Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Г. Михайлов, Предельные теоремы для случайного покрытия конечного множества и для числа решений системы случайных уравнений, *Теория вероятн. и ее примен.*, 1996, том 41, выпуск 2, 272–283

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp2932>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.80.97.219

26 апреля 2023 г., 18:03:21

© 1996 г.

МИХАЙЛОВ В. Г.*

ПРЕДЕЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ ДЛЯ
СЛУЧАЙНОГО ПОКРЫТИЯ КОНЕЧНОГО МНОЖЕСТВА
И ДЛЯ ЧИСЛА РЕШЕНИЙ
СИСТЕМЫ СЛУЧАЙНЫХ УРАВНЕНИЙ¹⁾

В статье рассматривается задача о покрытии конечного множества системой его случайных независимо выбранных подмножеств. Существенно новым в постановке задачи является рассмотрение неодинаковых законов распределения у случайных подмножеств. Основным результатом имеет форму предельной теоремы Пуассона для числа непокрытых точек. Он иллюстрируется на двух схемах размещения частиц комплектами, а также используется для доказательства теоремы о логарифмической пуассоновости числа решений заведомо совместной системы случайных уравнений относительно двоичного вектора неизвестных.

Ключевые слова и фразы: размещение частиц комплектами, число пустых ячеек, предельная теорема Пуассона, системы случайных уравнений.

§ 1. Введение

Пусть на системе B всех подмножеств множества $\{1, \dots, N\}$ заданы вероятностные меры

$$P_i = \{p_{\beta}^{(i)}, \beta \in B\}, \quad \sum_{\beta \in B} p_{\beta}^{(i)} = 1, \quad i = 1, \dots, n.$$

В соответствии с этими мерами из системы подмножеств B выбираются независимо n случайных подмножеств $V_1, \dots, V_n$. Иными словами,

$$P\{V_1 = \beta_1, \dots, V_n = \beta_n\} = p_{\beta_1}^{(1)} \dots p_{\beta_n}^{(n)}. \quad (1)$$

Вопрос состоит в изучении асимптотических свойств (при больших n и N) распределения числа точек, не попавших в выбранные подмножества,

*Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, ул. Вавилова, 42, 117966 Москва, ГСП-1, Россия.

¹⁾Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, код проекта 93-011-1443.

т.е. случайной величины

$$\mu_0 = |M_0|, \quad M_0 = \{1, \dots, N\} \setminus \bigcup_{i=1}^n V_i.$$

Здесь и далее запись $|M|$ обозначает численность конечного множества M .

Распределение случайной величины μ_0 описывается вероятностями $P\{\mu_0 = m\}$, $m = 0, 1, \dots$, из которых наибольший интерес представляет вероятность полного покрытия $P\{\mu_0 = 0\}$.

В частном случае

$$p_{\beta}^{(i)} = \binom{N}{|\beta|} 2^{-|\beta|}, \quad \beta \in B, \quad i = 1, \dots, n,$$

рассматриваемая задача имеет простую комбинаторную интерпретацию. В этом случае выражение $2^{nN} P\{\mu_0 = m\}$ равно числу систем из n подмножеств множества $\{1, \dots, N\}$, оставляющих непокрытыми ровно m точек (а при $m = 0$ накрывающих множество $\{1, \dots, N\}$ целиком).

В теории случайных размещений схема, описанная условием (1), иногда называется обобщенной схемой размещения частиц комплектами. Здесь подразумевается, что при i -м испытании во все точки (ячейки) множества V_i помещается по одной частице. Совокупность частиц, размещаемых в одном испытании, называется комплектом. Величина μ_0 интерпретируется как число пустых ячеек после размещения n комплектов частиц. Наиболее изученным здесь является случай, когда размеры комплектов $m_1, \dots, m_n$ неслучайны, а способы размещения комплектов равновероятны, т.е.

$$p_{\beta}^{(i)} = \begin{cases} \binom{N}{m_i}^{-1}, & \text{если } |\beta| = m_i, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases} \quad (2)$$

Схема равновероятных комплектов одинакового размера подробно изучена в книге [1] и в работах [2]–[4]. Асимптотические свойства числа пустых ячеек при равновероятном размещении комплектов разного размера описаны в работе [5].

В настоящей работе рассматривается общий случай и все меры P_i считаются произвольными. Будут указаны достаточные условия, при которых моменты и распределение числа непокрытых точек μ_0 сближаются с моментами и распределением закона Пуассона. Ранее подобная задача решалась в работе [2]. Однако там предполагалось, что вероятностные меры $P_1, \dots, P_n$ совпадают друг с другом в основных характеристиках. Полученная предельная теорема о числе непокрытых точек применяется в задаче о числе решений заведомо совместной системы случайных уравнений относительно двоичного вектора неизвестных. Здесь

нам удается охватить случай систем, составленных из уравнений неодинакового алгебраического вида, например, из уравнений разных степеней.

§ 2. Теоремы для числа непокрытых точек

Мы будем использовать обозначение $(m)_r = m(m-1)\dots(m-r+1)$ и обозначения

$$\begin{aligned} A_k &= \sum_{i=1}^n \mathbf{P}\{k \in V_i\}, & \lambda &= \sum_{k=1}^N \exp\{-A_k\}, \\ A_{kl} &= \sum_{i=1}^n \mathbf{P}\{k \in V_i\} \mathbf{P}\{l \in V_i\}, & B_{kl} &= \sum_{i=1}^n \mathbf{P}\{k \in V_i, l \in V_i\}, \\ R_A &= \sum_{k,l=1}^N A_{kl} \exp\{-A_k - A_l\}, & R_B &= \sum_{1 \leq k < l \leq N} B_{kl} \exp\{-A_k - A_l\}. \end{aligned}$$

Теорема 1. Пусть $N, n \rightarrow \infty$, а остальные параметры схемы меняются так, что

$$\lambda = O(1), \quad (3)$$

$$R_A + R_B \rightarrow 0, \quad (4)$$

$$\max_{1 \leq k < l \leq N} B_{kl} = O(1), \quad (5)$$

$$\max_{k,i} \mathbf{P}\{k \in V_i\} \rightarrow 0, \quad (6)$$

$$\min_{1 \leq k \leq N} A_k \rightarrow \infty. \quad (7)$$

Тогда

$$\mathbf{E}(\mu_0)_r - \lambda^r \rightarrow 0, \quad r = 1, 2, \dots, \quad (8)$$

$$\mathbf{P}\{\mu_0 = m\} - \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda} \rightarrow 0, \quad m = 0, 1, \dots, \quad (9)$$

$$\lim (\mathbf{E}s^{\mu_0} - e^{\lambda(s-1)}) \geq 0, \quad s \geq 0. \quad (10)$$

З а м е ч а н и е 1. Если условие (3) заменено условием

$$\lambda \rightarrow \lambda_0, \quad 0 < \lambda_0 < \infty, \quad (11)$$

то по теореме 1 получаем сходимость моментов и распределения случайной величины μ_0 к моментам и распределению закона Пуассона с параметром λ_0 . В этом случае имеет место и сходимость производящей функции $\mathbf{E}s^{\mu_0} - e^{\lambda_0(s-1)}$, $0 \leq s \leq 1$. Однако при $s > 1$ можно гарантировать лишь свойство (10).

З а м е ч а н и е 2. Как уже упоминалось во введении, в работе [2] был предложен иной вариант достаточных условий асимптотической

пуассоновости случайной величины μ_0 . Существенным недостатком этого варианта оказалось использование ограничений

$$P\{k \in V_1\} = \dots = P\{k \in V_n\}, \quad P\{\{k, l\} \subseteq V_1\} = \dots = P\{\{k, l\} \subseteq V_n\},$$

требующих в большинстве приложений, чтобы распределения P_i были одинаковыми. Желание избавиться от этого недостатка и привело к настоящей работе. Здесь же отметим тот любопытный факт, что как в работе [2], так и у нас достаточные условия асимптотической пуассоновости выражены в терминах вероятностей $P\{k \in V_i\}$ и $P\{\{k, l\} \subseteq V_i\}$. Нетрудно заметить аналогию с результатами работ [6] и [7], рассматривавшими вопросы пуассоновской аппроксимации в иных задачах.

Отметим, что круг возможных применений теоремы 1 довольно широк. Мы рассмотрим в качестве иллюстраций три частных случая. Первый из них очень простой — это равновероятное размещение частиц комплектами. Второй пример, где схема размещения комплектов дополняется явлением исчезновения частиц, более сложен, но и более интересен, так как связан с применениями § 3. Третий пример с размещением дуг на дискретной окружности показывает, что нарушение казалось бы не очень существенного условия (5) не только лишает возможности применить теорему 1, но и заметно искажает предельные свойства случайной величины μ_0 .

Пример 1. Рассмотрим схему равновероятного размещения n комплектов по $m_1, \dots, m_n$ частиц по N ячейкам. Из (2) следуют равенства

$$P\{k \in V_i\} = \frac{m_i}{N}, \quad P\{\{k, l\} \subseteq V_i\} = \frac{m_i(m_i - 1)}{N(N - 1)}.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} A_k &= \frac{1}{N} (m_1 + \dots + m_n), \quad A_{kl} = \frac{1}{N^2} (m_1^2 + \dots + m_n^2), \\ B_{kl} &= \frac{1}{N(N - 1)} (m_1(m_1 - 1) + \dots + m_n(m_n - 1)). \end{aligned} \quad (12)$$

Значит, условие (3) принимает вид

$$\lambda = N \exp \{ -(m_1 + \dots + m_n) N^{-1} \} = O(1), \quad (13)$$

а условия (4)–(7) будут выполнены, если

$$(m_1^2 + \dots + m_n^2) N^{-2} \rightarrow 0. \quad (14)$$

Замечание 3. Сравним формулы (13), (14) с полученными в работе [5] необходимыми и достаточными условиями сходимости $\mathcal{L}(\mu_0) \rightarrow \Pi(\lambda_0)$, имеющими вид

$$N - \max_i m_i \rightarrow \infty, \quad m_1 + \dots + m_n - \max_i m_i \rightarrow \infty, \quad (15)$$

$$E\mu_0 = N \prod_{i=1}^n \left(1 - \frac{m_i}{N}\right) \rightarrow \lambda_0. \quad (16)$$

Ясно, что условия (13) и (14) (считаем, что в (13) $\lambda \rightarrow \lambda_0$) существенно ограничительнее условий (15) и (16). Отметим еще, что в случае, когда выполнено (14), условия $\lambda \rightarrow \lambda_0$ и $E\lambda \rightarrow \lambda_0$ эквивалентны.

Пример 2. Пусть описанная в примере 1 схема размещения частиц комплектами дополнена явлением случайного исчезновения некоторых частиц после размещения. Нам нет необходимости детализировать механизм этого явления. Надо лишь оговорить, что исчезновение частиц разных комплектов происходит независимо и для отдельной частицы вероятность удержаться (не исчезнуть) в ячейке зависит лишь от номеров ячейки и комплекта, а также от номеров ячеек, в которые попали остальные частицы данного комплекта, т.е. от k, i и V_i . Таким образом, мы получаем новую, уже неравновероятную схему размещения частиц комплектами. Будем использовать для этой схемы символы вида $\tilde{A}_k, \tilde{\lambda}, \tilde{B}_{kl}$, сохранив обозначения вида A_k, λ, B_{kl} за параметрами примера 1. Очевидно, $P\{k \in \tilde{V}_i\} \leq P\{k \in V_i\}$, $\tilde{A}_{kl} \leq A_{kl}$, $\tilde{B}_{kl} \leq B_{kl}$. Благодаря этим неравенствам нетрудно получить следующий результат.

Теорема 2. Пусть параметры схемы размещения примера 2 при $N, n \rightarrow \infty$ меняются так, что

$$\tilde{\lambda} = \sum_{k=1}^N \exp\{-\tilde{A}_k\} = O(1), \quad (17)$$

$$\min_{1 \leq k \leq N} \tilde{A}_k \rightarrow \infty \quad (18)$$

и выполнено условие (14). Тогда для числа пустых (и опустевших) ячеек μ_0 в этой схеме справедливы соотношения (8)–(10).

Замечание 4. Если $\tilde{A}_1 = \dots = \tilde{A}_N$, то условие (18) следует из условия (17) и условия $N, n \rightarrow \infty$.

Замечание 5. Частный случай схемы с исчезновением частиц был рассмотрен в работе [8], где предполагалось, что все комплекты имеют одинаковый размер, а каждая частица исчезает независимо от всех остальных с вероятностью $1 - p$. Еще один пример схемы с исчезновением частиц возникает в задаче о системах заведомо совместных случайных уравнений (см. § 3 настоящей работы).

Пример 3. Рассмотрим множество Z_N вычетов по модулю N , играющее в данном случае роль дискретной окружности. В качестве дуг на ней рассмотрим множества вида $[a, b] = \{a, a+1, \dots, b\}$, где сложение производится в Z_N . Пусть n дуг длины $m \geq 2$ независимо и равновероятно разбрасываются на окружность Z_N . В этом случае

$$P\{V_i = [a, b]\} = \begin{cases} 1/N, & \text{если } b = a + m - 1, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Тогда

$$\begin{aligned} A_k &= nm N^{-1}, & \lambda &= N \exp\{-nm N^{-1}\}, \\ A_{kl} &= nm^2 N^{-2}, & B_{kl} &= nN^{-1}(m - (l - k))_+, \end{aligned}$$

где $l > k$ и $(a)_+ = \max\{0, a\}$. Пусть $\lambda \rightarrow \lambda_0$, $0 < \lambda_0 < \infty$, и $m = o(N(\ln N)^{-1})$. Тогда, как нетрудно проверить, выполнены все условия теоремы 1 кроме условия (5). Оно нарушается, так как $\max B_{kl} = n(m - 1)/N \asymp \ln N - \ln \lambda \rightarrow \infty$. Этого оказывается достаточно, чтобы сходимость $\mathcal{L}(\mu_0) \rightarrow \Pi(\lambda_0)$ не имела места. Можно показать, что в этой ситуации предельный закон Пуассона выполнен не для числа μ_0 , а для числа дуг, из которых состоит множество непокрытых точек M_0 .

З а м е ч а н и е 6. Задача о покрытии дискретной окружности независимыми дугами рассматривалась в работе [9], где были получены предельные теоремы для числа дуг, при котором окружность покрыта целиком.

Д о к а з а т е л ь с т в о т е о р е м ы 1. Введем обозначения

$$\begin{aligned} b_{k_1, \dots, k_r} &= \mathbf{P}\{\{k_1, \dots, k_r\} \subseteq M_0\}, \quad r = 1, 2, \dots, \\ a_i(k) &= \mathbf{P}\{k \in V_i\}, \quad c_k = \exp\{-A_k\}. \end{aligned}$$

Как нетрудно проверить,

$$\mathbf{E}(\mu_0)_r = \sum b_{k_1, \dots, k_r} \quad (19)$$

(здесь суммирование ведется по наборам попарно различных индексов $k_1, \dots, k_r$ с условием $1 \leq k_s \leq N$, $s = 1, \dots, r$), и, в частности,

$$\mathbf{E}\mu_0 = \sum_{k=1}^N b_k. \quad (20)$$

Заметим, что в силу (6)

$$\max_{k,i} a_i(k) \rightarrow 0. \quad (21)$$

Поэтому из равенства $b_k = \prod_{i=1}^n (1 - a_i(k))$ и неравенств

$$e^{-x} \geq 1 - x \geq e^{-x-x^2} \quad (22)$$

(последнее — при $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$) получаем, что $b_k \leq c_k$, а при достаточно больших N, n : $b_k \geq c_k \exp\{-A_{kk}\}$. Значит, $b_k - c_k = \theta_k c_k A_{kk}$, где $\max_k |\theta_k| = O(1)$ при $N, n \rightarrow \infty$. Теперь, используя (6), (3) и (20), приходим к оценке

$$|\mathbf{E}\mu_0 - \lambda| = o(\lambda) = o(1). \quad (23)$$

Оценим старшие моменты. Как нетрудно проверить,

$$b_{k_1, \dots, k_r} \geq \prod_{i=1}^n (1 - a_i(k_1) - \dots - a_i(k_r)).$$

Поэтому, используя (21) и вторую из оценок (22), получаем для достаточно больших значений N и n , что

$$b_{k_1, \dots, k_r} \geq c_{k_1} \cdots c_{k_r} \exp \left\{ - \sum_{s=1}^r \sum_{t=1}^r A_{k_s k_t} \right\}.$$

Теперь используем первую из оценок (22) и приходим к неравенству

$$b_{k_1, \dots, k_r} - c_{k_1} \cdots c_{k_r} \geq c_{k_1} \cdots c_{k_r} \left\{ - \sum_{s=1}^r \sum_{t=1}^r A_{k_s k_t} \right\}.$$

Суммируем эти неравенства по всем наборам попарно различных k_j , после чего, загрузив полученное неравенство, выводим с помощью (19) оценку

$$E(\mu_0)_r - \sum' c_{k_1} \cdots c_{k_r} \geq -r^2 \lambda^{r-2} R_A. \quad (24)$$

Заметим, что при $r \geq 2$

$$\lambda^r - r^2 \lambda^{r-1} \max_k c_k \leq \sum' c_{k_1} \cdots c_{k_r} \leq \lambda^r. \quad (25)$$

Из (24) и (25) выводим для достаточно больших N, n оценку

$$E(\mu_0)_r - \lambda^r \geq -r^2 \lambda^{r-2} (R_A + \lambda \max_k c_k). \quad (26)$$

Теперь получим оценку сверху. Как нетрудно проверить,

$$\begin{aligned} b_{k_1, \dots, k_r} &\leq \prod_{i=1}^n \left(1 - \sum_{s=1}^r a_i(k_s) + \sum_{1 \leq s < t \leq r} P\{\{k_s, k_t\} \subseteq V_i\} \right) \\ &\leq c_{k_1} \cdots c_{k_r} \exp \left\{ \sum_{1 \leq s < t \leq r} B_{k_s k_t} \right\}. \end{aligned}$$

Согласно условию (5) найдется такая константа $C < \infty$, что $B_{k_s k_t} < C$. Кроме этого, при $x_0 \geq 0$ справедливо неравенство $e^x - 1 \leq x e^{x_0}$, $0 \leq x \leq x_0$. Поэтому приходим к оценке

$$b_{k_1, \dots, k_r} - c_{k_1} \cdots c_{k_r} \leq e^{Cr^2} c_{k_1} \cdots c_{k_r} \sum_{1 \leq s < t \leq r} B_{k_s k_t}.$$

Суммируя эти неравенства, с учетом (18) и (25), получаем

$$E(\mu_0)_r - \lambda^r \leq e^{Cr^2} \lambda^{r-2} r^2 R_B. \quad (27)$$

В силу (3), (4) и (7) из (26) и (27) следует (8).

Соотношение (9) выводится из (8) с помощью стандартных рассуждений. При этом удобно воспользоваться леммой 3 работы [10].

Теперь докажем соотношение (10). Зафиксируем значения $s > 0$ и $\varepsilon > 0$ и выберем такое натуральное число M , что

$$\sup_{N,n} \sum_{m=M+1}^{\infty} \frac{(s\lambda)^m}{m!} e^{-\lambda} \leq \varepsilon.$$

Это возможно, так как, согласно (3), $\lambda = O(1)$ при $N, n \rightarrow \infty$. Тогда

$$\begin{aligned} \mathbf{E}s^{\mu_0} - e^{\lambda(s-1)} &= \sum_{m=0}^{\infty} s^m \left(\mathbf{P}\{\mu_0 = m\} - \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda} \right) \\ &\geq \sum_{m=0}^M s^m \left(\mathbf{P}\{\mu_0 = m\} - \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda} \right) - \varepsilon. \end{aligned}$$

Из (9) получаем: $\lim_{N,n \rightarrow \infty} (\mathbf{E}s^{\mu_0} - e^{\lambda(s-1)}) \geq -\varepsilon$, что в силу произвольности ε дает (10). Теорема 1 доказана.

§ 3. Исследование свойств заведомо совместной системы случайных уравнений

В этом параграфе мы следуем определениям и идеям работы [11]. Пусть $\varphi(u_1, \dots, u_d)$ — некоторая функция на множестве d -мерных двоичных векторов, принимающая значения из множества $\{1, \dots, r\}$, $r \leq 2^d$. Отметим, что выбор множества значений функции не играет никакой роли и не сказывается на результатах. Рассмотрим случайное уравнение

$$\varphi(x_{j_1}, \dots, x_{j_d}) = \alpha \quad (28)$$

относительно двоичного вектора $x = (x_1, \dots, x_N)$, где индексы $j_1, \dots, j_d$ выбираются равновероятно и без возвращения из множества $\{1, \dots, N\}$.

Пусть система уравнений

$$\varphi_i(x_{j_{1(i)}}, \dots, x_{j_{d(i)}(i)}) = \alpha_i, \quad i = 1, \dots, n, \quad (29)$$

составлена из независимо выбранных уравнений вида (28), возможно с разными, но фиксированными при данном n функциями $\varphi_1, \dots, \varphi_n$, возможно, зависящими от разного числа переменных. Правая часть системы задается равенствами

$$\alpha_i = \varphi_i(x_{j_{1(i)}}^0, \dots, x_{j_{d(i)}(i)}^0), \quad i = 1, \dots, n, \quad (30)$$

при некотором заданном векторе $x^0 = (x_1^0, \dots, x_N^0)$.

Система уравнений (29) с правыми частями (30) является заведомо совместной системой случайных уравнений, имеющей, по крайней мере, решение x^0 . Общее число решений этой системы ξ является случайной величиной, которую нам предстоит исследовать.

З а м е ч а н и е 7. Обратим внимание на то, что в работе [11], на которую мы будем неоднократно ссылаться, использован внешне иной, но эквивалентный способ задания правой части уравнения (28).

Условимся обозначать через G_φ группу инерции функции φ в симметрической группе S_d , определяемую условием

$$g \in G_\varphi \iff \varphi(u_{g(1)}, \dots, u_{g(d)}) \equiv \varphi(u_1, \dots, u_d).$$

Следующие определения мы заимствуем из работы [11]. Будем считать, что функция φ задана на вершинах d -мерного двоичного куба. Любое ребро куба соединяет вершины, различающиеся только одной координатой. Эту координату назовем свободной координатой ребра.

Введем множество $M_k^{(v)}$ таких ребер $\rho = (u^1, u^2)$ куба, что соединяемые ими вершины содержат ровно по k совпадающих нулевых координат (а, значит, и по $d - k - 1$ совпадающих единичных) и при этом $\varphi(u^1) = \varphi(u^2) = v$. Каждой паре ребер $\rho_1, \rho_2 \in M_k^{(v)}$ сопоставим множество $W(\rho_1, \rho_2)$ тех подстановок из S_d , которые переводят нулевые, единичные и свободную координаты ребра ρ_1 в соответствующие координаты ребра ρ_2 . Положим

$$W_k^{(v)} = \bigcup_{\rho_i \in M_k^{(v)}} W(\rho_1, \rho_2).$$

Будем считать, что две подстановки a и b эквивалентны, если $a^{-1}b \in G_\varphi$. Пусть $\lambda_\varphi^{(v)}(k)$ — число классов эквивалентных подстановок в $W_k^{(v)}$. Положим $\lambda_\varphi(k) = \sum_{v=0}^r \lambda_\varphi^{(v)}(k)$. Функции $\varphi(u_1, \dots, u_d)$ сопоставим выражение

$$\gamma_\varphi(z) = d - |G_\varphi| \sum_{k=0}^{d-1} \frac{z^k (1-z)^{d-1-k}}{k!(d-1-k)!} \lambda_\varphi(k), \quad 0 \leq z \leq 1. \quad (31)$$

Как вытекает из рассмотрений работы [11], для любой функции $\varphi \neq \text{const}$ имеет место неравенство $\gamma_\varphi(z) > 0$, $0 < z < 1$.

Чтобы описать свойства множества Ξ решений системы (29)–(30), нам понадобится понятие кубической окрестности истинного решения x^0 . Таковой мы назовем множество вида

$$R^B(x^0) = \{x = (x_1, \dots, x_N): x_i = x_i^0, i \notin B\},$$

где $B \subseteq \{1, \dots, N\}$. Обозначим через n_φ число уравнений с функцией φ в системе (29).

Теорема 3. Пусть ни одна из функций φ_i , встречающихся в системе (29), не инвариантна относительно одновременного инвертирования всех своих аргументов и при $N, n \rightarrow \infty$:

- а) $\max_{1 \leq i \leq n} d(i) = O(1)$;
- б) истинное решение x^0 содержит $N_0 = \theta N$ нулей и $N_1 = (1 - \theta)N$ единиц, причем $0 < \delta \leq \theta \leq 1 - \delta < 1$, $\delta = \text{const}$;
- в) число неизвестных N и количества уравнений n_φ с функциями φ определенного вида связаны равенством

$$\sum_{\varphi} n_\varphi \gamma_\varphi(\theta) = N (\ln N + z), \quad z = O(1). \quad (32)$$

Тогда при $N, n \rightarrow \infty$

$$P\{\xi = 2^m\} = \frac{e^{-mz}}{m!} \exp\{-e^{-z}\} + o(1), \quad m = 0, 1, \dots, \quad (33)$$

$$P\{\exists B \subseteq \{1, \dots, N\}: \Xi = R^B(x^0)\} \rightarrow 1. \quad (34)$$

З а м е ч а н и е 8. Как нетрудно убедиться, множество B из соотношения (34) случайно и распределено инвариантно относительно перенумерации неизвестных. Согласно (33), распределение величины $|B|$ сближается с распределением Пуассона с параметром e^{-z} .

З а м е ч а н и е 9. В силу условия а) в системе (29) участвует лишь ограниченное (при $N, n \rightarrow \infty$) число различных функций φ . Поэтому $\min_{1 \leq i \leq n} \gamma_{\varphi_i}(y) > 0$, $0 < y < 1$, и из условий б) и в) следует, что

$$n_{\varphi_i} = O(N \ln N), \quad i = 1, \dots, n. \quad (35)$$

З а м е ч а н и е 10. Случай, когда все функции φ_i в системе (29) одинаковы, был рассмотрен в работе [11]. Результат работы [11] сформулирован в виде (33), но приведенные там рассуждения практически содержат и доказательство свойства (34) для случая одинаковых функций $\varphi_i = \varphi$. Отметим, что в работе [11] допускалась и инвариантность функции φ относительно одновременного инвертирования всех аргументов. В этом случае в соотношении (33) вероятность $P\{\xi = 2^m\}$ заменялась на вероятность $P\{\xi = 2^{m+1}\}$.

План и некоторые фрагменты доказательства теоремы 3 мы заимствуем из работы [11].

Лемма 1. Пусть выполнены условия теоремы 3. Тогда при $N, n \rightarrow \infty$

$$E\xi = \exp\{e^{-z} + o(1)\}. \quad (36)$$

Доказательство этой леммы в основном повторяет соответствующие рассуждения работы [11], и мы его опускаем.

Рассмотрим некоторое заведомо совместное уравнение вида

$$\psi(x_1, \dots, x_N) = \psi(x_1^0, \dots, x_N^0).$$

Следуя [11], назовем переменную x_s несущественной относительно истинного решения в этом уравнении, если вместе с $x^0 = (x_1^0, \dots, x_N^0)$ его решением является и вектор $x^{0s} = (x_1^0, \dots, x_{s-1}^0, 1 - x_s^0, x_{s+1}^0, \dots, x_N^0)$. В противном случае переменную назовем существенной.

Образуем случайные множества X_i и Y_i номеров несущественных и существенных переменных относительно истинного решения в i -м уравнении системы (29). Рассмотрим множество переменных, несущественных относительно истинного решения во всех уравнениях системы одновременно:

$$M_0 = \bigcup_{i=1}^n X_i = \{1, \dots, N\} \setminus \bigcup_{i=1}^n Y_i.$$

Множество M_0 представляет собой часть множества $\{1, \dots, N\}$, не покрытую независимыми случайными множествами $Y_1, \dots, Y_n$. Последние образуются путем вычеркивания некоторых элементов независимых случайных множеств $\{j_1(i), \dots, j_{d(i)}(i)\}$, $i = 1, \dots, n$. Нетрудно убедиться, что мы имеем дело со схемой размещения комплектов с исчезновением отдельных частиц, рассмотренной в примере 2 в § 2. Поэтому мы можем воспользоваться теоремой 2 и доказать следующий результат.

Лемма 2. Пусть выполнены условия теоремы 3. Тогда при $N, n \rightarrow \infty$

$$P\{|M_0| = m\} = \frac{e^{-mz}}{m!} e^{-e^{-z}} + o(1), \quad m = 0, 1, \dots, \quad (37)$$

$$\lim_{N, n \rightarrow \infty} (E s^{|M_0|} - e^{-e^{-z}(s-1)}) \geq 0, \quad s \geq 0. \quad (38)$$

Доказательство. Введем обозначения

$$a_{is} = P\{\varphi_i(x_{j_1(i)}^{0s}, \dots, x_{j_{d(i)}(i)}^{0s}) \neq \varphi_i(x_{j_1(i)}^0, \dots, x_{j_{d(i)}(i)}^0)\}.$$

Согласно теореме 2 и замечанию 4, нам достаточно убедиться в справедливости соотношений

$$\sum_{s=1}^N \exp\left\{-\sum_{i=1}^n a_{is}\right\} = e^{-z} + o(1), \quad (39)$$

$$nN^{-2} \rightarrow 0. \quad (40)$$

Последнее из них вытекает из (32) и замечания 9. Поэтому нам осталось проверить соотношение (39).

Из выкладок работы [11] (см. вывод формулы (9') в [11]) нетрудно получить формулу $a_{is} = \gamma_{\varphi_i} N^{-1} + O(N^{-2})$. Следовательно, в силу условия в)

$$\sum_{i=1}^n a_{is} = \frac{1}{N} \sum_{\varphi} \gamma_{\varphi} n_{\varphi} + O(N^{-1}) = \ln N + z + O(N^{-1}),$$

и

$$\sum_{s=1}^N \exp\{-\ln N - z + O(N^{-1})\} = e^{-z} + o(1),$$

что дает (39). Лемма 2 доказана.

Доказательство теоремы 3. Заметим, что, согласно определениям,

$$\Xi \supseteq R^{M_0}(x^0). \quad (41)$$

Убедимся теперь, что

$$E(\xi - 2^{|M_0|}) \rightarrow 0. \quad (42)$$

Тогда

$$P\{\Xi = R^{M_0}(x^0)\} \rightarrow 1, \quad (43)$$

из чего следует (34). В силу (37) из (43) следует также и (33).

Итак, нам осталось доказать соотношение (42). Для этого воспользуемся соотношениями (36) и (38) (последнее — при $s = 2$). Получаем

$$\lim_{N, n \rightarrow \infty} E(\xi - 2^{|M_0|}) \leq 0.$$

Но согласно (41) выражение под знаком математического ожидания неотрицательно. Значит, указанный предел равен нулю, и соотношение (42) и теорема 3 доказаны.

Автор выражает благодарность А. М. Зубкову за обсуждение затронутых в статье вопросов и полезные замечания.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Колчин В. Ф., Севастьянов Б. А., Чистяков В. П. Случайные размещения. М.: Наука, 1976, 223 с.
2. Михайлов В. Г. Предельная теорема Пуассона в схеме размещения частиц комплектами. — Теория вероятн. и ее примен., 1977, т. XXII, в. 1, с. 155–159.
3. Михайлов В. Г. Асимптотическая нормальность числа пустых ячеек при размещении частиц комплектами. — Теория вероятн. и ее примен., 1980, т. XXV, в. 1, с. 83–91.
4. Михайлов В. Г. Сходимость к многомерному нормальному закону в равновероятной схеме размещения частиц комплектами. — Матем. сб., 1980, т. 111 (153), № 2, с. 163–186.
5. Ватутин В. А., Михайлов В. Г. Предельные теоремы для числа пустых ячеек в равновероятной схеме размещения частиц комплектами. — Теория вероятн. и ее примен., 1982, т. XXVII, в. 4, с. 684–692.
6. Зубков А. М. Неравенства для распределения суммы функций от независимых случайных величин. — Матем. заметки, 1977, т. 22, в. 5, с. 745–758.
7. Arratia R., Goldstein L., Gordon L. Two moments suffice for Poisson approximation: The Chen–Stein method. — Ann. Probab., 1989, v. 17, № 1, p. 9–25.
8. Harris B. Poisson limit for generalized random allocation problems. — Statist. Probab. Lett., 1989, v. 8, № 2, p. 123–127.
9. Janson Sv. Random covering of the circle by arcs with restricted endpoints. — J. Appl. Probab., 1988, v. 25, № 1, p. 215–219.
10. Зубков А. М. Неравенства для вероятностей переходов с запрещениями и их применения. — Матем. сб., 1979, т. 109 (151), № 4 (8), с. 491–532.
11. Копытцев В. А. О распределении числа решений случайных заведомо совместных систем уравнений. — Теория вероятн. и ее примен., 1995, т. 40, в. 2, с. 430–437.

Поступила в редакцию
20.IV.1993