Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ф. С. Насыров, О локальных временах для функций и случайных процессов. II, *Теория вероятн. и ее примен.*, 1996, том 41, выпуск 2, 284–299

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp2933>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.227.88.159

26 апреля 2023 г., 12:03:43

© 1996 г.

НАСЫРОВ Ф. С.*

О ЛОКАЛЬНЫХ ВРЕМЕНАХ ДЛЯ ФУНКЦИЙ
И СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ. II

Пусть $X(t)$, $0 \leq t \leq 1$, — вещественнозначная измеримая функция, обладающая локальным временем $\alpha(t, u)$, $0 \leq t \leq 1$, $u \in \mathbf{R}$. Если последнее непрерывно по t при п.в. u , то распределение $F(t, x) = \int_{\mathbf{R}} \mathbf{1}\{\alpha(t, u) > x\} du$ и монотонная перестройка $\alpha^*(t, u) = \inf\{x : F(t, x) < u\}$ локального времени $\alpha(t, u)$ являются локальными временами для $\xi(s) = \alpha(s, X(s))$ и $\xi^*(s) = F(s, \xi(s))$, $0 \leq s \leq 1$, соответственно.

Ключевые слова и фразы: локальное время, распределение и монотонная перестройка функции, ортогональное разложение, броуновское движение.

Настоящая работа является продолжением статьи [5]; нумерация формул и утверждений продолжает нумерацию первой статьи.

§ 4. Ортогональное разложение процесса $\xi(s)$.Уравнение для совместного распределения $P\{\xi(t) < x, X(t) < y\}$

До сих пор мы придерживались точки зрения теории функций, рассматривая $X(s)$ как (неслучайную) функцию. В дальнейшем всюду, если не оговорено противное, мы будем предполагать, что $X(s)$, $s \in [0, 1]$, — вещественнозначный стохастически непрерывный случайный процесс с локальным временем $\alpha(t, u)$, с вероятностью 1 непрерывным по t при п.в. u .

В частности (см. [13]), если $X(s)$, $s \in [0, 1]$, — центрированный гауссовский процесс с измеримыми траекториями и с $\sigma^2(s, t) = E(X(s) - X(t))^2$, удовлетворяющим условию $\int_0^1 \sigma^{-1}(s, t) ds < \infty$ при п.в. t , то все указанные выше требования выполнены. Другие условия непрерывности локальных времен, отвечающих различным классам случайных процессов, обсуждаются в работах [7]–[9], [11]–[13].

Переходя от отдельных траекторий процесса к самому процессу, мы можем перенести полученные выше результаты на случайные процессы; формально это можно сделать, например, в следующей форме:

Теорема 5. Если процесс $X(s)$ обладает локальным временем $\alpha(t, u)$, $t \in [0, 1]$, $u \in \mathbf{R}$, с вероятностью 1 непрерывным по t при п.в. u ,

*Уфимский авиационный технический университет, кафедра математики, К. Маркса, 12, 450025 Уфа, Россия.

то для почти всех траекторий процесса $X(s)$ справедливы доказанные выше в § 2, 3 утверждения.

Ниже в этом параграфе, во-первых, следуя подходу, принятому в работах [10], [4], мы получим ортогональное разложение локального времени вдоль траектории $\xi(t)$, и, во-вторых, выведем интегральное уравнение для совместного распределения $P\{\xi(t) \leq x, X(t) \leq y\}$.

Для того, чтобы перейти к первому вопросу, приведем для удобства необходимые в дальнейшем сведения. Пусть $X(s)$, $s \in [0, 1]$, — случайный процесс с двумерной плотностью распределения $p(x, y, s, \tau)$, $x, y \in \mathbf{R}$, $s, \tau \in [0, 1]$, и одномерной плотностью $p(x)$, не зависящей от s .

Процесс $X(s)$ назовем *процессом равномерного РВ-типа* (positive bivariate type), если существует δ , $0 < \delta \leq 1$, такое, что при всех $s, \tau \in [0, 1]$, $s \neq \tau$, $|\tau - s| < \delta$, выполняются условия:

(А) Функции

$$\frac{p(x, y, s, \tau)}{p(x)p(y)} \quad (21)$$

принадлежат произведению пространств $H = L_2(p(x)dx) \times L_2(p(y)dy)$, где $L_2(p(x)dx) = \{f(x), x \in \mathbf{R}: \int_{\mathbf{R}} f^2(x)p(x)dx < \infty\}$.

(Б) Ядра (21) раскладываются в ряд

$$\frac{p(x, y, s, \tau)}{p(x)p(y)} = \sum_{n=0}^{\infty} r_n(s, \tau) e_n(x) e_n(y), \quad (22)$$

сходящийся в смысле сходимости в H , где $\{e_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ — нормированная последовательность собственных функций, не зависящих от s и τ , а $\{r_n(s, \tau)\}_{n=0}^{\infty}$ — последовательность собственных значений линейного оператора, порожденного в H ядром (21), причем $r_0 = 1$, $e_0 = 1$, $r_n(s, \tau) \geq 0$, $n \in \mathbf{N}$.

Будем говорить, что процесс $Y(s)$, $s \in [0, 1]$, принадлежит *почти равномерному РВ-типу*, если существует измеримая положительная функция $b(s)$, $s \in [0, 1]$, такая, что процесс $X(s) = (b(s))^{-1} Y(s)$, $s \in [0, 1]$, принадлежит равномерному РВ-типу. Ниже, если это специально не оговорено, фиксируется случайный процесс только что описанного вида, а для всех объектов, связанных с процессом $X(s)$, будут использованы обозначения этого раздела. В дальнейшем предполагается, что при п.в. s и τ функции $p(x, y, s, \tau)$ непрерывны по (x, y) на $\mathbf{R}^2$; функция $p(x)$ непрерывна на $\mathbf{R}$.

Для удобства приведем основной результат работы [4], который нам понадобится ниже.

Теорема 6. *Предположим, что выполнены следующие условия:*

$$1. \int_0^1 \int_0^1 \int_{\mathbf{R}} \left[p\left(\frac{x}{b(s)}, \frac{x}{b(s)}, s, \tau\right) p\left(\frac{x}{b(\tau)}, \frac{x}{b(\tau)}, s, \tau\right) \right]^{1/2} dx \times \frac{ds d\tau}{b(s)b(\tau)} < \infty;$$

2. При всех $x \in \mathbf{R}$, $n \in \mathbf{N}$

$$\int_0^1 p\left(\frac{x}{b(s)}\right) \left| e_n\left(\frac{x}{b(s)}\right) \right| \frac{ds}{b(s)} < \infty;$$

3. Интеграл

$$\varphi(x, y) = \int_0^1 \int_0^1 p\left(\frac{x}{b(s)}, \frac{y}{b(\tau)}, s, \tau\right) \frac{ds d\tau}{b(s)b(\tau)}$$

конечен и является непрерывной по $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ функцией;

4. При п.в. s и τ , $n \in \mathbf{N}$

$$\int_{\mathbf{R}} [p(x, x, s, \tau)]^{1/2} |e_n(x)| dx < \infty;$$

5. Система функций $\{e_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ полна в $L_2(p(x)dx)$.

Тогда при каждом $T \in \mathcal{B}$

(а) Ряд

$$\tilde{\alpha}(T, x) = \sum_{n=0}^{\infty} g_n(T, x) \quad (23)$$

при любом x сходится в среднем квадратическом; при этом случайные величины

$$g_n(T, x) = \int_T p\left(\frac{x}{b(s)}\right) e_n\left(\frac{x}{b(s)}\right) e_n\left(\frac{Y(s)}{b(s)}\right) \frac{ds}{b(s)},$$

отвечающие разным значениям n , попарно ортогональны;

(б) Случайный процесс $\tilde{\alpha}(T, x)$, $x \in \mathbf{R}$, непрерывен в среднем квадратическом;

(в) Существует локальное время $\alpha(T, x)$ для процесса $Y(s)$ и с вероятностью 1 при п.в. x $\alpha(T, x) = \tilde{\alpha}(T, x)$, то есть $\tilde{\alpha}(T, x)$ является версией локального времени для процесса $Y(s)$.

Пусть $X(s)$, $s \in [0, 1]$, — случайный процесс (не обязательно почти равномерного РВ-типа) с локальным временем $\alpha(t, x)$, непрерывным по t с вероятностью 1 при п.в. x . Положим $X^\tau(s) = X(\tau) - X(s)$, $s \in [0, 1]$ (все характеристики случайного процесса $X^\tau(s)$ будем обозначать так же, как и в случае процесса $X(s)$, но с добавлением индекса τ наверху, например, $p^\tau(x)$ — одномерная плотность процесса $X^\tau(s)$, поскольку $p(x)$ — соответствующая плотность процесса $X(s)$).

Теорема 7. Предположим, что при п.в. τ выполнены следующие условия:

1. Случайный процесс $X^\tau(s) = X(\tau) - X(s)$, $s \in [0, 1]$, принадлежит почти равномерному РВ-типу;

2. Для процесса $X^\tau(s)$ выполнены предположения 1–5 теоремы 6. Тогда

(а) Ряд

$$\tilde{\xi}(\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} p^{\tau}(0) e_n^{\tau}(0) \int_0^{\tau} e_n^{\tau} \left(\frac{X(\tau) - X(s)}{b^{\tau}(s)} \right) \frac{ds}{b^{\tau}(s)} \quad (24)$$

при п.в. τ сходится в среднем квадратическом; при этом случайные величины

$$\int_0^{\tau} e_n^{\tau} \left(\frac{X(\tau) - X(s)}{b^{\tau}(s)} \right) \frac{ds}{b^{\tau}(s)},$$

отвечающие разным значениям n , попарно ортогональны;

(б) С вероятностью 1 при п.в. τ выполняется равенство $\xi(\tau) = \tilde{\xi}(\tau)$.

Доказательство. Зафиксируем любое $\tau \in [0, 1]$, для которого справедливы предположения 1 и 2 теоремы 7. В силу теоремы 6, опираясь на тождество (1), выводим, что при п.в. ω локальные времена для процессов $X^{\tau}(s)$ и $X(s)$ связаны между собой следующим образом: для любого $t \in [0, 1]$ $\alpha^{\tau}(t, y) = \alpha(t, X(\tau) + y)$ при п.в. y . Ввиду теоремы о дифференцировании интегралов, дополнение множества

$$\Gamma_{t, \omega} = \left\{ z \in \mathbf{R}: \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{1}{2\varepsilon} \int_{\{y: |y| < \varepsilon\}} \alpha(t, y + z) dy = \alpha(t, z) \right\}$$

есть множество нулевой лебеговой меры. Значит в силу существования локального времени для процесса $X(s)$

$$\int_0^1 \mathbb{I}\{X(\tau) \in \mathbf{R} \setminus \Gamma_{t, \omega}\} d\tau = 0 \quad \text{п.н.,}$$

а это означает, что при каждом $t \in [0, 1]$ п.н.

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{1}{2\varepsilon} \int_{\{y: |y| < \varepsilon\}} \alpha^{\tau}(t, y) dy = \alpha(t, X(\tau)) \quad \text{при п.в. } \tau. \quad (25)$$

Взяв счетное всюду плотное в $[0, 1]$ множество $\{t_k\}_{k=1}^{\infty}$, в силу монотонности и непрерывности $\alpha(t, x)$, выводим, что соотношение (25) справедливо одновременно для всех t при п.в. τ п.н. Отсюда, в частности, следует, что при п.в. τ п.н.

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{1}{2\varepsilon} \int_{\{y: |y| < \varepsilon\}} \alpha^{\tau}(\tau, y) dy = \xi(\tau).$$

Поскольку, в силу неравенства Йенсена, для любого t

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \left(\frac{1}{2\varepsilon} \int_{\{y: |y| < \varepsilon\}} [\alpha^{\tau}(t, y) - \alpha^{\tau}(t, 0)] dy \right)^2 \\ & \leq \frac{1}{2\varepsilon} \int_{\{y: |y| < \varepsilon\}} \mathbb{E} [\alpha^{\tau}(t, y) - \alpha^{\tau}(t, 0)]^2 dy \quad \text{при п.в. } \tau, \end{aligned}$$

то для тех же τ , в силу непрерывности в среднем квадратическом функции $\alpha^\tau(\tau, y)$ по переменной y ,

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \mathbf{E} \left(\frac{1}{2\varepsilon} \int_{\{y: |y| < \varepsilon\}} \alpha^\tau(\tau, y) dy - \alpha^\tau(\tau, 0) \right)^2 = 0.$$

Это означает, что $\alpha^\tau(\tau, 0) = \xi(\tau)$ п.н. при п.в. τ . Но при п.в. τ для локального времени $\alpha^\tau(\tau, 0)$ справедливо ортогональное разложение (23); осталось доказать, что п.н. при п.в. τ $\xi(\tau) = \alpha^\tau(\tau, 0)$. Последнее вытекает из равенства

$$\mathbf{E} \left(\int_0^1 (\xi(\tau) - \alpha^\tau(\tau, 0))^2 d\tau \right) = \int_0^1 \mathbf{E} (\xi(\tau) - \alpha^\tau(\tau, 0))^2 d\tau = 0.$$

Пример 2. Пусть $Y(s)$, $s \in [0, 1]$ — сепарабельный гауссовский процесс с нулевым средним и ковариацией $B(s, \tau) = \mathbf{E}(Y(s)Y(\tau))$. Обозначим через $p(x, y, s, \tau)$, $x, y \in \mathbf{R}$, $s, \tau \in [0, 1]$, двумерные плотности распределения процесса $X(s) = (b(s))^{-1}Y(s)$, где $b(s) = (B(s, s))^{1/2}$. Предположим, что выполнены условия: $B(s, \tau) \geq 0$ для всех $s, \tau \in [0, 1]$; при всех $s, \tau \in [0, 1]$, $s \neq \tau$, $B(s, \tau)[b(s)b(\tau)]^{-1} \neq 1$. Тогда (см. [10]) процесс $X(s)$, $s \in [0, 1]$, является процессом равномерного РВ-типа и для функций $p(x, y, s, \tau)$ при любых $s, \tau \in [0, 1]$ справедливо разложение (22) с $p(x) = (1/\sqrt{2\pi}) \exp\{-x^2/2\}$, $r_n(s, \tau) = [B(s, \tau)/(b(s)b(\tau))]^n$, $e_n(x) = (1/\sqrt{n!})H_n(x)$, где $H_n(x)$, $x \in \mathbf{R}$, $n \in \mathbf{N}$, — классические многочлены Эрмита, связанные с весовой функцией $\exp\{-x^2/2\}$. Следовательно процесс $Y(s)$, $s \in [0, 1]$, с ковариацией, удовлетворяющей перечисленным выше условиям, будет процессом почти равномерного РВ-типа.

Если

$$\int_0^1 \int_0^1 \frac{ds d\tau}{\sqrt{B(s, s)B(\tau, \tau) - B^2(s, \tau)}} < \infty,$$

то выполнены все предположения теоремы 6.

Положим $\sigma(\tau, s, s') = \mathbf{E}[(Y(\tau) - Y(s))(Y(\tau) - Y(s'))]$. Если при п.в. τ выполняются условия:

1. $\sigma(\tau, s, s') \geq 0$ при любых τ, s, s' ;

$$2. \quad \int_0^1 \int_0^1 \frac{ds ds'}{\sqrt{\sigma(\tau, s, s)\sigma(\tau, s' s') - \sigma^2(\tau, s, s')}} < \infty,$$

то все предположения теоремы 7 выполнены.

Заметим, что определение локального времени и связанные с ним конструкции очевидным образом переносятся с параметрического множества $[0, 1]$ на $[0, +\infty)$.

Теорема 8. Пусть $X(s)$, $s \in [0, +\infty)$, — вещественнозначный стохастически непрерывный случайный процесс с независимыми приращениями, обладающий локальным временем $\alpha(t, u)$, $t \in [0, +\infty)$, $u \in \mathbf{R}$, с вероятностью 1 непрерывным по переменным (t, u) .

Тогда функция

$$u(t, x, y) = \mathbf{P} \left\{ \int_0^t \psi(s) \alpha(ds, X(t)) \leq x, X(t) \leq y \right\} \psi(t),$$

где $\psi(\cdot)$ — непрерывная неотрицательная функция, удовлетворяет в области $t \geq 0, x \geq 0, y \in \mathbf{R}$ уравнению

$$\begin{aligned} x \psi(t) \mathbf{P}\{X(t) \leq y\} - \int_0^x u(t, z, y) dz \\ = \psi(t) \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{1}{2\varepsilon} \int_0^t u(s, x, y) \mathbf{P}\{|X(t) - X(s)| < \varepsilon\} ds. \end{aligned} \quad (26)$$

Доказательство. Временно зафиксируем отдельную траекторию процесса $X(s)$, обладающую локальным временем $\alpha(t, u)$, непрерывным по переменным (t, u) . Обозначим

$$\alpha_\psi(t, u) = \int_0^t \psi(s) \alpha(ds, u), \quad \xi_\psi(t) = \alpha_\psi(t, X(t)).$$

Заметим, что, в силу теоремы Хелли, функция $\alpha_\psi(t, u)$ непрерывна по u . Для любого $x > 0$ ввиду леммы 1 получим

$$\min(x, \alpha_\psi(t, u)) = \int_0^x \mathbb{I}\{\alpha_\psi(s, u) < x\} \alpha_\psi(ds, u). \quad (27)$$

Умножим обе части тождества (27) на $\mathbb{I}\{u \leq y\}$. Поскольку правая часть полученного тождества непрерывна по u за исключением точки $u = y$, то для $u \neq y$ ее можно переписать в виде

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{1}{2\varepsilon} \int_{\mathbf{R}} \mathbb{I}\{|u - v| < \varepsilon, v \leq y\} \int_0^t \mathbb{I}\{\alpha_\psi(s, v) < x\} \psi(s) \alpha_\psi(ds, v) dv.$$

В силу формулы (1) мы приходим к тождеству

$$\begin{aligned} \int_0^x \mathbb{I}\{z \leq \alpha_\psi(t, u)\} dz \cdot \mathbb{I}\{u \leq y\} \\ = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{1}{2\varepsilon} \int_0^t \mathbb{I}\{|u - X(s)| < \varepsilon, X(s) \leq y, \xi_\psi(s) \leq x\} \psi(s) ds. \end{aligned} \quad (28)$$

Положив $u = X(t)$ и учитывая, что $\mathbf{P}\{X(t) = y\} = 0$, возьмем от обеих частей тождества (28) математическое ожидание. Поскольку обе части тождества (28) не превосходят x , то в силу теоремы Лебега о предельном переходе под знаком интеграла, имеем:

$$\begin{aligned} x \psi(t) \mathbf{P}\{X(t) \leq y\} - \int_0^x u(t, z, y) dz \\ = \psi(t) \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{1}{2\varepsilon} \int_0^t \mathbf{P}\{|X(t) - X(s)| < \varepsilon, \xi_\psi(s) \leq x, X(s) \leq y\} \psi(s) ds. \end{aligned}$$

Используя затем тот факт, что $X(s)$ — процесс с независимыми приращениями, приходим к уравнению (26).

З а м е ч а н и е. Предположим дополнительно, что $X(s)$, $s > 0$ — однородный процесс с независимыми приращениями. Пусть функция $\psi(s) = 1$ для всех $s \in [0, 1]$, тогда уравнение (26) сводится с помощью преобразования Лапласа к дифференциальному уравнению 1-го порядка. Действительно, положим

$$\begin{aligned} U(\lambda, x, y) &= \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} u(t, x, y) dt, \\ W(\lambda) &= \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{1}{2\varepsilon} \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} \mathbf{P}\{|X(t)| < \varepsilon\} dt, \\ V(\lambda, y) &= \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} \mathbf{P}\{X(t) \leq y\} dt. \end{aligned}$$

Поскольку интеграл в правой части уравнения (26) при $\psi(t) = 1$ представляет собой свертку двух функций, то применение преобразования Лапласа переводит уравнение (26) в уравнение

$$V(\lambda, y) - U(\lambda, x, y) = W(\lambda) \frac{\partial}{\partial x} U(\lambda, x, y).$$

Решая данное уравнение с учетом начального условия $V(\lambda, 0, y) = 0$, получаем

$$U(\lambda, x, y) = V(\lambda, y) (1 - e^{x/W(\lambda)}). \quad (29)$$

В случае процесса стандартного броуновского движения $X(s)$ из равенства (29) выводим равенство $\mathbf{P}\{\xi(t) \leq x\} = \mathbf{P}\{|X(t)| \leq x\}$.

§ 5. Броуновское локальное время

Пусть $X(s)$, $s \in [0, 1]$, — стандартное броуновское движение с локальным временем $\alpha(t, u)$, $t \in [0, 1]$, $u \in \mathbf{R}$, непрерывным с вероятностью 1 по переменным (t, u) .

Найдем совместное распределение процесса $X(s)$ и локального времени вдоль траектории $\xi(s)$. Заметим, что для некоторых процессов, в том числе и для процесса броуновского движения, известны распределения $\mathbf{P}\{\alpha(t, u) \leq x\}$. Поэтому, предполагая, что в тождестве (6) $X(s)$ и $\xi(s)$ — случайные процессы, и взяв от обеих частей данного тождества математическое ожидание, получим

$$\int_0^t \mathbf{P}\{\xi(s) \leq x, X(s) \leq y\} ds = \int_0^x \int_{-\infty}^y \mathbf{P}\{\alpha(t, u) > z\} du dz. \quad (30)$$

Точно так же, опираясь, например, хотя бы на второе утверждение предложения 3, выводим

$$\int_0^t \mathbf{P}\{\xi(s) - f(X(s)) \leq y, X(s) \leq x\} ds$$

$$= \int_{-\infty}^y \int_{-\infty}^x \mathbf{P}\{\alpha(t, u) > z + f(u)\} \mathbb{I}\{f(u) > -z\} du dz. \quad (31)$$

Из равенства (30) следует, что

$$\mathbf{P}\{\xi(t) \leq x, X(t) \leq y\} = \frac{\partial}{\partial t} \int_0^x \int_{-\infty}^y \mathbf{P}\{\alpha(t, u) > z\} du dz.$$

Аналогичное соотношение вытекает из равенства (31). В частности, известно (см. [3, с. 383]), что для броуновского движения $X(s)$

$$\mathbf{P}\{\alpha(t, u) > z\} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{(z+|u|)/(\sqrt{2t})}^{+\infty} e^{-v^2} dt, \quad z > 0.$$

Поэтому

$$\mathbf{P}\{\xi(t) \leq x, X(t) \leq y\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int_{-\infty}^y [e^{-u^2/(2t)} - e^{-(x-|u|)^2/(2t)}] du.$$

Как отмечено в работе [1], в число применений броуновского локального времени входят различные варианты обобщенных формул Ито, а первым результатом в этом направлении является формула Танаки: с вероятностью 1 для всех (τ, u)

$$\frac{1}{2} \alpha(\tau, u) = (X(\tau) - u)^+ - (-u)^+ - \int_0^\tau \mathbb{I}\{X(s) > u\} dX(s), \quad (32)$$

где $(z)^+ = \max(z, 0)$. Мы также докажем одно подобное утверждение. Для этого нам потребуется следующий результат.

Лемма 2. Пусть $y(s)$, $s \in [0, 1]$, — непрерывная функция с локальным временем $\alpha(t, u)$, $t \in [0, 1]$, $u \in \mathbf{R}$, непрерывным по переменным (t, u) . Тогда для любых $u \in \mathbf{R}$, $x > 0$, $t \in [0, 1]$

$$\begin{aligned} [y(\alpha_{u,t}^{-1}(x)) - u] \mathbb{I}\{\alpha(t, u) > x\} &= 0, \\ [\xi(\alpha_{u,t}^{-1}(x)) - x] \mathbb{I}\{\alpha(t, u) > x\} &= 0, \end{aligned} \quad (33)$$

где $\alpha_{u,t}^{-1}(x) = \min\{s \leq t: \alpha(s, u) = x\}$ — обратная к $\alpha(t, u)$ функция, которая определяется на множестве $x \in (0, \alpha(t, u))$.

Доказательство. Заметим, что если $\alpha(t, u) > x > 0$, то $u \in [\min_{0 \leq s \leq t} y(s), \max_{0 \leq s \leq t} y(s)]$. Зафиксируем $t \in [0, 1]$, $u \in \mathbf{R}$, $x > 0$. Положим $s^* = \alpha_{u,t}^{-1}(x)$. В силу построения точки s^* и того факта, что носитель меры $\alpha(ds, u)$, порожденной неубывающей функцией $\alpha(s, u)$, $s \in [0, 1]$, содержится в множестве $\{s \in [0, 1]: X(s) = u\}$, имеем:

$$\int_{s^*-\varepsilon}^{s^*} \mathbb{I}\{X(s) = u\} \alpha(ds, u) > 0, \quad \alpha(s^*, u) = x,$$

для любого $\varepsilon > 0$. Значит, либо $X(s^*) = u$, либо существует последовательность $s_k \uparrow s^*$ ($k \rightarrow \infty$) такая, что $X(s_k) = u$. Но, ввиду непрерывности функции $X(s)$, $u = \lim_{k \rightarrow \infty} X(s_k) = X(s^*)$, и, таким образом, первое утверждение леммы 2 доказано. Далее, $\xi(s^*) = \alpha(s^*, X(s^*)) = \alpha(s^*, u) = x$, что завершает доказательство леммы 2.

Положим $J(t, x, u) = \int_0^t \mathbb{I}\{X(s) > u, \alpha(s, u) \leq x\} dX(s)$.

Теорема 9 (обобщенная формула Танаки). Для любых $t \in [0, 1]$, $x > 0$, $u \in \mathbb{R}$ с вероятностью 1

$$\frac{1}{2} \min(x, \alpha(t, u)) = \mathbb{I}\{\alpha(t, u) \leq x\} (X(t) - u)^+ - (-u)^+ - J(t, x, u). \quad (34)$$

Доказательство. Зафиксируем $t \in [0, 1]$, $x > 0$, $u \in \mathbb{R}$. Умножим обе части формулы Танаки (32) на $\mathbb{I}\{\alpha(t, u) > x\}$ и положим τ равным марковскому моменту $\alpha_{u,t}^{-1}(x) = \min\{s \leq t: \alpha(s, u) = x\}$. В силу построения марковского момента и формулы (33) получим

$$\begin{aligned} \frac{x}{2} \mathbb{I}\{\alpha(t, u) > x\} &= \left[-(-u)^+ - \int_0^{\alpha_{u,t}^{-1}(x)} \mathbb{I}\{X(s) > u\} dX(s) \right] \\ &\quad \times \mathbb{I}\{\alpha(t, u) > x\} \quad \text{п.н.} \end{aligned} \quad (35)$$

Ввиду свойств стохастического интеграла, расположенный в правой части равенства стохастический интеграл равен $\int_0^t \mathbb{I}\{\alpha(s, u) \leq x, X(s) > u\} dX(s)$. Положим теперь в формуле Танаки (32) $\tau = t$ и умножим обе части полученного равенства на $\mathbb{I}\{\alpha(t, u) \leq x\}$.

Заметим, что почти наверное

$$\mathbb{I}\{\alpha(t, u) \leq x\} \int_0^t \mathbb{I}\{X(s) > u\} dX(s) = \mathbb{I}\{\alpha(t, u) \leq x\} J(t, x, u).$$

Складывая полученное равенство с равенством (35), в силу тождества $\min(x, y) = x \mathbb{I}\{x < y\} + y \mathbb{I}\{x \geq y\}$ получим формулу (34).

З а м е ч а н и е. В силу равенства (34) стохастический интеграл $J(t, x, u)$ обладает версией, представляющей собой при фиксированных t, u, ω функцию ограниченной вариации по переменной x , поскольку $J(t, x, u)$ есть разность неубывающих функций $\frac{1}{2} \min(x, \alpha(t, u))$ и $\mathbb{I}\{\alpha(t, u) \leq x\} (X(t) - u)^+$.

Более того, ввиду предположения, что $\alpha(t, u)$ — вариант локального времени, совместно непрерывный по (t, u) , из соотношения (34) вытекает, что существует версия $J(t, x, u)$, измеримая относительно переменных (t, x, u, ω) .

Следствие 1. Для любых $t \geq 0$, $x > 0$, $u \in \mathbb{R}$ справедливо равенство

$$\left(J(t, x, u) - \frac{x}{2} - (-u)^+ \right) \mathbb{I}\{\alpha(t, u) > x\} = 0. \quad (36)$$

Соотношение (36) сразу вытекает из равенства (34).

Следствие 2. Пусть $J(t, x, u)$ — версия стохастического интеграла, измеримая относительно переменных (t, x, u, ω) .

Тогда равенство (34) справедливо п.н. при п.в. (x, u) .

Действительно, умножая обе части равенства (34) на $\mathbb{I}(A)$, $A \in \mathcal{F}$, и учитывая, что обе части равенства не превосходят x , возьмем от обеих частей равенства (34) математическое ожидание, а затем проинтегрируем по переменным $(x, u) \in [x_1, x_2] \times [u_1, u_2]$, где $0 \leq x_1 < x_2$, $u_1 < u_2$ — произвольные числа. Ввиду произвольности множеств A , $[x_1, x_2]$, $[u_1, u_2]$ получим требуемое, применив теорему Фубини.

Следствие 3. При любых $t > 0$, $v \in \mathbb{R}$, $z \geq 0$ с вероятностью 1

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_0^t \int_{\xi(s)}^z f(x, X(s)) dx \mathbb{I}\{X(s) \leq v\} ds \\ &= \int_{-\infty}^v \int_0^z f(x, u) \left[(X(t) - u)^+ - (-u)^+ \right] \mathbb{I}\{\alpha(t, u) \leq x\} dx du \\ & \quad - \int_0^t \left[\int_{-\infty}^v \int_0^z f(x, u) \mathbb{I}\{X(s) > u, \alpha(s, u) \leq x\} dx du \right] dX(s), \quad (37) \end{aligned}$$

где $f(\cdot, \cdot)$ — ограниченная (неслучайная) функция.

Действительно, ввиду следствия 2 к теореме 9, умножим обе части равенства (34) на функцию $f(x, u)$, интегрируем полученное тождество по переменным $(x, u) \in [0, z] \times (-\infty, v]$ и, применив к правой части полученного тождества «стохастическую теорему Фубини» ([2, с. 123]), получим, что правая часть этого тождества совпадает с выражением, стоящим в правой части равенства (37).

Согласно лемме 1

$$\min(x, \alpha(t, u)) = \int_0^t \mathbb{I}\{\alpha(s, u) \leq x\} \alpha(ds, u),$$

поэтому левая часть полученного тождества примет вид

$$\frac{1}{2} \int_0^z \int_{-\infty}^v \int_0^t \mathbb{I}\{\alpha(s, u) \leq x\} \alpha(ds, u) f(x, u) du dx.$$

В силу формулы (1) и теоремы Фубини последнее выражение равно левой части соотношения (37).

З а м е ч а н и е. Другие варианты следствий из формулы (34) можно получить, умножая равенство (34) на неслучайную функцию одной переменной ($f(u)$ или $f(x)$) и интегрируя это тождество только по этой переменной.

Найдем представления некоторых рассматриваемых в данной работе функционалов в виде сумм, содержащих стохастические интегралы. Так, интегрируя тождество (34) по переменной $u \in U$, $m(U) < \infty$, в силу тождества (2) и упомянутой выше «стохастической теоремы Фубини»

для времени пребывания $\mu_{t,U}(x)$ процесса $\xi(\tau)$, выводим: с вероятностью 1

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \mu_{t,U}(x) = & \int_U \mathbb{I}\{\alpha(t, u) < x\} (X(t) - u)^+ du - \int_U (-u)^+ du \\ & - \int_0^t \left[\int_U \mathbb{I}\{\alpha(s, u) < x, X(s) > u\} du \right] dX(s). \end{aligned} \quad (38)$$

Далее, в силу соотношений (7) и (38), для $U \in \mathcal{B}$, $m(U) < \infty$,

$$\begin{aligned} \frac{x}{2} F_U(t, x) = & - \int_U \mathbb{I}\{\alpha(t, u) < x\} (X(t) - u)^+ du \\ & - \int_U (-u)^+ du - \int_0^t \left[\int_U \mathbb{I}\{\alpha(s, u) < x, X(s) > u\} du \right] dX(s) \\ & - \frac{1}{2} \int_0^t \mathbb{I}\{\alpha(t, X(s)) \leq x, X(s) \in U\} ds \quad \text{п.н.} \end{aligned}$$

Напомним, что если $Z(t), t \geq 0$, — процесс броуновского движения, $Z(0) = 0$, то согласно уравнению Скорохода ([2, с. 127])

$$|Z(t)| = B(t) + \gamma(t, 0) \quad \text{п.н.,} \quad (39)$$

где $B(t)$ — новое броуновское движение, $B(t) = \int_0^t \text{sgn}(Z(s)) dZ(s)$, $\gamma(t, 0)$ — локальное время процесса $Z(s)$ в нуле, при этом п.н. $\gamma(t, 0) = -\min_{0 \leq s \leq t} B(s)$. Формула (34) позволяет получить одно обобщение уравнения (39).

Теорема 10 (обобщенное уравнение Скорохода). Пусть $\Phi(z)$, $z \geq 0$, — абсолютно непрерывная функция,

$$\Phi(z) = \int_z^\infty \psi(y) dy, \quad \psi(y) > 0, \quad y \in [0, +\infty).$$

Тогда с вероятностью 1

$$\begin{aligned} \Phi(\alpha(t, 0)) |X(t)| = & \int_0^t \text{sgn}(X(s)) \Phi(\alpha(s, 0)) dX(s) \\ & + \int_0^{\alpha(t, 0)} \Phi(z) dz. \end{aligned} \quad (40)$$

При этом

$$\int_0^{\alpha(t, 0)} \Phi(z) dz = - \min_{0 \leq \tau \leq t} \left(\int_0^\tau \text{sgn}(X(s)) \Phi(\alpha(s, 0)) dX(s), 0 \right). \quad (41)$$

Доказательство. Умножая обе части формулы (34) на функцию $\psi(x)$ и интегрируя по $x \in [0, +\infty)$, в силу упомянутой выше

«стохастической теоремы Фубини», получим: с вероятностью 1

$$\frac{1}{2} \int_0^t \Phi(\alpha(s, u)) \alpha(ds, u) = \Phi(\alpha(t, u)) (X(t) - u)^+ - (-u)^+ \Phi(0) - \int_0^t \mathbb{I}\{X(s) > u\} \Phi(\alpha(s, u)) dX(s).$$

Полагая в последнем равенстве $u = 0$, приходим к соотношению

$$\begin{aligned} \Phi(\alpha(t, 0)) (X(t))^+ &= \int_0^t \mathbb{I}\{X(s) > 0\} \Phi(\alpha(s, 0)) dX(s) \\ &+ \frac{1}{2} \int_0^t \Phi(\alpha(s, 0)) \alpha(ds, 0) \quad \text{п.н.} \end{aligned} \quad (42)$$

Нетрудно видеть, что процесс $(-X(s))$, $s \geq 0$, имеет локальное время в точке $u = -x$, равное $\alpha(t, x)$. Поэтому для этого процесса равенство (42) примет вид

$$\begin{aligned} \Phi(\alpha(t, 0)) (-X(t))^+ &= - \int_0^t \mathbb{I}\{X(s) < 0\} \Phi(\alpha(s, 0)) dX(s) \\ &+ \frac{1}{2} \int_0^t \Phi(\alpha(s, 0)) \alpha(ds, 0). \end{aligned}$$

Складывая данное равенство с равенством (42), получим

$$\begin{aligned} \Phi(\alpha(t, 0)) |X(t)| &= \int_0^t \operatorname{sgn}(X(s)) \Phi(\alpha(s, 0)) dX(s) \\ &+ \int_0^t \Phi(\alpha(s, 0)) \alpha(ds, 0) \quad \text{п.н.} \end{aligned} \quad (43)$$

Поскольку в силу следствия к лемме 1

$$\int_0^t \Phi(\alpha(s, 0)) \alpha(ds, 0) = \int_0^{\alpha(t, 0)} \Phi(z) dz,$$

то соотношение (40) вытекает из (43).

Положим

$$h(t) = \int_0^{\alpha(t, 0)} \Phi(z) dz, \quad g(t) = \Phi(\alpha(t, 0)) |X(t)|$$

и покажем, что в этих обозначениях (при $x = 0$) с вероятностью 1 справедлива лемма 4.2 из монографии [2]. Для этого достаточно убедиться, что функция $h(t)$ возрастает только на множестве $\{t: g(t) = 0\}$. Имеем:

$$\begin{aligned} \int_0^t \mathbb{I}\{g(s) = 0\} dh(s) &= \int_0^t \mathbb{I}\{\Phi(\alpha(s, 0)) |X(s)| = 0\} \Phi(\alpha(s, 0)) \alpha(ds, 0) \\ &= \int_0^t \mathbb{I}\{X(s) = 0\} \Phi(\alpha(s, 0)) \alpha(ds, 0) = h(t) \quad \text{п.н.,} \end{aligned}$$

поскольку $\Phi(z) > 0$ при $z \geq 0$. Следовательно (см. [2, с. 127]), в силу следствия к лемме 1 получим соотношение (41).

Найдем аналоги формул (39), (34), (40) и (41), соответствующие процессу $\xi(t)$.

Положим $B_\tau(t) = \int_0^t \operatorname{sgn}(X(\tau - s) - X(\tau)) * dX(s)$, где интеграл в правой части есть обратный стохастический интеграл по процессу $X(s)$ (некоторые сведения о таких интегралах приводятся, например, в [6, с. 36–38]).

Предложение 6. Для любого τ с вероятностью 1

$$\xi(\tau) = |X(\tau)| - B_\tau(\tau); \quad \xi(\tau) = - \min_{0 \leq s \leq \tau} B_\tau(s). \quad (44)$$

Доказательство. При каждом τ рассмотрим вспомогательный процесс $Y_\tau(s) = X(\tau - s) - X(\tau)$, $s \in [0, \tau]$, который также является процессом броуновского движения. Обозначим через $\alpha_\tau(p, y)$, $p \in [0, \tau]$, $y \in \mathbf{R}$, локальное время для процесса $Y_\tau(s)$, точнее, его вариант, с вероятностью 1 непрерывный по переменным (p, y) .

Выясним связь между локальным временем $\alpha_\tau(p, y)$ нового броуновского движения $Y_\tau(s)$ и локальным временем $\alpha(t, y)$ исходного процесса $X(s)$. Имеем: если $p \in [0, \tau]$, то

$$\begin{aligned} \int_0^p \mathbb{I}\{Y_\tau(s) \leq x\} ds &= \int_{\tau-p}^\tau \mathbb{I}\{X(t) < x + X(\tau)\} dt \\ &= \int_{-\infty}^{x+X(\tau)} [\alpha(\tau, y) - \alpha(\tau - p, y)] dy \quad \text{п.н.} \end{aligned}$$

В силу непрерывности локальных времен $\alpha(t, y)$ и $\alpha_\tau(t, y)$ можно считать, что для любых $\tau \in [0, 1]$ п.н. при всех $p \in [0, \tau]$, $y \in \mathbf{R}$

$$\alpha_\tau(p, y) = \alpha(\tau, y + X(\tau)) - \alpha(\tau - p, y + X(\tau)).$$

В частности, при $p = \tau$, $y = 0$

$$\xi(\tau) = \alpha_\tau(\tau, 0) \quad \text{п.н.} \quad (45)$$

Положив в соотношении (39) $Z(t) = Y_\tau(t)$, $t \in [0, \tau]$, получим $|Y_\tau(t)| = B_\tau(t) + \alpha_\tau(t, 0)$ п.н.; в частности, при $t = \tau$, ввиду равенства (45), получим формулу (44).

З а м е ч а н и е. В силу предложения 3 мы можем, во-первых, найти совместное распределение $\mathbf{P}\{X(s) \leq x, B_s(s) \leq y\}$ слагаемых, входящих в равенство (44), а, во-вторых, найти локальное время для процесса $B_\tau(\tau)$, $\tau \in [0, 1]$.

Действительно, полагая в равенстве (31) $f(x) = |x|$, в силу равенств

ва (44) имеем:

$$\begin{aligned} & \mathbf{P}\{X(s) \leq x, B_s(s) \leq y\} \\ &= \frac{\partial}{\partial s} \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y \mathbf{P}\{\alpha(s, u) > z + |u|\} \mathbb{I}\{|u| > z\} du dz. \end{aligned}$$

Наконец, в силу предложения 3, функция $\xi(s) - f(X(s))$, где $f(x) = |x|$, обладает локальным временем $\alpha_f(t, x)$; с другой стороны, $\xi(s) - |X(s)| = -B_s(s)$ п.н.

Положим

$$J(\tau, x) = \int_0^\tau \mathbb{I}\{\xi(s) - \alpha(\tau - s, X(\tau)) \leq x, X(\tau - s) - X(\tau) > 0\} * dX(s).$$

Предложение 7. При любом $\tau \in [0, 1]$ существует версия стохастического интеграла $J(\tau, x)$ такая, что для любого $x > 0$

$$\frac{1}{2} \min(x, \xi(\tau)) = \mathbb{I}\{\xi(\tau) \leq x\} (-X(\tau))^+ - J(\tau, x) \quad \text{п.н.} \quad (46)$$

Доказательство. Рассмотрим при каждом фиксированном $\tau \in (0, 1]$ случайный процесс $Y_\tau(s)$, $s \in [0, \tau]$, определенный выше. Применительно к этому процессу и его локальному времени равенство (34) при $t = \tau$ и $u = 0$ в силу соотношения (45) имеет вид: для всех $x > 0$

$$\frac{1}{2} \min(x, \xi(\tau)) = \mathbb{I}\{\xi(\tau) \leq x\} (-X(\tau))^+ - J_0(\tau, x) \quad \text{п.н.,} \quad (47)$$

где $J_0(\tau, x) = \int_0^\tau \mathbb{I}\{\alpha_\tau(s, 0) \leq x, Y_\tau(s) > 0\} dY_\tau(s)$. Согласно определению обратного стохастического интеграла, интеграл $J_0(\tau, x)$ в равенстве (47) можно записать как обратный стохастический интеграл $J(\tau, x)$ по процессу $X(s)$; следовательно $J(\tau, x) = J_0(\tau, x)$ п.н.

З а м е ч а н и я. 1. Справедливо равенство

$$\left(J(\tau, x) - \frac{x}{2}\right) \mathbb{I}\{\xi(\tau) > x\} = 0 \quad \text{п.н.}$$

2. Мы можем получить более общую, чем равенство (46), формулу стохастического исчисления, используя подход, предложенный в следствии 3 к теореме 9.

Умножая тождество (46) на функцию $f(x)$, абсолютная величина которой суммируема, и интегрируя полученное тождество по переменной $x \in [0, +\infty)$, в силу упомянутой выше «стохастической теоремы Фубини» имеем:

$$\frac{1}{2} \int_0^{\xi(\tau)} \int_y^{+\infty} f(x) dx dy = \int_{\xi(\tau)}^{+\infty} f(x) dx (-X(\tau))^+$$

$$\begin{aligned}
& - \int_0^\tau \left[\int_{\xi(\tau) - \alpha(\tau-s, X(\tau))}^{+\infty} f(x) dx \right] \\
& \times \mathbb{I}\{X(\tau-s) > X(\tau)\} * dX(s) \quad \text{п.н.} \quad (48)
\end{aligned}$$

3. Предположим дополнительно, что функция $f(x)$ в соотношении (48) такова, что $f(x) > 0$ при всех x . Тогда предложение 3 позволяет найти локальное время для процесса, определяемого стохастическим интегралом, входящим в равенство (48). Его можно найти, рассмотрев процесс $\eta(s) = g_1(\xi(s)) - g_2(\xi(s))\varphi(X(s))$ с

$$g_1(x) = \frac{1}{2} \int_0^x \int_y^{+\infty} f(z) dz dy, \quad g_2(x) = \int_x^{+\infty} f(y) dy, \quad \varphi(x) = (-x)^+.$$

4. В предположениях, сформулированных в замечании 3, мы можем найти совместное распределение обратного стохастического интеграла, входящего в равенство (48), и исходного процесса $X(s)$.

Действительно, согласно предложению 3, процесс $\eta(s) = g_1(\xi(s)) - g_2(\xi(s))\varphi(X(s))$ с функциями $g_1(\cdot)$, $g_2(\cdot)$ и $\varphi(\cdot)$, определенными в замечании 3, обладает локальным временем $\beta_U(t, y)$. Точнее,

$$\int_0^t \mathbb{I}\{\eta(s) \leq x, X(s) \in U\} ds = \int_{-\infty}^x \beta_U(t, y) dy \quad \text{п.н.}$$

Взяв от обеих частей тождества математическое ожидание и учитывая тот факт (см. предложение 3), что для вычисления $E\beta_U(t, y)$ необходимо знать лишь известное распределение $P\{\alpha(t, u) > x\}$, получим

$$P\{\eta(t) \leq x, X(t) \in U\} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{-\infty}^x E\beta_U(t, y) dy.$$

5. Методика доказательств предложений 6 и 7 позволяет очевидным образом перенести равенства (40) и (41) на процесс $\xi(t)$: с вероятностью 1

$$\begin{aligned}
\Phi(\xi(t)) |X(t)| &= \int_0^t \operatorname{sgn}(X(\tau-s) - X(\tau)) \\
&\times \Phi(\xi(\tau) - \alpha(\tau-s, X(\tau))) * dX(s) + \int_0^{\xi(t)} \Phi(z) dz; \\
\int_0^{\xi(t)} \Phi(z) dz &= - \min_{0 \leq \tau \leq t} \min \left(\int_0^\tau \operatorname{sgn}(X(\tau-s) - X(\tau)) \right. \\
&\times \Phi(\xi(\tau) - \alpha(\tau-s, X(\tau))) * dX(s), 0 \Big).
\end{aligned}$$

Автор глубоко признателен М. Г. Шуру, неоднократные беседы с которым стимулировали работу над статьей.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бородин А. Н.* Броуновское локальное время. — Успехи матем. наук, 1989, т. 44, в. 2, с. 7–48.
2. *Ватанабе С., Икеда Н.* Стохастические дифференциальные уравнения и диффузионные процессы. М.: Наука, 1986, 448 с.
3. *Королюк В. С., Портенко Н. И., Скороход А. В., Турбин А. Ф.* Справочник по теории вероятностей и математической статистике. М.: Наука, 1985, 640 с.
4. *Насыров Ф. С.* Об ортогональном разложении локальных времен. Уфа, 1985, 25 с. Деп. в ВИНТИ 23.05.85, № 3593-85.
5. *Насыров Ф. С.* О локальных временах для функций и случайных процессов. I — Теория вероятн. и ее примен., 1995, в. 40, в. 4, с. 798–812.
6. *Розовский Б. Л.* Эволюционные стохастические системы. М.: Наука, 1983, 208 с.
7. *Barlow M. T.* Continuity of local times for Levy processes. — Z. Wahrscheinlichkeitstheor. verw. Geb., 1985, B. 29, H. 1, S. 23–35.
8. *Berman S. M.* Gaussian sample functions: uniform dimension and Hölder conditions nowhere. — Nagoya Math. J., 1972, v. 46, p. 63–86.
9. *Berman S. M.* Local nondeterminism and local times of Gaussian processes. — Indiana Univ. Math. J., 1973, v. 23, № 1, p. 69–94.
10. *Berman S. M.* Local times of stochastic processes with positive definite bivariate densities. — Stoch. Process. Appl., 1982, v. 12, № 1, p. 1–26.
11. *Berman S. M.* Joint continuity of the local times of Markov processes. — Z. Wahrscheinlichkeitstheor. verw. Geb., 1985, B. 69, H. 1, S. 37–46.
12. *Geman D.* A note on the continuity of local times. — Proc. Amer. Math. Soc., 1976, v. 57, № 2, p. 321–326.
13. *Geman D., Horowitz J.* Occupation densities. — Ann. Probab., 1980, v. 8, № 1, p. 1–67.

Поступила в редакцию
6.XII.1991