) k^{-\alpha} \sin k\lambda.$$

Пусть сначала $0 < \alpha < 1$.

Теорема 4'. Средние $\tilde{\sigma}_n'$ сходятся в L^2 тогда и только тогда, когда

$$\int_{0 < |\lambda| \leq \pi} |\lambda|^{2\alpha-2} b^2\left(\frac{1}{|\lambda|}\right) dF(\lambda) < \infty, \quad (52)$$

причем $\lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{\sigma}_n' \stackrel{L^2}{=} 2i \int_{0 < |\lambda| \leq \pi} \tilde{s}_\alpha(\lambda) dZ(\lambda) = \tilde{\eta}_\alpha$.

Теорема 5'. Пусть выполнено условие (52). 1) Если $0 < \alpha < 1$, то

$$\tilde{\sigma}_{2^m}' = \tilde{\eta}_\alpha - 2iB_\alpha \int_{0 < |\lambda| \leq 2^{-m}} |\lambda|^{\alpha-1} \operatorname{sign} \lambda b\left(\frac{1}{|\lambda|}\right) dZ(\lambda) + \gamma_{2^m},$$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \gamma_{2^m} = 0 \quad \text{п.в. и в } L^2.$$

В частности, средние $\tilde{\sigma}'_{2^m}$ сходятся в п.в. и в L^2 тогда и только тогда, когда

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \int_{0 < |\lambda| \leq 2^{-m}} |\lambda|^{\alpha-1} \operatorname{sign} \lambda b \left(\frac{1}{|\lambda|} \right) dZ(\lambda) = 0 \quad \text{п.в.} \quad (53)$$

2) Если $\frac{1}{2} < \alpha < 1$, то также и при всех $2^m \leq n < 2^{m+1}$

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}'_n &= \tilde{\eta}_\alpha - 2iB_\alpha \int_{0 < |\lambda| \leq 2^{-m}} |\lambda|^{\alpha-1} \operatorname{sign} \lambda b \left(\frac{1}{|\lambda|} \right) dZ(\lambda) + \gamma_n, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \gamma_n &= 0 \quad \text{п.в. и в } L^2. \end{aligned}$$

В частности, $\lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{\sigma}'_n = 0$ п.в. и в L^2 тогда и только тогда, когда выполнено условие (52).

Доказательства этих утверждений проводятся подобно доказательству теоремы 5 с использованием известных свойств соответствующих ядер (см. [11, гл. 5]). Более интересен случай $\alpha = 1$. Пусть, по-прежнему, $b(\tau)$ — некоторая м.м.ф. на $[1, \infty)$, $b(-\tau) = b(\tau)$. Приведем соответствующие результаты для средних

$$\begin{aligned} \sigma'_n &= \sum_{k=1}^n b(k) k^{-1} [T^k f(x) - T^{-k} f(x)], \\ \sigma_n &= \sum_{k=1}^n b(k) k^{-1} [T^k f(x) + T^{-k} f(x)]. \end{aligned}$$

Как и при $b(k) \equiv 1$, свойства этих средних существенно отличаются друг от друга. Обозначим

$$\begin{aligned} Q'_n(\lambda) &= \sum_{k=1}^n b(k) k^{-1} \sin k\lambda; & \Psi(\lambda) &= \sum_{k=1}^{\infty} b(k) k^{-1} \sin k\lambda; \\ Q_n(\lambda) &= \sum_{k=1}^n b(k) k^{-1} \cos k\lambda; & \Phi(\lambda) &= \sum_{k=1}^{\infty} b(k) k^{-1} \cos k\lambda. \end{aligned}$$

Заметим, что если интеграл $\int_1^\infty b(\tau) \tau^{-1} d\tau$ сходится, то ряды $\sum_1^\infty b(k) \times k^{-1} T^k f$, $\sum_1^\infty b(k) k^{-1} T^{-k} f$ абсолютно сходятся п.в. и в L^2 для любых $f \in L^2$. Поэтому далее считаем, что

$$B(t) = \int_1^t b(\tau) \tau^{-1} d\tau, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} B(t) = \infty. \quad (54)$$

Лемма 8. При $|\lambda| \rightarrow 0$ имеем:

$$\Psi(\lambda) \sim \frac{\pi}{2} b \left(\frac{1}{|\lambda|} \right), \quad \Phi(\lambda) \sim B \left(\frac{1}{|\lambda|} \right) \sim B \left(\frac{2\pi}{|\lambda|} \right)$$

(см. [11]).

Образует ядра $R_n(\lambda)$ для $2^m \leq n < 2^{m+1}$:

$$R_n(\lambda) = \begin{cases} Q'_n(\lambda) b^{-1} \left(\frac{1}{|\lambda|} \right) & \text{при } 0 < |\lambda| \leq 2^{-m}; \\ (Q'_n(\lambda) - \Psi(\lambda)) b^{-1} \left(\frac{1}{|\lambda|} \right) & \text{при } |\lambda| > 2^{-m}. \end{cases}$$

С использованием известной асимптотики $Q'_n(\lambda)$ легко проверяются все условия леммы 3 для этих ядер, и получается представление средних σ'_n и его естественные следствия. Приведем лишь одно из них.

Теорема 7. Для сходимости средних σ'_n п.в. и в L^2 при $n \rightarrow \infty$ необходимо и достаточно, чтобы

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \int_{0 < |\lambda| \leq 2^{-m}} b \left(\frac{1}{|\lambda|} \right) \operatorname{sign} \lambda dZ(\lambda) = 0 \quad \text{п.в. и в } L^2.$$

В частности, если

$$\int_{0 < |\lambda| \leq 2^{-m}} b^2 \left(\frac{1}{|\lambda|} \right) \log \log^2 \left(\frac{4\pi}{|\lambda|} \right) dF(\lambda) < \infty,$$

то средние σ'_n сходятся п.в. и в L^2 при $n \rightarrow \infty$.

Следствие. Если $b(k) = O(\log \log k)^{-1}$ при $k \rightarrow \infty$, то для любого унитарного оператора T и любой функции $f \in L^2$ существует п.в. обобщенное эргодическое преобразование Гильберта

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n b(k) k^{-1} [T^k f(x) - T^{-k} f(x)].$$

Для средних σ_n ситуация иная. Если выполнено условие (54), то необходимы дополнительные условия на спектральную меру $dZ(\lambda)$ при $\lambda \rightarrow 0$, чтобы обеспечить сходимость п.в. и в L^2 средних σ_n .

Укажем нужные изменения в формулировках и доказательствах теорем 1–3 в этом случае. Для функции $B(t)$, определенной согласно (54), введем последовательности действительных чисел $1 < N'_1 < N'_2 < \dots$ и $N_1 < N_2 < \dots$: $B(N'_n) = n$; $N_m = N'_{2^m}$ ($m \geq 1$).

Обозначим $Q_n(\lambda) = \sum_{k=1}^n b(k) k^{-1} \cos k\lambda$. Пусть $v = [B(2\pi/\lambda)]^{-1}$ при $0 < \lambda \leq \pi$; тогда $0 < v \leq v_0 = [B(2)]^{-1}$. Для $2^m \leq n < 2^{m+1}$; $0 < v \leq v_0$ положим

$$R_n(v) = \begin{cases} v Q_{N'_n}(\lambda) & \text{при } 0 < N_m \lambda \leq 2\pi, \\ v (Q_{N'_n}(\lambda) - \Phi(\lambda)) & \text{при } N_m \lambda > 2\pi. \end{cases}$$

Используя известную асимптотику сумм $Q_n(\lambda)$ и $\Phi(\lambda) - Q_n(\lambda)$, получаем, что для ядер $R_n(v)$ справедлива лемма 3. Отсюда следуют приводимые ниже аналоги теорем 1–3.

Теорема 1'. Средние σ_n сходятся в L^2 тогда и только тогда, когда выполнено условие (8) и

$$\int_{0 < |\lambda| \leq \pi} B^2 \left(\frac{2\pi}{|\lambda|} \right) dF(\lambda) < \infty. \quad (55)$$

Теорема 2'. Пусть выполнены условия (8) и (55), и пусть $B(N_m) = 2^m$. Тогда при $N_m \leq n < N_{m+1}$, $\lambda_m = 2\pi N_m^{-1}$ справедливо представление (11) с заменой функции $\log(2\pi/|\lambda|)$ на функцию $B(2\pi/|\lambda|)$. В частности, $\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n = \eta$ п.в. и в L^2 тогда и только тогда, когда

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \int_{0 < |\lambda| \leq \lambda_m} B \left(\frac{2\pi}{|\lambda|} \right) dZ(\lambda) = 0 \quad \text{п.в.}$$

Пусть $B_1(\lambda) = \log m$ при $\lambda_{m+1} < |\lambda| \leq \lambda_m$, $m \geq 1$.

Теорема 3'. Если выполнено условие

$$\int_{0 < |\lambda| \leq \pi} B^2 \left(\frac{2\pi}{|\lambda|} \right) B_1^2(\lambda) dF(\lambda) < \infty, \quad (56)$$

то средние σ_n сходятся п.в. и в L^2 и условие (56) является в определенном смысле неусиливаемым.

З а м е ч а н и е. Вместо последовательности N_m в теореме 2' можно взять любую последовательность $\bar{N}_m$, для которой $\log B(\bar{N}_m) = At + O(1)$; $A > 0$.

Следствие. Средние

$$\sum_{k=1}^n \frac{T^k f(x)}{k \ln(k+1)}$$

сходятся п.в. и в L^2 , если

$$\int_{0 < |\lambda| \leq \pi} L_2^2(\lambda) L_4^2(\lambda) dF(\lambda) < \infty$$

(и функцию $L_4(\lambda)$ нельзя, вообще говоря, заменить другой, медленнее растущей функцией).

Для доказательства в теореме 3 полагаем $b(u) = [\ln(u+1)]^{-1}$, $B(t) = \ln \ln(t+1)$ и берем $N_m = e^{e^{2^m}}$, $B_1(\lambda) \sim cL_4(\lambda)$ при $\lambda \rightarrow 0$.

3.2. Эргодические преобразования для других классов операторов и случайных процессов. Все полученные выше результаты опираются, в основном, на спектральное представление оператора T . Поскольку спектральным представлением обладают и некоторые другие классы операторов и случайных процессов (причем не только в пространстве L^2 , но и в других L^p), в работах [4]–[9] и др. эргодические теоремы и эргодические преобразования обобщались в различных направлениях. При доказательстве этих результатов основную роль играет

общая теорема о сходимости последовательности стохастических интегралов, доказанная в работе [2] и относящаяся не только к спектральным мерам с ортогональными приращениями, но и к более общим спектральным мерам.

Кратко укажем ряд возможных обобщений результатов этой работы.

1. *Эргодические преобразования для нормальных операторов.* Если T — нормальный оператор в L^2 , $\|T\| \leq 1$, $f \in L^2$, то

$$Tf = \int_{|\zeta| \leq 1} \zeta \cdot Z(d\zeta); \quad F(d\zeta) = \|Z(d\zeta)\|^2; \quad \|Tf\|^2 = \int_{|\zeta| \leq 1} F(d\zeta).$$

Индивидуальная эргодическая теорема в терминах спектральной меры $Z(d\zeta)$, определенной на борелевских подмножествах единичного круга, была получена в [16]. Для средних

$$\sigma_n'' = \sum_{k=1}^n k^{-1} T^k f(x) = \int_{|\zeta| \leq 1} \left(\sum_{k=1}^n k^{-1} \zeta^k \right) Z(d\zeta)$$

можно получить аналоги теорем 1–3. Обозначим $N_m = 2^{2^m}$,

$$K = \{\zeta \in \mathbb{C}: |\zeta| \leq 1, \zeta \neq 1\}, \quad D_m = K \cap \{\zeta: |1 - \zeta| \leq N_m^{-1}\}.$$

Пусть $\ln(1/(1 - \zeta))$ — главная ветвь соответствующей аналитической функции, $\ln(1/(1 - \zeta)) = \sum_{k=1}^{\infty} k^{-1} \zeta^k$ ($\zeta \in K$).

Теорема 8. Пусть $f \in L^2$. Если $F(\{1\}) = 0$,

$$\int_K \left| \ln \frac{1}{1 - \zeta} \right|^2 F(d\zeta) < \infty \quad \text{и} \quad \eta \stackrel{L^2}{=} \int_K \ln \frac{1}{1 - \zeta} Z(d\zeta),$$

то справедливо представление: при $N_m \leq n < N_{m+1}$

$$\sigma_n = \eta - \int_{D_m} \ln \frac{1}{1 - \zeta} Z(d\zeta) + \eta_n, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \eta_n = 0 \quad \text{п.в. и в } L^2.$$

Для средних $\sum_1^n b(k) k^{-\alpha} T^k f$, где $b(k)$ — м.м.ф., $0 < \alpha \leq 1$, а T — нормальный оператор, также справедливы аналоги теорем 4–6.

2. *Непрерывные аналоги.* Рассмотрим группу унитарных операторов $\{T^t, -\infty < t < \infty\}$ в $L^2(\Omega)$, обладающую спектральным представлением $T^t f = \xi(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{i\lambda t} dZ(\lambda); f \in L^2$.

Если $b(\tau)$ — м.м.ф., $0 < \alpha \leq 1$, то для интегралов

$$\sigma_t = \int_1^t b(\tau) \tau^{-\alpha} \xi(\tau) d\tau; \quad \sigma'_t = \int_1^t b(\tau) \tau^{-\alpha} [\xi(\tau) - \xi(-\tau)] d\tau$$

при $t \rightarrow \infty$ справедливы аналоги предыдущих теорем.

Отметим, что подобным же образом изучается сходимость п.в. при $\varepsilon \rightarrow +0$ интегралов

$$\hat{\sigma}_\varepsilon = \int_1^\varepsilon b(\tau) \tau^{-\alpha} \xi(\tau) d\tau; \quad \hat{\sigma}'_\varepsilon = \int_1^\varepsilon b(\tau) \tau^{-\alpha} [\xi(\tau) - \xi(-\tau)] d\tau.$$

Как и в локальной эргодической теореме (относящейся к сходимости п.в. средних $\varepsilon^{-1} \int_0^\varepsilon \xi(\tau) d\tau$ при $\varepsilon \rightarrow +0$, см. [17]), необходимые и достаточные условия выражаются через свойства спектральной меры на множествах $\{\lambda: |\lambda| \geq \lambda_m\}$.

3. *Гармонизируемые случайные процессы.* В теории случайных процессов наряду со стационарными процессами рассматриваются различные классы нестационарных, но гармонизируемых процессов. Например, процесс называется сильно гармонизируемым (или гармонизируемым в смысле Лозва), если справедливо представление $\xi(t) = \int_{\mathbf{R}} e^{i\lambda t} Z(d\lambda)$, где $E(Z(d\lambda) \cdot \overline{Z(d\mu)}) = F(d\lambda, d\mu)$ — конечная мера на $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$. Усиленный закон больших чисел для этих процессов был получен в работах [2], [4]; в работе [6] он распространен на более широкий класс слабо гармонизируемых процессов. Для всех этих случаев справедливы аналоги теорем 1, 2, 4, 5. Например, средние σ_T сильно гармонизируемого процесса $\xi(t)$ имеют вид

$$\sigma_T = \int_1^T \tau^{-1} (\xi(\tau) + \xi(-\tau)) d\tau.$$

Из спектрального представления следует, что $\sigma_T = 2 \int_{\mathbf{R}} \tilde{Q}_T(\lambda) Z(d\lambda)$, где

$$\tilde{Q}_T(\lambda) = \int_{\lambda}^{T\lambda} \frac{\cos u}{u} du; \quad \lim_{T \rightarrow \infty} \tilde{Q}_T(\lambda) = -ci(\lambda) = \int_{\lambda}^{\infty} \frac{\cos u}{u} du;$$

$-ci(\lambda) \sim \ln(1/|\lambda|)$ при $\lambda \rightarrow 0$; $|ci(\lambda)| \leq C$ при $|\lambda| \geq 1$.

Обозначим $D = \{(\lambda, \mu): 0 < \lambda^2 + \mu^2 \leq 1\}$. Если выполнены условия $F(\{0, 0\}) = 0$ и

$$\iint_D \ln \frac{1}{|\lambda|} \ln \frac{1}{\mu} F(d\lambda, d\mu) < \infty,$$

то средние σ_T сходятся в L^2 при $T \rightarrow \infty$ к $\eta \in L^2$, $\eta = -2 \int_{\mathbf{R}} ci(\lambda) Z(d\lambda)$.

Далее, если $N_m = 2^{2^m}$, $\lambda_m = N_m^{-1}$, то при $N_m \leq T < N_{m+1}$ справедливо представление

$$\sigma_T = \eta - 2 \int_{0 < |\lambda| \leq \lambda_m} \ln \frac{1}{|\lambda|} Z(d\lambda) + \eta_T; \quad \lim_{T \rightarrow \infty} \eta_T = 0 \quad \text{п.в. и в } L^2.$$

В частности, сходимость п.в. при $T \rightarrow \infty$ средних σ_T эквивалентна условию

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \int_{0 < |\lambda| \leq \lambda_m} \ln \frac{1}{|\lambda|} Z(d\lambda) = 0 \quad \text{п.в.}$$

Интересно, что многие из этих результатов обобщаются и на операторы, действующие в пространствах L^p ($1 < p < \infty$). Так, в работе [9] получен усиленный закон больших чисел для так называемых (α, β) -ограниченных процессов в терминах стохастических спектральных мер этих процессов. В работах [8], [18] показано, что ограниченные и обратимые операторы $T: L^p \rightarrow L^p$, для которых $\sup_{n \in \mathbf{Z}} \|T^n\| < \infty$, также имеют

некоторое спектральное представление. В работах [9], [18] для средних $n^{-1} \sum_{k=1}^n T^k f$ и $\sum_{k=1}^n k^{-1} [T^k f - T^{-k} f]$ получены спектральные критерии сходимости почти всюду. На эти случаи можно распространить и ряд результатов данной статьи.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гапошкин В. Ф. Критерии усиленного закона больших чисел для классов стационарных в широком смысле процессов и однородных случайных полей. — Теория вероятн. и ее примен., 1977, т. XXII, в. 2, с. 295–319.
2. Гапошкин В. Ф. Одна теорема о сходимости почти всюду последовательности измеримых функций и ее применения к последовательностям стохастических интегралов. — Матем. сб., 1977, т. 104, в. 1, с. 3–21.
3. Jajte R. On the existence of the ergodic Hilbert transform. — Ann. Probab., 1987, v. 15, № 2, p. 831–835.
4. Rousseau-Egelé J. La loi forté des grands nombres pour les processus harmonisables. — Ann. Inst. H. Poincaré, 1979, v. 15, p. 175–186.
5. Cambanis S., Hardin C., Weron A. Ergodic properties of certain stationary stable processes. — Stoch. Process. Appl., 1987, v. 24, № 1, p. 1–18.
6. Dehay D. Strong law of large numbers for weakly harmonizable processes. — Stoch. Process. Appl., 1987, v. 24, № 2, p. 259–267.
7. Bradley R. E. Pseudospectral operators and the pointwise ergodic theorem. — Proc. Amer. Math. Soc., 1991, v. 112, p. 863–870.
8. Houdré C. Harmonizability, V -boundedness, $(2, p)$ -boundedness of stochastic processes. — Probab. Theory Relat. Fields, 1990, v. 84, p. 39–54.
9. Houdré C. On spectral SLLN and pointwise ergodic theorem in L^α . — Preprint, Dept. of Math. Univ. of Maryland, 1991.
10. Клесов О. И. О сходимости почти всюду кратных рядов Котельникова–Шеннона. — Проблемы передачи информации, 1984, т. 20, с. 79–93.
11. Зигмунд А. Тригонометрические ряды. Т. I. М.: Мир, 1965, 615 с.
12. Качмаж С., Штейнгауз Г. Теория ортогональных рядов. М.: Физматгиз, 1958, 507 с.
13. Гапошкин В. Ф. Сходимость рядов, связанных со стационарными последовательностями. — Изв. АН СССР, сер. матем., 1975, т. 39, в. 6, с. 1366–1392.
14. Campbell J., Petersen K. The spectral measure and Hilbert transform of a measure-preserving transformation. — Trans. Amer. Math. Soc., 1989, v. 313, p. 121–129.
15. Assani I., Petersen K. The helical transform as a connection between ergodic theory and harmonic analysis. — Trans. Amer. Math. Soc., 1992, v. 331, p. 131–142.
16. Гапошкин В. Ф. Об индивидуальной эргодической теореме для нормальных операторов в L^2 . — Функцион. анализ и его прилож., 1981, т. 15, № 1, с. 131–142.
17. Гапошкин В. Ф. Локальная эргодическая теорема для групп унитарных операторов и стационарных процессов второго порядка. — Матем. сб., 1980, т. 111, с. 249–261.
18. Berkson E., Bourgain J., Gillespie T. A. On the a.e. convergence of ergodic averages for power-bounded operators on L^p -spaces. — Integral Equations and Operator Theory, 1991, v. 14, p. 678–715.

Поступила в редакцию
16.VI.1993