Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. В. Павлов, О сохранении некоторых мартингалльных неравенств для процессов более общего вида, *Теория вероятн. и ее примен.*, 1996, том 41, выпуск 2, 300–309

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp2935>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.187.69

26 апреля 2023 г., 14:22:05

© 1996 г.

ПАВЛОВ И. В.*

О СОХРАНЕНИИ НЕКОТОРЫХ
МАРТИНГАЛЬНЫХ НЕРАВЕНСТВ ДЛЯ
ПРОЦЕССОВ БОЛЕЕ ОБЩЕГО ВИДА

В статье дается обобщение некоторых неравенств, справедливых для полумартингалов, на более широкий класс процессов при дополнительных ограничениях на множество останова.

Ключевые слова и фразы: мартингал, полумартингал, марковский момент, марковский момент первого достижения, множество останова.

1. Введение. Предположим, что имеется случайная последовательность $g_1, g_2, \dots, g_n, \dots$, заданная на основном вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, которая является полумартингалом относительно неубывающей системы σ -подалгебр $\mathcal{F}_n \subset \mathcal{F}_{n+1} \subset \mathcal{F}$, $n = 1, 2, \dots$. Пусть τ, ν — некоторые марковские (относительно системы $\mathcal{F}_n$, $n = 1, 2, \dots$) моменты такие, что $P\{\tau \leq \nu\} = 1$. Тогда при соответствующих условиях ограниченности справедливы известные неравенства для полумартингалов вида

$$Eg_1 \leq Eg_\tau \leq Eg_\nu$$

(где E — символ математического ожидания), если g_n — субмартингал, и обратные неравенства, если g_n — супермартингал (см. [1], [2] и др.). Далее вводится более общий класс S -монотонных процессов (см. ниже п. 4), включающий в себя полумартингалы как частный случай, для которого справедливы ослабленные варианты указанных неравенств вида

$$\begin{aligned} Eg_\tau &\geq \min_{n=1, \dots, N} Eg_n, & \text{если } P\{\tau \leq N\} = 1, \\ Eg_\tau &\geq \inf_{n \geq 1} Eg_n, & \text{если } P\{\tau < \infty\} = 1, \end{aligned} \quad (1)$$

при некоторых дополнительных условиях на марковский момент τ . А именно, рассматриваются только марковские моменты «первого достижения» при некоторых ограничениях типа монотонности на границу множества останова (п. 4). Примером S -монотонного процесса, не являющегося полумартингалом, может служить, в частности, стандартное

*МГТУ им. Н. Э. Баумана, кафедра высшей математики, 2-я Бауманская, 5, 107005 Москва, Россия.

выборочное среднее $g_n = (z_1 + z_2 + \dots + z_n)/n$, $n = 1, 2, \dots$ (где $z_1, \dots, z_n, \dots$ — последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин). Указанные неравенства вида (1) позволяют получать полезные оценки и могут применяться в различных приложениях, таких как построение последовательных тестов для проверки гипотез типа рассмотренных в [3]–[6] и др., а также в связанных с ними задачах на построение последовательных доверительных границ и др. Более подробно соответствующие приложения предполагается рассмотреть в последующих публикациях.

2. Основные неравенства. Случай дискретного времени.

Пусть x_n , $n = 1, 2, \dots$, — неоднородный марковский процесс с дискретным временем, принимающий значения из измеримого фазового пространства $(X, \mathfrak{B})$, $\mathcal{F}_n = \sigma(x_1, \dots, x_n)$ — неубывающая система σ -подалгебр, связанная с процессом x_n , и $\pi(n, x, m, \Gamma)$, $\Gamma \in \mathfrak{B}$, — переходная функция процесса, удовлетворяющая обычным условиям регулярности (см., например, [2, с. 595]).

Далее будем рассматривать только марковские (относительно неубывающей системы $\mathcal{F}_n$, $n = 1, 2, \dots$) моменты «первого достижения», т.е. марковские моменты (сокращенно м.м.) вида

$$\tau = \min\{n: x_n \in D_n\}, \quad (2)$$

где $D_n \in \mathfrak{B}$, $n = 1, 2, \dots$, — та или иная заданная система множеств остановки. Если событие $x_n \in D_n$ не наступает ни при каком конечном n , то в (2) полагаем $\tau = \infty$. Класс марковских моментов первого достижения (м.м.п.д.) будем обозначать $\mathfrak{M}_0$, в отличие от класса всех марковских моментов $\mathfrak{M}$.

Пусть для каждого $n \geq 1$ на множестве состояний X процесса задана некоторая измеримая функция $g_n(x)$. Далее будем использовать сокращенные обозначения для случайных величин: $g_n(x_n) = g_n[x_n(\omega)]$, $g_\tau(x_\tau) = g_\tau(x_\tau(\omega))$, или, еще короче, $g_n = g_n(x_n)$, $g_\tau = g_\tau(x_\tau)$ и т.п. Аналогично для интегралов вида $Eg_n = \int_{\Omega} g_n[x_n(\omega)] P(d\omega)$ будем использовать сокращенную запись $\int g_n dP$ и т.п.

Предположим, что для каждого фиксированного момента времени n математическое ожидание случайной величины (с.в.) g_n удовлетворяет неравенству вида $Eg_n \geq (\leq) C$, $n = 1, 2, \dots$, где константа C не зависит от n . Рассмотрим вопрос о том, для каких м.м. $\tau \in \mathfrak{M}_0$ можно утверждать, что $Eg_\tau \geq (\leq) C$.

Всюду далее будем предполагать, что

$$E|g_n| < \infty, \quad n = 1, 2, \dots \quad (3)$$

Пусть $m > n \geq 1$. Рассмотрим условное математическое ожидание $E(g_m | \mathcal{F}_n)$ (существующее и Р-п.в. конечное в силу (3)), для которого имеет место равенство $E(g_m | \mathcal{F}_n) = \varphi_{nm}(x_n)$, (Р-п.в.), где $\varphi_{nm}(x) =$

$\int_X g_m(y) \pi(n, x, m, dy)$ — величина, имеющая смысл «прогноза» на момент m среднего значения с.в. g_m , если в момент n процесс находится в состоянии x .

Введем множества на пространстве состояний X

$$G_{nm}^+ = \{x: \varphi_{nm}(x) \geq g_n(x)\}, \quad G_{nm}^- = \{x: \varphi_{nm}(x) \leq g_n(x)\},$$

имеющие следующий смысл. Если $x_n \in G_{nm}^+$ в момент времени n , то прогнозируемое на момент $m > n$ среднее значение процесса g не меньше, чем уже имеющееся в данный момент. Если $x_n \in G_{nm}^-$, то прогнозируемое значение не больше имеющегося. Обозначим также $G_n^- = \cap_{m>n} G_{nm}^-$, $G_n^+ = \cap_{m>n} G_{nm}^+$ — области соответственно отрицательного и положительного прогноза из момента n на все будущие моменты.

Пусть D_n , $n = 1, 2, \dots$, — последовательность множеств остановки, определяющая м.м.п.д. в (2).

Марковский момент $\tau \in \mathfrak{M}_0$ назовем слабо положительным для процесса g_n , если для любой пары $n < m$ выполняется (с точностью до множеств нулевой меры) одно из двух соотношений включения: либо $D_n \subset G_{nm}^-$, либо $\bar{D}_n \subset G_{nm}^+$, где $\bar{D}_n = X \setminus D_n$ — область продолжения наблюдений для момента n . Класс м.м. τ , слабо положительных для процесса g_n , будем обозначать K_g^+ . Аналогично, м.м. $\tau \in \mathfrak{M}_0$ назовем положительным для g_n , если $\bar{D}_n \subset G_n^+$ для любого $n = 1, 2, \dots$. Класс таких м.м. обозначим $\bar{K}_g^+$, $\bar{K}_g^+ \subset K_g^+$. Ясно, что если g_n — субмартингал, то $\bar{K}_g^+ = K_g^+ = \mathfrak{M}_0$.

Предположим, что $\tau \in \bar{K}_g^+$ и Eg_τ существует. Из определения класса $\bar{K}_g^+$ достаточно очевидно, что в этом случае должно быть, например, (при соответствующих условиях ограниченности)

$$Eg_\tau \geq Eg_1, \quad (4)$$

и, более того, если $(\tau_1, \tau_2) \in \bar{K}_g^+$ и $\tau_1 \leq \tau_2$ (Р-п.в.), то $Eg_{\tau_1} \leq Eg_{\tau_2}$ (см. ниже теорему 4). Однако класс $\bar{K}_g^+$ — слишком узкий. Более интересным в этом смысле является класс K_g^+ , для которого имеет место ослабленный вариант неравенств типа (4). Рассмотрим сначала случай, когда м.м. τ ограничен сверху константой $N < \infty$.

Теорема 1. Если $\tau \in \bar{K}_g^+$ и $P\{\tau \leq N\} = 1$, то

$$Eg_\tau \geq \min_{n=1, \dots, N} Eg_n. \quad (5)$$

Доказательство. В силу (3) $E|g_\tau| \leq E \max_{n=1, \dots, N} |g_n| < \infty$. Имеем $Eg_\tau = \int g_\tau dP = \sum_{n=1}^N \int_{A_n} g_n dP$, где $A_n = \{\omega: \tau(\omega) = n\}$. Так как $A_N = \{\tau = N\} = \{\tau > N-1\} \in \mathcal{F}_{N-1}$, то

$$\int_{A_N} g_N dP = \int_{A_N} E(g_N | \mathcal{F}_{N-1}) dP = \int_{A_N} \varphi_{N-1, N}(x_{N-1}) dP. \quad (6)$$

Таким образом,

$$Eg_{\tau} = \sum_{n=1}^{N-2} \int_{A_n} g_n dP + \int_{A_{N-1}} g_{N-1} dP + \int_{A_N} \varphi_{N-1,N}(x_{N-1}) dP. \quad (7)$$

Поскольку $\tau \in K_g^+$, то выполняется одно из двух условий. Либо $\varphi_{N-1,N}(x) \leq g_{N-1}(x)$ при всех $x \in D_{N-1}$, и в этом случае

$$\varphi_{N-1,N}(x_{N-1}) \leq g_{N-1}(x_{N-1}) \quad (8)$$

всюду на множестве A_{N-1} . Либо $\varphi_{N-1,N}(x) \geq g_{N-1}(x)$ при всех $x \in \bar{D}_{N-1}$, и в этом случае

$$\varphi_{N-1,N}(x_{N-1}) \geq g_{N-1}(x_{N-1}) \quad (9)$$

всюду на множестве A_N . Введем новый м.м. τ_1 с последовательностью множеств остановки D_n^1 , определяемой следующим образом. При $n < N-1$ полагаем по-прежнему $D_n^1 = D_n$. При $n = N-1$ положим $D_{n-1}^1 = \emptyset$, если выполняется условие (8), и $D_{n-1}^1 = X$, если выполняется условие (9). В первом случае

$$\begin{aligned} Eg_{\tau_1} &= \sum_{n=1}^{N-2} \int_{A_n} g_n dP + \int_{A_{N-1}} \varphi_{N-1,N}(x_{N-1}) dP \\ &+ \int_{A_N} \varphi_{N-1,N}(x_{N-1}) dP \leq Eg_{\tau}. \end{aligned}$$

Во втором случае также

$$\begin{aligned} Eg_{\tau_1} &= \sum_{n=1}^{N-2} \int_{A_n} g_n dP + \int_{A_{N-1}} g_{N-1}(x_{N-1}) dP \\ &+ \int_{A_N} g_{N-1}(x_{N-1}) dP \leq Eg_{\tau}. \end{aligned}$$

Далее, производя те же операции, что и на первом шаге, получаем

$$Eg_{\tau_1} = \sum_{n=1}^{N-3} \int_{A_n} g_n dP + \int_{A_{N-2}} g_{N-2}(x_{N-2}) dP + \int_{\tau > N-2} h_{N-2}(x_{N-2}) dP,$$

где $h_{N-2}(x) = \varphi_{N-2,N}(x)$, если на первом шаге выполнялось условие (8), и $h_{N-2}(x) = \varphi_{N-2,N-1}(x)$, если на первом шаге выполнялось условие (9). Из того, что $\tau \in K_g^+$, далее снова вытекает, что $h_{N-2}(x_{N-2}) \leq g_{N-2}(x_{N-2})$ всюду на множестве A_{N-2} , либо $h_{N-2}(x_{N-2}) \geq g_{N-2}(x_{N-2})$ всюду на множестве $\{\tau > N-2\}$. Так же, как на первом шаге, заменяя в первом случае множество остановки D_{N-2} на пустое множество ϕ , а во втором случае на все пространство X и вводя соответствующий этой замене новый м.м. τ_2 , получаем $Eg_{\tau_2} \leq Eg_{\tau_1} \leq Eg_{\tau}$ и т.д. На последнем $(N-1)$ -м шаге этой процедуры имеем $Eg_{\tau_{N-1}} \leq \dots \leq Eg_{\tau_1} \leq Eg_{\tau}$, где

последний м.м. τ_{N-1} является по построению некоторым фиксированным моментом: $\tau_{N-1} \equiv i$, где $1 \leq i \leq N$. Таким образом, $Eg_\tau \geq Eg_i \geq \min_{n=1, \dots, N} Eg_n$.

Обобщение неравенства (5) на случай не обязательно ограниченного, но конечного с вероятностью 1 м.м. может быть получено усечением м.м. константой N и переходом к пределу при $N \rightarrow \infty$ при наличии дополнительных условий ограниченности, обеспечивающих возможность предельного перехода под знаком интеграла. Обозначим $g_n^+ = \max(0, g_n)$, $g_n^- = -\min(0, g_n)$.

Теорема 2. Если 1) $\tau \in K_g^+$, 2) $P\{\tau < \infty\} = 1$, 3) $E \sup_n g_n^+ < \infty$, то

$$Eg_\tau \geq \inf_{n \geq 1} Eg_n. \quad (10)$$

Доказательство. В силу условия 3) математическое ожидание Eg_τ существует. Введем усеченный м.м. $\tau_N = \min(\tau, N)$. Поскольку $P\{\tau < \infty\} = 1$, то $g_{\tau_N} \rightarrow g_\tau$ (П.-п.в.) при $N \rightarrow \infty$. Для каждого конечного N $\tau_N \in K_g^+$, и, следовательно, $Eg_{\tau_N} \geq \min_{n=1, \dots, N} Eg_n \geq \inf_{n \geq 1} Eg_n$, откуда, используя лемму Фату–Лебега и условие ограниченности 3), получаем: $Eg_\tau = E \lim g_{\tau_N} \geq \lim Eg_{\tau_N} \geq \inf_{n \geq 1} Eg_n$ при $N \rightarrow \infty$.

Условие ограниченности сверху 3) не всегда удобно. В некоторых случаях процесс g_n заведомо ограничен снизу, например, неотрицателен. В этих случаях вместо условия 3) могут использоваться другие условия. Обозначим $\Delta_N = \int_{\tau > N} g_n dP = E(g_N, \tau > N)$.

Теорема 3. Если 1) $\tau \in K_g^+$, 2) $P\{\tau < \infty\} = 1$, 3) $g_n \geq 0$, $n = 1, 2, \dots$, 4) $\lim \Delta_N = 0$, то

$$Eg_\tau \geq \inf_{n \geq 1} Eg_n. \quad (11)$$

Доказательство. Для каждого конечного N , обозначая $\tau_N = \min(\tau, N)$, имеем

$$\begin{aligned} Eg_{\tau_N} &= \int_{\tau \leq N} g_{\tau_N} dP + \int_{\tau > N} g_{\tau_N} dP = \int_{\tau \leq N} g_\tau dP + \Delta_N \\ &\geq \min_{n=1, \dots, N} Eg_n \geq \inf_{n \geq 1} Eg_n. \end{aligned} \quad (12)$$

В силу условий 2), 3) имеем: $\lim \int_{\tau \leq N} g_\tau dP = Eg_\tau$ при $N \rightarrow \infty$, откуда после предельного перехода в (12) следует (11).

Условие $\lim \Delta_N = 0$ выполняется, например, если $P\{\tau < \infty\} = 1$ и процесс $g_n(x_n)$ ограничен не обязательно при всех $x \in X$, а лишь в области продолжения наблюдений: $g_n(x) \leq c < \infty$, $x \in \bar{D}_n$, $n = 1, 2, \dots$, так как в этом случае $\Delta_N \leq c P\{\tau > N\} \rightarrow 0$.

Для класса м.м. $\bar{K}_g^+$ могут быть аналогичным образом установлены более сильные неравенства. Например, имеет место следующая приводимая без доказательства

Теорема 4. Если 1) $\tau_1 \in \overline{K}_g^+$, $\tau_2 \in \overline{K}_g^+$, 2) $P\{\tau_1 \leq \tau_2 < \infty\} = 1$, 3) $E \sup_n g_n^+ < \infty$, то

$$E g_{\tau_2} \geq E g_{\tau_1}. \quad (13)$$

Теорема 4 справедлива и для несколько более широкого класса м.м. первого достижения таких, что $\overline{D}_n \subset G_{n,n+1}^+$, $n = 1, 2, \dots$.

Приведенные результаты очевидным образом переформулируются на случай обратных неравенств. Марковский момент первого достижения τ назовем слабо отрицательным для процесса g_n , если для любой пары $m > n$ выполняется одно из двух соотношений включения: либо $D_n \subset G_{nm}^+$, либо $\overline{D}_n \subset G_{nm}^-$. Класс таких м.м. обозначим K_g^- . Марковский момент первого достижения τ назовем отрицательным для g_n , если $\overline{D}_n \subset G_n^-$, $n = 1, 2, \dots$. Соответствующий класс обозначим $\overline{K}_g^-$. Для указанных м.м. теоремы 1–4 остаются справедливыми в прежних формулировках с точностью до замены знаков $+$ на $-$, $\inf$ на $\sup$ и неравенств (5), (10), (11), (13) на обратные.

Если процесс $g_n = g_n(x_n)$ является субмартингалом относительно семейства $\mathcal{F}_n$, то $\overline{K}_g^+ = K_g^+ = \mathcal{M}_0$, т.е. любой м.м. $\tau \in \mathcal{M}_0$ является в этом случае положительным и слабо положительным для g_n . Если g_n — мартингал, то $\overline{K}_g^- = K_g^- = \overline{K}_g^+ = K_g^+ = \mathcal{M}_0$. Приведенные неравенства, тем самым, включают как частный случай аналогичные известные неравенства для полумартингалов и мартингалов (при дополнительном условии, что процесс x_n — марковский и $\tau \in \mathcal{M}_0$).

Основной интерес для рассматриваемых далее приложений представляют слабо положительные (отрицательные) марковские моменты.

3. Случай непрерывного времени. Пусть $(x_t, \mathcal{F}_t)$, $t \in T = (0, \infty)$, — марковский процесс с непрерывным временем, заданный на полном вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ и принимающий значения в фазовом пространстве $(X, \mathfrak{B})$, где X — локально компактное сепарабельное метрическое пространство, $\mathfrak{B}$ есть σ -алгебра его борелевских подмножеств. Неубывающее семейство σ -алгебр $\mathcal{F}_t$ предполагается непрерывным справа, а траектории процесса x_t — непрерывными справа с вероятностью 1. Указанные условия регулярности относятся к числу стандартных. Переходную функцию процесса обозначим через $\pi(t, x, u, \Gamma)$, $t \leq u$, $\Gamma \in \mathfrak{B}$.

Марковский момент первого достижения

$$\tau = \inf \{t > 0: (t, x_t) \in D\} \quad (14)$$

задается множеством остановки $D \subset X \times T$. В (14) полагается $\tau = \infty$, если событие $(t, x_t) \in D$ не наступает ни при каком конечном t . Далее будем предполагать, что множество остановки D — замкнутое или открытое. Это условие является достаточным для того, чтобы определенный в (14) случайный момент был марковским (см. [1, гл. 1]). Через

$D_t = \{x: (t, x) \in D\}$, $\bar{D}_t = \{x: (t, x) \in \bar{D}\}$ будем обозначать сечения множества остановки D и множества продолжения наблюдений $\bar{D} = X \times T \setminus D$ при фиксированном t .

Пусть $g_t(x)$ — заданная на X для каждого t измеримая функция и $g_t = g_t(x_t)$ — соответствующий одномерный случайный процесс. Траектории процесса g_t предполагаются непрерывными справа по t с вероятностью 1. Так же, как выше, введем при $t < u$ функцию

$$\varphi_{tu}(x) = \int_X g_u(y) \pi(t, x, u, dy)$$

и множества $G_{tu}^+ = \{x: \varphi_{tu}(x) \geq g_t(x)\}$, $G_{tu}^- = \{x: \varphi_{tu}(x) \leq g_t(x)\}$, имеющие прежний смысл.

Марковский момент первого достижения τ назовем слабо положительным для процесса g_t , если для любой пары $t < u$ выполняется одно из двух соотношений включения: либо $D_t \subset G_{tu}^-$, либо $\bar{D}_t \subset G_{tu}^+$. Класс таких м.м. по-прежнему обозначим K_g^+ . Приведенные выше для случая дискретного времени неравенства достаточно просто переносятся на непрерывный случай при следующем дополнительном условии. Пусть A_δ — событие, состоящее в том, что $(t, x_t) \in D$ при всех $\tau \leq t < \tau + \delta$ и пусть $A = \cup_{\delta > 0} A_\delta = \lim_{\delta \rightarrow 0} \uparrow A_\delta$. Марковский момент первого достижения τ такой, что $P\{\tau < \infty\} = 1$, назовем δ -регулярным, если $P(A) = 1$, т.е. с вероятностью 1 процесс после попадания в множество остановки остается в нем еще некоторое строго положительное время, или, другими словами, вероятность «касания» множества остановки, не заходя в него, равна нулю. Проверка этого условия во многих случаях является очевидной. Например, оно заведомо выполняется, если множество остановки — поглощающее или открытое. Далее, имеет место, например, следующий аналог теоремы 3 для случая непрерывного времени.

Теорема 5. Если 1) δ -регулярный м.м. $\tau \in K_g^+$, 2) $P\{\tau < \infty\} = 1$, 3) $E \sup_{t > 0} g_t^+ < \infty$, то

$$Eg_\tau \geq \inf_{t > 0} Eg_t. \quad (15)$$

Доказательство. Рассмотрим разбиение временной оси дискретными моментами времени $S_n = \{t_1^n, t_2^n, \dots\}$, где $t_k^n = k/2^n$, $k = 1, 2, \dots$, $n = 1, 2, \dots$, и соответствующий этому разбиению вложенный марковский процесс с дискретным временем (т.е. исходный процесс, рассматриваемый в моменты t_k^n). Пусть $\tau_n = \min\{t: t \in S_n, x_t \in D_t\}$ — соответствующий n -му разбиению м.м. В используемых предположениях $\tau_n \downarrow \tau$, $x_{\tau_n} \rightarrow x_\tau$, $g_{\tau_n} \rightarrow g_\tau$ (Р-п.в.) при $n \rightarrow \infty$. Для каждого разбиения по теореме 2 имеем $Eg_{\tau_n} \geq \inf_{t \in S_n} Eg_t \geq \inf_{t > 0} Eg_t$, откуда после предельного перехода при $n \rightarrow \infty$, используя условие 3) и лемму Фату-Лебега, получаем $Eg_\tau \geq \lim Eg_{\tau_n} \geq \inf_{t > 0} Eg_t$.

Условие ограниченности 3) выполняется, если, например, процесс g_t ограничен сверху: $g_t \leq c < \infty$ при всех $t > 0$. Вместо него в теоремах 2, 4, 5 может использоваться условие равномерной интегрируемости

семейства g_t , $t \in T$, и некоторые другие варианты условий ограниченности.

4. S -монотонные процессы. Пусть $(g_t, \mathcal{F}_t, \mathbf{P})$, $t \in T$, — одномерный случайный процесс, $g_t \in \mathbf{R}_1 = (-\infty, \infty)$, где $T = (0, \infty)$, либо $T = 1, 2, \dots$. Через $\operatorname{sgn} z = \begin{cases} 1, & z \geq 0, \\ -1, & z \leq 0, \end{cases}$ обозначим знак величины $z \in \mathbf{R}_1$, предполагая, что $\operatorname{sgn} 0$ определяется неоднозначно и может принимать значения -1 и 1 .

Процесс g_t , $t \in T$, назовем S -монотонным, если для любой пары $t < u$, $(t, u) \in T$, знак разности $g_t - \mathbf{E}(g_u | \mathcal{F}_t)$ зависит только от значения g_t и функция

$$S(g_t) = \operatorname{sgn} [g_t - \mathbf{E}(g_u | \mathcal{F}_t)] \quad (16)$$

монотонна по g_t (P-п.в.). Или, более точно, если существует (с учетом неоднозначности величины $\operatorname{sgn} 0$) такой вариант определения функции (16), что она монотонно не убывает или монотонно не возрастает по g_t . Процесс g_t , $t \in T$, назовем S -возрастающим (S -убывающим), если функция (16) монотонно не убывает (не возрастает) по g_t .

Частным случаем S -монотонных процессов, очевидно, являются мартингалы и полумартингалы. Действительно, нетрудно видеть, что для субмартингала $S(g_t) \equiv -1$, а для супермартингала $S(g_t) \equiv 1$. Таким образом, любой полумартингал одновременно является S -возрастающим и S -убывающим процессом.

З а м е ч а н и е. При однозначном определении величины $\operatorname{sgn} 0$, например, если положить $\operatorname{sgn} 0 = -1$, субмартингал остается, а супермартингал может не быть S -монотонным процессом, так как для субмартингала при этом $S(g_t) \equiv -1$, а для супермартингала не обязательно $S(g_t) \equiv 1$. Использование в определении неоднозначности величины $\operatorname{sgn} 0$ связано с этим чисто формальным затруднением.

Примером S -монотонного процесса, не являющегося полумартингалом, может служить процесс $g_n = (z_1 + \dots + z_n)/n$, $n = 1, 2, \dots$, где $z_1, \dots, z_n, \dots$ — независимые одинаково распределенные с.в. с конечным средним $\mathbf{E}z_1 = a$. В этом случае $g_n - \mathbf{E}(g_m | \mathcal{F}_n) = ((m - n)/m)(g_n - a)$, $n < m$, тем самым, $S(g_n) = -1$ при $g_n < a$ и $S(g_n) = 1$ при $g_n \geq a$, и процесс g_n — S -возрастающий.

Пусть так же, как и выше, имеется одномерный случайный процесс $g_t = g_t(x_t)$, заданный на марковском случайном процессе $(x_t, \mathcal{F}_t, \mathbf{P})$. Предположим, что м.м. τ задается множеством остановки, имеющим вид $D' = \{(x, t): g_t(x) \geq b_t\}$, где $b_t \in [-\infty, \infty]$ — граница множества остановки. Далее будем использовать сокращенные обозначения

$$D' = \{g_t \geq b_t\}. \quad (17)$$

В соответствии с приведенными определениями м.м. τ со множеством остановки вида (17) является слабо положительным (слабо отрицатель-

ным) для g_t , если процесс g_t — S -возрастающий (S -убывающий). Аналогично, м.м. τ , заданный множеством остановки вида

$$D'' = \{g_t \leq b_t\}, \quad (18)$$

является слабо отрицательным (слабо положительным) для g_t , если процесс g_t — S -возрастающий (S -убывающий). При этом несущественно, строгие или нестрогие неравенства используются в (17), (18).

В соответствии с пп. 2, 3 для S -монотонных процессов и марковских моментов со множествами остановки вида D' , D'' имеют место ослабленные варианты известных неравенств для полумартингалов. Так, для S -возрастающего процесса и м.м., заданного множеством остановки вида D' , при соответствующих условиях регулярности и ограниченности

$$Eg_\tau \geq \inf_{t \in T} Eg_t. \quad (19)$$

Для S -убывающего процесса

$$Eg_\tau \leq \sup_{t \in T} Eg_t. \quad (20)$$

Для м.м. со множеством остановки вида D'' в (19), (20) имеют место обратные неравенства.

Отметим здесь обобщение одного известного неравенства для полумартингалов, сразу вытекающее из предыдущего. Пусть, например, T — конечное множество: $T = 1, 2, \dots, N$, g_t — неотрицательный S -убывающий процесс, и множество остановки для м.м. τ имеет вид $D' = \{g_t \geq b\}$, где уровень $b > 0$ не зависит от t . Полагая $\tau_N = \min(\tau, N)$, используя неравенство Чебышева и теорему 1 (точнее, ее аналог для слабо отрицательных м.м.), получаем

$$P\left\{\max_{t=1, \dots, N} g_t \geq b\right\} = P\{g_{\tau_N} \geq b\} \leq \frac{Eg_{\tau_N}}{b} \leq \frac{1}{b} \max_{t=1, \dots, N} Eg_t,$$

что дает обобщение неравенства Дуба–Колмогорова для полумартингалов (см., например, [1], [2]) на случай S -убывающего процесса.

В некоторых случаях S -монотонный процесс может быть представлен в виде суммы субмартингала и супермартингала. Скажем, что S -возрастающий (S -убывающий) процесс g_t имеет центр a_t в момент t , если существует такая не зависящая от u константа $-\infty < a_t < \infty$, не обязательно единственная, что для любого $u > t$, $u \in T$ справедливо неравенство $g_t \leq (\geq) E(g_u | \mathcal{F}_t)$ при $g_t < a_t$ и $g_t \geq (\leq) E(g_u | \mathcal{F}_t)$ при $g_t > a_t$. S -монотонный процесс назовем процессом с одним центром, если для каждого t существует центр a_t такой, что $a_t \equiv a$, $t \in T$. Примером может служить указанный выше процесс $\tilde{g}_n = (z_1 + \dots + z_n)/n$ — выборочное среднее.

Пусть g_t есть S -убывающий процесс с одним центром a . Нетрудно убедиться, что тогда каждый из процессов $(g_t - a)^+$, $(g_t - a)^-$ явля-

ется субмартингалом. Из равенства $g_t = a + (g_t - a)^+ - (g_t - a)^-$ вытекает, тем самым, что S -убывающий процесс с одним центром может быть представлен в виде суммы субмартингала и супермартингала. Для S -возрастающего процесса такое представление, по-видимому, не всегда возможно. Заметим, что если S -возрастающие процессы, не являющиеся полумартингалами, встречаются довольно часто, то значительно труднее привести содержательный пример S -убывающего процесса, не являющегося полумартингалом.

Наряду с данным выше определением S -монотонных процессов будем использовать еще одно. Пусть z_t — еще один одномерный процесс, согласованный с семейством σ -алгебр $\mathcal{F}_t$. Процесс g_t назовем S -возрастающим (S -убывающим) по z_t , если для любой пары $u > t$, $(u, t) \in T$, величина $\text{sgn}[g_t - E(g_u | \mathcal{F}_t)]$ зависит только от z_t и существует вариант выбора функции $S(z_t) = \text{sgn}[g_t - E(g_u | \mathcal{F}_t)]$, такой, что она монотонно не убывает (не возрастает) по z_t .

Предположим, что одномерные процессы g_t, z_t определены на марковском процессе $(x_t, \mathcal{F}_t, P)$, т.е. $g_t = g_t(x_t)$, $z_t = z_t(x_t)$, и g_t является S -возрастающим (S -убывающим) по z_t . Неравенство (19) (неравенство (20)) остается при этом справедливым, если множество остановки имеет вид $D' = \{z_t \geq b_t\}$. Если множество остановки имеет вид $D'' = \{z_t \leq b_t\}$, то справедливы обратные неравенства.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ширяев А. Н. Статистический последовательный анализ. М.: Наука, 1976, 271 с.
2. Лозе М. Теория вероятностей. М.: ИЛ, 1962, 711 с.
3. Lorden G. 2-SPRT's and the modified Kiefer-Weiss problem of minimizing an expected sample size. — Ann. Statist., 1976, v. 4, № 2, p. 281–291.
4. Драгалин В. П., Новиков А. А. Асимптотическое решение задачи Кифера-Вайсса для процессов с независимыми приращениями. — Теория вероятн. и ее примен., 1987, т. XXXII, в. 4, с. 679–690.
5. Павлов И. В. Последовательная процедура различения многих сложных гипотез. — Теория вероятн. и ее примен., 1987, т. XXXII, в. 1, с. 149–153.
6. Павлов И. В. Последовательная процедура проверки сложных гипотез с применениями к задаче Кифера-Вайсса. — Теория вероятн. и ее примен., 1990, т. XXXV, в. 2, с. 293–304.

Поступила в редакцию
30.XII.1993