Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

О. И. Шипилов, Эмпирическая функция распределения в эксперименте с биномиальной рандомизацией, *Теория вероятн. и ее примен.*, 1996, том 41, выпуск 2, 310–322

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp2936>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.219.12

26 апреля 2023 г., 12:56:26

© 1996 г.

ШИПИЛОВ О. И.*

**ЭМПИРИЧЕСКАЯ ФУНКЦИЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ
В ЭКСПЕРИМЕНТЕ
С БИНОМИАЛЬНОЙ РАНДОМИЗАЦИЕЙ**

В статье рассматривается эмпирическая функция распределения, порождаемая биномиальным случайным выбором из конечной популяции. Сравнительный биномиально рандомизированный эксперимент представлен как процедура альтернативного биномиального выбора из двух конечных популяций. Вводятся аналоги критериев Колмогорова и Смирнова, основанные на вероятностях, вносимых биномиальным выбором.

Ключевые слова и фразы: эмпирическая функция распределения, биномиальный случайный выбор, конечная популяция, рандомизированный эксперимент, критерии Колмогорова и Смирнова.

1. Введение. Одной из актуальных проблем современной математической статистики является разработка методов, позволяющих оценивать свойства конечной совокупности объектов эксперимента по данным о случайным образом (рандомизированно) отобранной части этих объектов. Например, задача оценивания среднего значения количественной характеристики объектов конечной совокупности по среднему значению этой характеристики (признака) в обследованной части этой конечной совокупности оказывается разрешимой, если отбор части, предназначенной к обследованию, осуществляется в строгом соответствии с выбранной процедурой рандомизации, а экспериментальный материал удовлетворяет некоторым условиям регулярности. При этом статистические выводы могут быть сделаны только на основе вероятностей, вносимых в задачу процедурой рандомизации, без обращения к вероятностным моделям для экспериментального материала, если объем обследуемой совокупности достаточно велик. Преимущества и недостатки такого подхода к анализу данных о конечных совокупностях рассмотрены автором в [8]. Наряду с методами статистики конечных совокупностей, направленными на оценивание среднего, развиваются и методы, предназначенные для оценивания функции распределения конечной совокупности с помощью функции распределения обследованной ее части ([1]–[5]), реализован под-

*Центральная аэрологическая обсерватория, ул. Первомайская, 3, 141700, г. Долгопрудный, Московская область, Россия.

ход с точки зрения статистики конечных совокупностей к оцениванию результатов рандомизированного сравнительного эксперимента ([5]–[8]).

В практике сравнительного рандомизированного эксперимента особое место принадлежит биномиальным планам эксперимента, согласно которым воздействие на некоторый объект назначается или отменяется в соответствии с принятым биномиально распределенной случайной величиной одного из двух значений.

Такие планы эксперимента получили распространение в практике благодаря простоте их реализации и возможности легко управлять объемом эксперимента. Последнее обстоятельство особенно важно при работе с плохо изученным экспериментальным материалом, для которого задача определения объема эксперимента, необходимого для достижения требуемой точности оценок, не обеспечена в должной мере данными предшествующих опытов. В наиболее общем виде биномиальные планы обследований и экспериментов и соответствующие оценки для средних конечных совокупностей рассмотрены А. В. Булинским и А. Н. Колмогоровым в [9], [10].

В предлагаемой работе понятие эмпирической функции распределения для наблюдений за конечной совокупностью в ходе рандомизированного эксперимента, введенное в [4], [5] для процедуры рандомизации, соответствующей случайному выбору без возвращения заданного числа объектов из фиксированной конечной совокупности, переносится на рандомизированные обследования и сравнительные эксперименты с биномиальными планами. Введение этого понятия обосновывается с помощью аналога известной теоремы Гливленко–Кантелли [1]; на основе его разработаны аналоги критерия Колмогорова и двухвыборочного критерия Смирнова, позволяющие делать выводы о функции распределения признака в обследовании и эксперименте с биномиальной рандомизацией.

В работе приняты следующие обозначения: $\mathbf{R}$ — множество всех действительных чисел, $\mathbf{Z}$ — множество всех целых чисел, $\mathbf{Z}_+$ — множество всех положительных целых чисел; для $z \in \mathbf{R}$ через $[z]$ обозначена меньшая часть z : $[z] = \max_{y \in \mathbf{Z}} \{y: y \leq z\}$. Обозначим $A = \{a_1, a_2, \dots\}$ фиксированную последовательность действительных чисел $a_k \in \mathbf{R}$, $k \in \mathbf{Z}_+$, а $B = \{b_1, b_2, \dots\}$ — аналогичным образом введенную последовательность действительных чисел b_k , которые могут быть не равны a_k . Пусть $n \in \mathbf{Z}_+$, символом N_n обозначим множество $\{1, 2, \dots, n\}$. В дальнейшем, при отсутствии специальных указаний, будем считать, что значения всех индексов принадлежат N_n , а знак $\sum$ без указания множества индексов, по которому проводится суммирование, будет обозначать суммирование по N_n . Биномиальным планом эксперимента ϵ будем называть последовательность независимых в совокупности биномиальных случайных величин ϵ_k , $k \in \mathbf{Z}_+$, принимающих значения 1 и 0 с вероятностью, соответственно, p_k и $q_k = 1 - p_k$. Обозначение реализации случайной величины будем, когда это необходимо, отличать штрихом от обозначения

этой случайной величины. Конечную последовательность, образованную первыми n членами A (с сохранением их порядка в A), обозначим A_n , аналогичным образом определим $B_n = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$. Пусть $\theta(x)$ — ступенчатая функция аргумента $x \in \mathbb{R}$: $\theta(x) = 1$ при $x \geq 0$, $\theta(x) = 0$ при $x < 0$. Величины p_k будем полагать удовлетворяющими условию отделимости:

$$0 < p_0 \leq p_k \leq p_1 < 1, \quad k \in \mathbb{Z}_+. \quad (1)$$

2. Эмпирические функции распределения. Пусть k -му объекту совокупности из n объектов соответствует значение $b_k \in \mathbb{R}$ исследуемой количественной характеристики (признака). Введем, следуя [4], [5], функцию распределения F_n множества значений признака B_n в совокупности из n объектов:

$$F_n(x) = \frac{1}{n} \sum \theta(x - b_k). \quad (2)$$

Пусть обследование совокупности B ведется согласно рандомизированному биномиальному плану ε , то есть для k -го объекта величина b_k измеряется и становится известной в том случае, если случайная величина ε_k приняла значение 1. В [9] предложены оценки для сумм $\sum b_k$ по измеренным согласно плану ε частям этих сумм:

$$\hat{Z}_0 = \sum \frac{\varepsilon_k}{p_k} b_k, \quad \hat{Z}_1 = n \left(\sum \frac{\varepsilon_k}{p_k} + I_b^n \right)^{-1} \left(\sum \frac{\varepsilon_k}{p_k} b_k \right),$$

где I_b^n — индикатор события $\{\sum \varepsilon'_k = 0\}$. В соответствии с этим можно предложить следующие оценки для $F_n(x)$ через измеряемые согласно плану ε величины b_k :

$$F_n^*(x) = \frac{1}{n} \sum \frac{\varepsilon_k}{p_k} \theta(x - b_k),$$

$$\tilde{F}_n(x) = \left(\sum \frac{\varepsilon_k}{p_k} + I_b^n \right)^{-1} \sum \frac{\varepsilon_k}{p_k} \theta(x - b_k),$$

которые могут быть названы эмпирическими функциями распределения, причем $\tilde{F}_n$ будем называть нормированной эмпирической функцией распределения, а F_n^* — несмещенной эмпирической функцией распределения (нетрудно убедиться, что $E[F_n^*(x)] = F_n(x)$). Отметим, что смещение $\tilde{F}_n$ при $p_k = p$ не превосходит $(1 - p)^n$.

С помощью критерия сходимости Колмогорова [11, с. 377] легко установить, что при $n \rightarrow \infty$ с вероятностью единица при любом $x \in \mathbb{R}$ выполняется соотношение $[F_n^*(x) - F_n(x)] \rightarrow 0$. Однако имеет место и более сильный результат, утверждающий равномерную сильную состоятельность предложенных оценок и, таким образом, дающий основание называть $\tilde{F}_n$ и F_n^* эмпирическими функциями распределения.

Теорема 1. При $n \rightarrow \infty$ и выполнении условия отделимости (1) с вероятностью 1 выполняются соотношения

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |F_n^*(x) - F_n(x)| \rightarrow 0, \quad (3)$$

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |\tilde{F}_n(x) - F_n(x)| \rightarrow 0. \quad (4)$$

Доказательство теоремы содержится в работе автора [1], в которой соотношение (3) получено как промежуточный результат при выводе (4).

3. Критерий Колмогорова при биномиальном выборе. Согласно теореме 1, как $F_n^*(x)$, так и $\tilde{F}_n(x)$ можно использовать в качестве оценок для функции распределения $F_n(x)$. Вопрос о том, какой из этих оценок следует отдать предпочтение, требует изучения распределений этих оценок, которое приводится ниже в предположении, что $p_k = p$, $0 < p < 1$. Анализ этих распределений в значительной степени облегчается тем обстоятельством, что при $p_k = \text{const}$, как нетрудно показать, при $t > 0$ выполняется неравенство

$$\begin{aligned} & \mathbf{P} \left\{ \sup_{x \in \mathbb{R}} |F_n^*(x) - F_n(x)| \leq t \right\} \\ & \geq \mathbf{P} \left\{ \max_{i \in N_n} \left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^i \left(\frac{\varepsilon_k}{p} - 1 \right) \right| < t \right\} = D_n^p(t) \end{aligned} \quad (5)$$

(равенство в правой части — определение).

Аналогичное неравенство, в правой части которого стоит функция t , не зависящая от B_n , имеет место и для $\mathbf{P}\{\sup_{x \in \mathbb{R}} |\tilde{F}_n(x) - F_n(x)| < t\}$. Для того, чтобы показать это, расположим величины $b_k \in B_n$ в ряд по неубыванию. Для совпадающих между собой значений $b_i, b_k, \dots, b_l$ сохраним для определенности взаимный порядок их расположения в B_n . Образованную таким способом последовательность обозначим $\hat{B}_n$. Подмножество $\hat{B}_n$, состоящее из первых j его членов, обозначим $\hat{B}_n(j)$. Нетрудно видеть, что

$$\begin{aligned} & \sup_{x \in \mathbb{R}} |\tilde{F}_n(x) - F_n(x)| \\ & = \max_{b_j \in B_n} \left| \left(\sum \frac{\varepsilon_k}{p} + I_b^n \right)^{-1} \left(\sum \frac{\varepsilon_k}{p} \theta(b_j - b_k) \right) - \frac{1}{n} \sum \theta(b_j - b_k) \right| \\ & \leq \max_{j \in N_n} \left| \left(\sum \frac{\varepsilon_k}{p} + I_b^n \right)^{-1} \left(\sum \frac{\varepsilon_k}{p} I[b_k \in \hat{B}_n(j)] \right) - \frac{1}{n} \sum I[b_k \in \hat{B}_n(j)] \right| \\ & = \left(\sum \frac{\varepsilon_k}{p} + I_b^n \right)^{-1} \\ & \quad \times \max_{j \in N_n} \left| \left(\sum \frac{\varepsilon_k}{p} - 1 \right) I[b_k \in \hat{B}_n(j)] - \frac{j}{n} \sum \left(\frac{\varepsilon_k}{p} - 1 \right) \right|. \end{aligned} \quad (6)$$

Здесь $I[b_k \in \hat{B}_n(j)] = 1$, если $b_k \in \hat{B}_n(j)$, $I[b_k \in \hat{B}_n(j)] = 0$ в противоположном случае.

Переименовав в правой части (6) независимые одинаково распределенные величины ε_k в порядке неубывания соответствующих b_k (что не изменит значения вычисляемых вероятностей), из (6) получаем при $t > 0$:

$$\mathbf{P}\left\{\sup_{x \in \mathbf{R}} |\tilde{F}_n(x) - F_n(x)| < t\right\} \geq \mathbf{P}\left\{\max_{j \in N_n} \left|\sum_{k=1}^j \left(\frac{\varepsilon_k}{p} - 1\right) - \frac{j}{n} \sum \left(\frac{\varepsilon_k}{p} - 1\right)\right| < t \left(\sum \frac{\varepsilon_k}{p} + I_b^n\right)\right\} = d_n^p(t) \quad (7)$$

(равенство в правой части — определение), причем правая часть этого неравенства не зависит от выбора B_n и, вследствие этого, от вида $F_n(x)$. Заметим, что неравенства (5), (7) обращаются в равенства в том случае, когда все $b_k \in B_n$ не равны между собой.

Распределения $F_n^*(x)$ и $\tilde{F}_n(x)$ при больших n в значительной степени определяются теоремами 2 и 3.

Теорема 2. При $0 < p < 1$, $n \rightarrow \infty$, $t > 0$ выполняется соотношение

$$D_n^p\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) \rightarrow L\left(t\sqrt{\frac{p}{q}}\right),$$

где

$$L(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} \exp\left\{-\frac{\pi^2}{8}(2k+1)\frac{1}{x^2}\right\} \quad (8)$$

есть функция Реньи.

Доказательство. Согласно известной теореме о случайном блуждании [12, с. 314], при $x > 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}\left\{\max_{j \in N_n} \left|\sum_{k=1}^j (\varepsilon_k - p)\right| \leq x\sqrt{pqn}\right\} = L(x). \quad (9)$$

Нетрудно показать, что ряд (8) равномерно сходится в любом интервале $[a, b]$ ($a > 0$). Отсюда следует непрерывность $L(x)$ в этом интервале; положив $x = t\sqrt{p/q}$ и заменяя в (9) по непрерывности неравенство на строгое неравенство, получаем утверждение теоремы 2.

Теорема 3. При $0 < p < 1$, $n \rightarrow \infty$, $t > 0$ выполняется соотношение

$$d_n^p\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) \rightarrow K\left(t\sqrt{\frac{p}{q}}\right),$$

где $K(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k e^{-2k^2 x^2}$ при $x > 0$ есть функция Колмогорова.

Доказательство. Выражение (7) для d_n^p с помощью условных вероятностей может быть при $t > 0$ записано в виде

$$d_n^p\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) = q^n \left[1 - \theta\left(1 - \frac{t}{\sqrt{n}}\right) \right] + p^n + \sum_{m=1}^{n-1} P_n(m) \mathbf{P}_m \left\{ \max_{j \in N_n} \left| \sum_{k=1}^j \left(\varepsilon_k - \frac{m}{n} \right) \right| < t \frac{m}{\sqrt{n}} \right\}, \quad (10)$$

где

$$m = \sum \varepsilon'_k, \quad P_n(m) = \frac{n!}{m!(n-m)!} p^m q^{n-m},$$

$\mathbf{P}_m(A)$ — вероятность события A при условии $\sum \varepsilon'_k = m$. Заметим, что

$$\mathbf{P}_m \left\{ \max_{j \in N_n} \left| \sum_{k=1}^j \left(\varepsilon_k - \frac{m}{n} \right) \right| < \frac{a}{n} \right\} = \mathbf{P} \left\{ D_{m,n-m} < \frac{a}{m(n-m)} \right\}, \quad (11)$$

где $D_{m,n-m}$ — классическая двухвыборочная статистика Смирнова [13, с. 349], для которой известны как точное распределение, так и асимптотические разложения (см., например, [14] и имеющиеся там дальнейшие ссылки). Таким образом, $d_n^p(t)$ определяется распределением двухвыборочных статистик Смирнова.

Введем обозначение

$$\begin{aligned} \varphi_n^m(t) &= \mathbf{P}_m \left\{ \max_{j \in N_n} \left| \sum_{k=1}^j \left(\varepsilon_k - \frac{m}{n} \right) \right| < \frac{tm}{\sqrt{n}} \right\} \\ &= \mathbf{P} \left\{ \sqrt{\frac{m(n-m)}{n}} D_{m,n-m} < t \sqrt{\frac{m}{n-m}} \right\}. \end{aligned}$$

Известно (см., [14, с. 181]), что при $x > 0$, $\min(m, n-m) \rightarrow \infty$ выполняется соотношение

$$\mathbf{P} \left\{ \sqrt{\frac{m(n-m)}{n}} D_{m,n-m} < x \right\} \rightarrow K(x).$$

Отсюда следует, что при $m \in s_n(\lambda)$, где $0 < \lambda < \frac{1}{2}$,

$$s_n(\lambda) = \left\{ m: \lambda \leq \min \left(\frac{m}{n}, \frac{n-m}{n} \right) \right\},$$

соотношение

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P} \left\{ \sqrt{\frac{m(n-m)}{n}} D_{m,n-m} < x \right\} = K(x) \quad (12)$$

будет выполняться равномерно по $m \in s_n(\lambda)$ при $x > 0$.

Поскольку $K(x)$ при $x > 0$ является (как нетрудно показать) непрерывной неубывающей функцией и $\lim_{x \rightarrow \infty} K(x) = 1$, продолжая по непрерывности $K(x)$ равенством $K(x) = 0$ при $x \leq 0$, получаем функцию распределения $K(x)$, определенную на $\mathbf{R}$. Отсюда, воспроизводя почти дословно доказательство теоремы Поля [15, с. 52], можно показать, что сходимость в (12) равномерна не только по $m \in s_n(\lambda)$, но и по $\mathbf{R}$. Вследствие этого для каждого $\delta > 0$ найдется $n_1 \in \mathbf{Z}_+$ такое, что для всех $n > n_1$, $m \in s_n(\lambda)$, $t \in \mathbf{R}$ будут выполняться неравенства

$$-\delta < \varphi_n^m(t) - K\left(t\sqrt{\frac{m}{n-m}}\right) < \delta$$

и вытекающее из них неравенство

$$-\delta < S_n^p(t) < \delta,$$

где $S_n^p(t) = \sum_{m \in s_n(\lambda)} P_n(m) (\varphi_n^m(t) - K(t\sqrt{m/(n-m)}))$.

Таким образом, $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n^p(t) = 0$.

Выберем $\lambda \in (0, \frac{1}{2})$ таким образом, что $\lambda < \min(p, q = 1 - p)$, и рассмотрим величину

$$R_n^p(t) = T_n^p(t) - S_n^p(t),$$

где

$$T_n^p(t) = \sum_{m=1}^{n-1} P_n(m) \varphi_n^m(t) - \sum_{m=0}^n K\left(t\sqrt{\frac{m}{n-m}}\right) P_n(m).$$

Нетрудно видеть, что

$$|R_n^p(t)| \leq 2 \sum_{\{m: m/n < \lambda\}} P_n(m) + 2 \sum_{\{m: (n-m)/n < \lambda\}} P_n(m).$$

Согласно закону больших чисел,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n^p(t) = 0.$$

Поскольку $T_n^p(t) = S_n^p(t) + R_n^p(t)$, отсюда следует, что $\lim_{n \rightarrow \infty} T_n^p(t) = 0$.

Заметим, что $P_n(m) K(t\sqrt{(m/n)(1-m/n)^{-1}})$ образуют последовательность полиномов Бернштейна для непрерывной при $x \in [0, 1]$, $t \geq 0$ функции $K(t\sqrt{x/(1-x)})$.

Согласно известному доказательству, данному С. Н. Бернштейном для теоремы Вейерштрасса (см., например, [11, с. 66]), отсюда следует, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{m=0}^n P_n(m) K(t\sqrt{m/(n-m)}) = K(t\sqrt{p/q})$.

Поскольку $\lim_{n \rightarrow \infty} T_n^p(t) = 0$, а $T_n^p(t)$ отличается от $d_n^p(t/\sqrt{n}) - K(t\sqrt{p/q})$ лишь на величину

$$q^n \left[1 - \theta \left(1 - \frac{t}{\sqrt{n}} \right) \right] + p^n - \left[K\left(t\sqrt{\frac{p}{q}}\right) - \sum_{m=0}^n P_n(m) K\left(t\sqrt{\frac{m}{n-m}}\right) \right],$$

стремящуюся к нулю при $n \rightarrow \infty$, отсюда следует, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[d_n^p \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right) - K \left(t \sqrt{\frac{p}{q}} \right) \right] = 0.$$

Теорема доказана.

Для сравнения качества оценок $F_n^*(x)$ и $\tilde{F}_n(x)$ нам потребуется следующий результат.

Лемма. $L(x) < K(x)$ при $x > 0$.

Доказательство. Поскольку при $x > 0$ ряд в правой части (8) есть абсолютно сходящийся ряд с убывающими по абсолютной величине членами, при $x > 0$ выполняется неравенство

$$L(x) < \frac{4}{\pi} \exp \left\{ -\frac{\pi^2}{8x^2} \right\}.$$

Наряду с этим, из выражения для $K(x)$, получаемого с помощью преобразования Пуассона [16]:

$$K(x) = \frac{\sqrt{2\pi}}{x} \sum_{k=0}^{\infty} \exp \left\{ -\frac{\pi^2}{8x^2} (2k+1)^2 \right\},$$

выводим, что

$$K(x) > \frac{\sqrt{2\pi}}{x} \exp \left\{ -\frac{\pi^2}{8x^2} \right\}.$$

Отсюда следует, что при $x \in (0, x_1)$, где $x_1 = \pi\sqrt{2\pi}/4$, выполняется неравенство

$$K(x) > L(x).$$

Альтернативное выражение для $L(x)$ при $x > 0$ [17, с. 406] можно представить в виде ряда

$$L(x) = 1 + \frac{4}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \int_{(2k-1)x}^{\infty} e^{-t^2/2} dt. \quad (13)$$

С помощью известного неравенства [18, с. 121]

$$\frac{1}{x + \sqrt{x^2 + 2}} < e^{x^2} \int_x^{\infty} e^{-t^2/2} dt \leq \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + 4/\pi}}, \quad (14)$$

выполняющегося при $x > 0$, нетрудно показать, что ряд (13) абсолютно сходится, а поскольку его члены монотонно убывают по абсолютной величине, при $x > 0$ выполняется неравенство

$$L(x) < 1 - \frac{4}{\sqrt{2\pi}} \left(\int_x^{\infty} e^{-t^2/2} dt - \int_{3x}^{\infty} e^{-t^2/2} dt \right).$$

Применяя опять (14), устанавливаем, что при $x > 0$

$$L(x) < 1 - \frac{4}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{-x^2/2}}{x + \sqrt{x^2 + 4}} + \frac{4\sqrt{2}}{\pi} \frac{e^{-9x^2/2}}{3x + \sqrt{9x^2 + 8\pi^{-1}}}.$$

Из исходного выражения для $K(x)$ имеем

$$K(x) > 1 - 2e^{-x^2/2}.$$

Для доказательства утверждения леммы нам осталось показать, что при $x > x_1$

$$1 - 2e^{-x^2/2} > 1 - \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{e^{-x^2/2}}{x + \sqrt{x^2 + 4}} - \frac{e^{-9x^2/2}}{3x + \sqrt{9x^2 + 8\pi^{-1}}} \right),$$

а это неравенство, как можно показать, следует из легко устанавливаемого при $x > x_1$ неравенства

$$\frac{1}{x+1} > \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-x^2/2} + e^{-4x^2}.$$

Лемма доказана.

На основании теорем 2 и 3 для функции распределения можно построить доверительные интервалы с заданным асимптотическим доверительным уровнем $1 - \alpha$. Пусть $a_\alpha(p)$, $b_\alpha(p)$ — решения уравнений

$$K\left(a_\alpha(p)\sqrt{\frac{p}{q}}\right) = 1 - \alpha, \quad L\left(b_\alpha(p)\sqrt{\frac{p}{q}}\right) = 1 - \alpha.$$

Тогда при $0 < \alpha < 1$, достаточно большом n и $b_i \neq b_j$ ($i \neq j$) будут выполняться приближенно равенства

$$P\left\{\sup_{x \in R} |F_n^*(x) - F_n(x)| < \frac{b_\alpha(p)}{\sqrt{n}}\right\} \simeq 1 - \alpha, \quad (15)$$

$$P\left\{\sup_{x \in R} |\tilde{F}_n(x) - F_n(x)| < \frac{a_\alpha(p)}{\sqrt{n}}\right\} \simeq 1 - \alpha. \quad (16)$$

Нетрудно показать, что $L(x)$ и $K(x)$ — неубывающие функции. Отсюда, согласно лемме 2, следует, что $b_\alpha(p) > a_\alpha(p)$, то есть оценка F_n^* при заданном доверительном уровне дает для F_n более широкие доверительные интервалы, чем оценка $\tilde{F}_n$. Из таблиц для $K(x)$ и $L(x)$ [19, с. 408, 410] получаем при $p = \frac{1}{2}$, $\alpha = 0,05$: $b_{0,05}(\frac{1}{2}) = 2,24$, $a_{0,05}(\frac{1}{2}) = 1,36$. Таким образом, объем обследуемой совокупности n^* , необходимый для того, чтобы F_n^* оценивала F_n с той же асимптотической точностью, с которой $\tilde{F}_n$ оценивает F_n , должен быть в $(\frac{2,24}{1,36})^2 = 2,7$ раза больше соответствующего объема совокупности $\tilde{n}$. Таков выигрыш от использования нормированной оценки функции распределения вместо несмещенной ее оценки в тех случаях, когда n^* и $\tilde{n}$ достаточно велики для того, чтобы

для оценок можно было использовать предельные теоремы с удовлетворительной точностью. В связи с этим обстоятельством в дальнейшем изложении несмещенная оценка функции распределения не рассматривается. Отметим, что если допустить наличие в данных совпадений, то есть возможность равенства $b_i = b_j$ при $i \neq j$, то доверительные интервалы, построенные согласно (15), (16), будут накрывать функцию распределения F_n с асимптотической доверительной вероятностью, не меньшей, чем $1 - \alpha$, обеспечивая тем самым оценку F_n с «запасом». Естественной критической областью объема, не большего, чем α , для проверки нулевой гипотезы, утверждающей, что функция распределения B_n есть $F_n(x)$, с помощью статистики $\sqrt{n} \sup_{x \in \mathbf{R}} |\tilde{F}_n(x) - F_n(x)|$ будет $[z_n^p(\alpha), \infty)$, где при заданном n число $z_n^p(\alpha)$ есть наименьшее число z , при котором $d_n^p(z/\sqrt{n}) \geq 1 - \alpha$. Согласно теореме 3 отсюда следует, что будет выполняться соотношение

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n^p(\alpha) = a_\alpha(p).$$

Из теоремы 1 заключаем, что критерий, основанный на статистике $\sqrt{n} \sup_{x \in \mathbf{R}} |\tilde{F}_n(x) - F_n(x)|$ и критической области $[z_n^p(\alpha), \infty)$, будет сильно состоятелен против последовательности альтернатив, задаваемой функциями распределения F_n^1 , характеризуемой свойством $\sup_{x \in \mathbf{R}} |F(x) - F_n^1(x)| > \delta > 0$ при $n \in \mathbf{Z}_+$. Это свойство предложенного критерия позволяет назвать его аналогом критерия Колмогорова.

4. Сравнительный эксперимент. Аналог двухвыборочного критерия Смирнова. В сравнительном рандомизированном эксперименте проводится сравнение двух последовательностей A и B на основе рандомизированного плана. При биномиальном рандомизированном плане для k -го объекта эксперимента с вероятностью p_k измеряется величина b_k (если $\varepsilon'_k = 1$) или с вероятностью $q_k = 1 - p_k$ измеряется величина a_k (если $\varepsilon'_k = 0$). По измеренным в таком эксперименте n величинам требуется вынести суждение о сходстве или различии последовательностей A_n и B_n . Для последовательности A_n введем функцию распределения $G_n(x) = \sum \theta(x - a_k)$. Оценкой для нее можно взять $(\sum (1 - \varepsilon_k)/q_k + I_a^n)^{-1} \sum ((1 - \varepsilon_k)/q_k) \theta(x - a_k)$, где I_a^n — индикатор события $\{\sum (1 - \varepsilon'_k) = 0\}$. Нетрудно видеть, что теоремы 1, 2, 3 при замене в них $F_n, F_n^*, \tilde{F}_n, \varepsilon_k, p_k, p, b_k$ на, соответственно, $G_n, G_n^*, \tilde{G}_n, 1 - \varepsilon_k, q_k, q, a_k$ дословно переносятся на рандомизированное обследование последовательности A . Рассмотрим возможность установления в рандомизированном сравнительном эксперименте с $p_k = p$ различия между $F_n(x)$ и $G_n(x)$ по данным наблюдений. Для этой цели примем последовательность гипотез H_n : $a_k = b_k$ и рассмотрим при этой последовательности гипотез распределения аналога двухвыборочной статистики Смирнова. Нетруд-

но заметить, что при $a_k = b_k$, $p_k = p$

$$\begin{aligned} P \left\{ \sup_{x \in \mathbb{R}} |\tilde{F}_n(x) - \tilde{G}_n(x)| < t \right\} &\geq q^n [1 - \theta(1-t)] + p^n [1 - \theta(1-t)] \\ &+ \sum_{m=1}^{n-1} P_n(m) P_m \left\{ \max_{j \in N_n} \left| \sum_{k=1}^j \left(\varepsilon_k - \frac{m}{n} \right) \right| < t \frac{m(n-m)}{n} \right\} \end{aligned}$$

(равенство достигается, если $b_i \neq b_j$ ($i \neq j$)). Обозначим правую часть этого неравенства $d_{nn}^p(t)$. Согласно равенству (11), при любом n величина d_{nn}^p может быть вычислена через известные распределения классических двухвыборочных статистик Смирнова $D_{m,n-m}$. Асимптотическое поведение d_{nn}^p определяется следующей теоремой.

Теорема 4. При $0 < p < 1$, $n \rightarrow \infty$, $t > 0$

$$d_{nn}^p(t) \rightarrow K(t\sqrt{pq}).$$

Доказательство. Запишем d_{nn}^p с помощью (11) в виде

$$\begin{aligned} d_{nn}^p \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right) &= q^n \left[1 - \theta \left(1 - \frac{t}{\sqrt{n}} \right) \right] + p^n \left[1 - \theta \left(1 - \frac{t}{\sqrt{n}} \right) \right] \\ &+ \sum_{m=1}^{n-1} P_n(m) P \left\{ \sqrt{\frac{m(n-m)}{n}} D_{m,n-m} < t \sqrt{\frac{m}{n} \left(1 - \frac{m}{n} \right)} \right\}. \end{aligned}$$

Введем обозначения:

$$\begin{aligned} \psi_n^m(t) &= P_m \left\{ \sup_{j \in N_n} \sum_{k=1}^j \left(\varepsilon_k - \frac{m}{n} \right) \left| < \frac{t}{\sqrt{n}} \frac{m(n-m)}{n} \right. \right\} \\ &= P \left\{ \sqrt{\frac{m(n-m)}{n}} D_{m,n-m} < t \sqrt{\frac{m}{n} \left(1 - \frac{m}{n} \right)} \right\} \end{aligned}$$

и

$$C_n^p(t) = \sum_{m \in s_n(\lambda)} P_n(m) \left[\psi_n^m(t) - K \left(t \sqrt{\frac{m}{n} \left(1 - \frac{m}{n} \right)} \right) \right].$$

Здесь, как и ранее, $0 < \lambda < \min(p, q)$, $s_n(\lambda) = \{m: \lambda < \min(m/n, (n-m)/n)\}$.

Из доказательства теоремы 3 следует, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} C_n^p(t) = 0.$$

Рассмотрим величину $r_n^p(t) = \tau_n^p(t) - C_n^p(t)$, где

$$\tau_n^p(t) = \sum_{m=1}^{n-1} P_n(m) \psi_n^m(t) - \sum_{m=0}^n P_n(m) K \left(t \sqrt{\frac{m}{n} \left(1 - \frac{m}{n} \right)} \right).$$

Из очевидного неравенства

$$|r_n^p(t)| \leq 2 \sum_{\{m: m/n < \lambda\}} P_n(m) + 2 \sum_{\{m: (1-m/n) < \lambda\}} P_n(m),$$

согласно закону больших чисел, вытекает соотношение $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n^p(t) = 0$ и, следовательно,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \tau_n^p(t) = 0.$$

Заметим, что при фиксированном $t \geq 0$ величины

$$P_n(m) K \left(t \sqrt{\frac{m}{n} \left(1 - \frac{m}{n} \right)} \right)$$

образуют последовательность полиномов Бернштейна для непрерывной при $x \in [0, 1]$ функции $K(t \sqrt{x(1-x)})$. Поэтому

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{m=0}^n P_n(m) K \left(t \sqrt{\frac{m}{n} \left(1 - \frac{m}{n} \right)} \right) = K(t \sqrt{pq}).$$

Для завершения доказательства теоремы остается заметить, что $\tau_n^p(t)$ отличается от $d_{nn}^p(t/\sqrt{n}) - K(t \sqrt{pq})$ на величину

$$q^n \left[1 - \theta \left(1 - \frac{t}{\sqrt{n}} \right) \right] + p^n \left[1 - \theta \left(1 - \frac{t}{\sqrt{n}} \right) \right] + \left[K(t \sqrt{pq}) - \sum_{m=0}^n P_n(m) K \left(t \sqrt{\frac{m}{n} \left(1 - \frac{m}{n} \right)} \right) \right],$$

которая стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$. Теорема доказана.

Рассмотрим последовательность гипотез H_n , задаваемую равенствами $a_k = b_k$, и последовательность альтернатив K_n , задаваемую неравенствами $\sup_{x \in \mathbf{R}} |F_n(x) - G_n(x)| \geq \Delta > 0$. Определим аналог двухвыборочного критерия Смирнова следующим образом: H_n принимается, если $\sup_{x \in \mathbf{R}} |\tilde{F}_n(x) - \tilde{G}_n(x)| < x_n^p(\alpha)/\sqrt{n}$, H_n отвергается и принимается K_n , если $\sup_{x \in \mathbf{R}} |\tilde{F}_n(x) - \tilde{G}_n(x)| \geq x_n^p(\alpha)/\sqrt{n}$. Здесь $x_n^p(\alpha)$ — наименьшее x , при котором выполняется неравенство $d_{nn}^p(x/\sqrt{n}) \geq 1 - \alpha$ ($1 < \alpha < 1$). Нетрудно видеть, что при H_n вероятность попадания статистики $\sqrt{n} \sup_{x \in \mathbf{R}} |\tilde{F}_n(x) - \tilde{G}_n(x)|$ в определенную таким образом критическую область $[x_n^p(\alpha), \infty)$ будет не больше α . Согласно теореме 4, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n^p(\alpha) = c_\alpha(p)$, где $c_\alpha(p)$ — корень уравнения $K(c_\alpha(p) \sqrt{pq}) = 1 - \alpha$. При альтернативах K_n , согласно теореме 2, вероятность выполнения неравенства $\sup_{x \in \mathbf{R}} |\tilde{F}_n(x) - \tilde{G}_n(x)| > x_n^p(\alpha)/\sqrt{n}$, начиная с некоторого n , становится равной единице. Иначе говоря, данный аналог двухвыборочного критерия Смирнова сильно состоятелен против таких последовательностей альтернатив и способен выявить (при достаточно

большом числе рандомизированных опытов) любое регулярное отличие в функциях распределения количественной характеристики объектов эксперимента, могущее возникнуть в результате воздействия на эти объекты.

Автор благодарит рецензента за внимательное прочтение рукописи и за указание направления, в котором следует развивать полученные результаты.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Шипилов О. И. Аналог теоремы Гливленко–Кантелли при биномиальном выборе из конечной совокупности. — Теория вероятн. и ее примен., 1985, т. XXX, в. 3, с. 574–576.
2. Беляев Ю. К., Рыкова Л. В. Непараметрический критерий Колмогорова для выборок из конечных совокупностей. — Докл. АН СССР, т. 210, № 6, с. 1261–1264.
3. Боровский Ю. В. О критерии согласия Колмогорова для выборок из конечных совокупностей. — Докл. АН СССР, 1975, т. 220, № 6, с. 1251–1254.
4. Rosén B. Limit theorems for sampling from finite populations. — Arkiv för Matem., 1964, B. 5, N. 2–3, S. 383–424.
5. Беляев Ю. К. Вероятностные методы выборочного контроля. М.: Наука, 1975, 406 с.
6. Булинский А. В., Шипилов О. И. О статистике Манна–Уитни в эксперименте с рандомизацией. — Докл. АН СССР, 1983, т. 269, № 4, с. 789–792.
7. Булинский А. В., Колмогоров А. Н. К оценке эффективности воздействия на облака. — Труды Ин-та прикладной геофизики, 1981, в. 46, с. 69–72.
8. Шипилов О. И. Применение статистических методов к оценке эффективности работ по увеличению осадков. — В сб.: Гидрометеорология. Обзорная информация. Сер. метеорология. В. 1. Обнинск: ВНИИГМИ-МЦД, 1983, 24 с.
9. Булинский А. В., Колмогоров А. Н. Линейные выборочные оценки сумм. — Теория вероятн. и ее примен., 1979, т. XXIV, в. 2, с. 241–251.
10. Булинский А. В. Линейные оценки сумм случайных величин. — Докл. АН СССР, 1981, т. 255, № 4, с. 784–789.
11. Ширяев А. Н. Вероятность. М.: Наука, 1980, 574 с.
12. Спичер Ф. Принципы случайного блуждания. М.: Мир, 1969, 472 с.
13. Хеннекен П. Л., Тортра А. Теория вероятностей и некоторые ее приложения. М.: Наука, 1974, 472 с.
14. Королюк В. С., Боровский Ю. В. Аналитические проблемы асимптотики вероятностных распределений. Киев: Наукова думка, 1981, 240 с.
15. Дюге Д. Теоретическая и прикладная статистика. М.: Наука, 1972, 384 с.
16. Смирнов Н. В. Оценка расхождения между эмпирическими кривыми распределения в двух независимых выборках. — Бюлл. МГУ, 1939, т. 2, в. 2, с. 3–14.
17. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. Т. 2. М.: Мир, 1967, 752 с.
18. Справочник по специальным функциям. М.: Наука, 1979, 832 с.
19. Большев Л. Н., Смирнов Н. В. Таблицы математической статистики. М.: ВЦ АН СССР, 1968, 474 с.

Поступила в редакцию
3.XII.1993