Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. П. Маслов, Интегральные уравнения и фазовые переходы в вероятностных играх. Аналогия со статистической физикой, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2003, том 48, выпуск 2, 403–411

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp294>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.219.149

26 апреля 2023 г., 13:50:28

© 2003 г.

МАСЛОВ В. П.*

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И ФАЗОВЫЕ ПЕРЕХОДЫ В ВЕРОЯТНОСТНЫХ ИГРАХ. АНАЛОГИЯ СО СТАТИСТИЧЕСКОЙ ФИЗИКОЙ

Известно, что максимизация информации Кульбака–Лейблера приводит к общим преобразованиям Эшера. Статистикам Бозе–Эйнштейна и Ферми–Дирака в вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ отвечает другая информация, а именно

$$S_B = \int \ln \left(1 + \frac{dP}{dQ} \right) dQ + \int \ln \left(1 + \frac{dQ}{dP} \right) dP$$

— для бозе-статистики и

$$S_F = \int \ln \left(\frac{dP}{dQ} - 1 \right) dQ - \int \ln \left(1 - \frac{dQ}{dP} \right) dP, \quad \frac{dP}{dQ} > 1,$$

— для ферми-статистики. Она приводит к соответствующим этим статистикам преобразованиям мер. При наличии матрицы выплат эти преобразования изменяются согласно приведенным в статье интегральным уравнениям. Приводятся примеры финансовых игр, отвечающих бозе- и ферми-статистикам.

Ключевые слова и фразы: бозе-статистика, ферми-статистика, матрица выплат, преобразование Эшера, энтропия, фазовые переходы, интегральные уравнения, информация Кульбака–Лейблера, термодинамика, статистическая физика, диадические игры.

1. Преобразование вероятностных мер. В предыдущей статье автора [8] рассматривалась задача на экстремум математического ожидания при заданной энтропии. Задача решалась методом неопределенных множителей Лагранжа. В частности, было получено хорошо известное распределение Гиббса для случайной величины X , принимающей значения $x_1, \dots, x_n$:

$$\bar{p}_\alpha^{(\theta)} = \frac{e^{-x_\alpha/\theta}}{\sum_{\beta=1}^N e^{-x_\beta/\theta}}, \quad \beta = 1, \dots, n,$$

в случае, когда вероятности, отвечающие x_α , между собой равны, а x_α несоизмеримы. Здесь θ — температура, играющая роль множителя Лагранжа (см. [8]).

Предположим теперь, что заданы частотные значения вероятностей случайной величины X , т.е. при M испытаниях x_α выпадает g_α раз. Тогда формула Гиббса приобретает вид

$$\bar{p}_\alpha^{(\theta)} = \frac{g_\alpha e^{-x_\alpha/\theta}}{\sum_{\beta=1}^N g_\beta e^{-x_\beta/\theta}} = \frac{p_\alpha e^{-x_\alpha/\theta}}{\sum_{\beta=1}^N p_\beta e^{-x_\beta/\theta}},$$

где $p_\alpha = g_\alpha/M$ — частотная вероятность. Теперь распределение Гиббса можно записать как преобразование вероятностей

$$\bar{P}^{(\theta)} = \frac{e^{-X/\theta}}{\Phi(\theta)} P,$$

где $\Phi(\theta)$ — нормирующий множитель.

Тривиальное обобщение этого преобразования выглядит следующим образом.

* Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, физический факультет, кафедра квантовой статистики, Ленинские горы, 119992 Москва, Россия; e-mail: victor@maslov.msk.su

Пусть X — действительная случайная величина на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

Семейство вероятностных мер $P^{(\theta)}$, $\theta \in \mathbf{R}$, определяемых преобразованием Гиббса, будет иметь вид:

$$\bar{P}^{(\theta)}(d\omega) = \frac{e^{-X(\omega)/\theta}}{\Phi(\theta)} P(d\omega), \quad (1)$$

где $\Phi(\theta)$ — нормирующий множитель. Его существование предполагается.

Это преобразование было введено в финансовой математике в 1935 г. и называется преобразованием Эшера [9].

Пример 1. Пусть λ_n — собственные значения самосопряженного оператора $\hat{H}$ с дискретным спектром в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$, тогда распределение Гиббса равно $\bar{p}^{(\theta)}(\lambda_n) = e^{-\lambda_n/\theta} \sigma(\lambda_n) / \Phi(\theta)$, где $\sigma(\lambda_n)$ — кратность собственного значения λ_n .

Таким образом мы можем сопоставить кратность собственного значения его частотной вероятности. Однако чтобы это сопоставление было точным, нужно, чтобы $\sum_n \sigma(\lambda_n) = M < \infty$, т.е. спектр был конечный. Асимптотика при $M \rightarrow \infty$, $n \rightarrow \infty$, $N \rightarrow \infty$ приводит к (1), а также к (4), (5), (8), (10).

Пример 2. Пусть $\omega = (p, q)$, $x(\omega) = H(p, q)$, где $H(p, q)$ — функция Гамильтона, $H(p, q) \in C^\infty(\mathbf{R}^{2n})$, $p = (p_1, \dots, p_n)$, $q = (q_1, \dots, q_n)$; $P(d\omega) = dp dq$.

Тогда

$$\bar{P}^\theta(d\omega) = \frac{e^{-H(p, q)/\theta}}{\sum} dp dq,$$

где $\sum$ — нормирующий множитель (статистическая сумма).

В физике ([12], см. также [10, с. 26]) известны распределения для бозе- и ферми-газа.

В работах [11], [8] показано, что если G_s — кратности собственных значений одночастичного оператора Гамильтона $\hat{H}$, то

$$\Gamma_B = \prod_{i=1}^n \frac{(G_i + N_i - 1)!}{(G_i - 1)! N_i!}, \quad (2)$$

$$\Gamma_F = \prod_{i=1}^n \frac{G_i!}{N_i! (G_i - N_i)!} \quad (3)$$

равны кратностям собственных значений N -частичного оператора $\sum_{i=1}^N \hat{H}_i$ (см. [8]) на симметрическом (соответственно антисимметрическом) по перестановке частиц подпространстве векторов (функций) Ψ от N частиц, т.е. от N дискретных переменных. В этом случае, если определить частотные вероятности N частиц как N_i/N , то при $M/N \rightarrow \rho > 0$, где $M = \sum G_i$, для $p_i = \lim N_i/N$, $q_i = \lim G_i/M$ мы получим следующее значение удельной энтропии для бозе-статистики:

$$S_B = \frac{1}{N} \ln \Gamma_B \approx \sum_i \left[(p_i + q_i \rho^{-1}) \ln(p_i + q_i \rho^{-1}) - p_i \ln p_i - q_i \rho^{-1} \ln q_i \rho^{-1} \right].$$

Аналогично удельная энтропия ферми-статистики равна

$$S_F = \frac{1}{N} \ln \Gamma_F \approx \sum_i \left[q_i \rho^{-1} \ln q_i \rho^{-1} - p_i \ln p_i - (q_i \rho^{-1} - p_i) \ln(q_i \rho^{-1} - p_i) \right].$$

Более общее определение следующее.

Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ — измеримое пространство с σ -конечной мерой P . Тогда

$$S_B = \int \ln \left(1 + \frac{dP}{dQ} \right) dQ + \int \ln \left(1 + \frac{dQ}{dP} \right) dP \quad (4)$$

— энтропия, отвечающая бозе-статистике,

$$S_F = \int \ln \left(\frac{dP}{dQ} - 1 \right) dQ - \int \ln \left(1 - \frac{dQ}{dP} \right) dP, \quad \frac{dP}{dQ} > 1, \quad (5)$$

— энтропия, отвечающая ферми-статистике, при условии, что интеграл от модулей подынтегральных выражений меньше бесконечности.

Отсюда аналогично [12] получаем

$$\bar{P}_\alpha^{(\theta)} = \frac{1}{e^{X_\alpha/\theta} \Phi(\theta, \rho) - \rho} P_\alpha, \quad (6)$$

где $\Phi(\theta, \rho)$ — нормирующий множитель, для бозе-систем, и

$$\bar{P}_\alpha^{(\theta)} = \frac{1}{e^{X_\alpha/\theta} \Phi(\theta, \rho) + \rho} P_\alpha \quad (7)$$

для ферми-систем, где множитель $\Phi(\theta, \rho)$ также находится из условия нормировки. Его существование также предполагается.

Приведем по аналогии с формулой (1) преобразование вероятностных мер.

Пусть снова X — действительная случайная величина на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

Семейство вероятностных мер $P^{(\theta)}$, $\theta \in \mathbf{R}$, определяемых преобразованием для бозе-статистик, будет иметь вид:

$$\bar{P}^{(\theta)}(d\omega) = \frac{1}{e^{X(\omega)/\theta} \Phi(\theta, \rho) - \rho} P(d\omega). \quad (8)$$

Пример 3. Пусть λ_n — собственные значения самосопряженного оператора $\hat{H}$ с дискретным спектром в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$, тогда распределение Бозе может быть записано следующим образом:

$$\bar{P}^{(\theta)}(\lambda_n) = \frac{\sigma(\lambda_n)}{e^{\lambda_n/\theta} \Phi(\theta, \rho) - \rho}, \quad (9)$$

где $\sigma(\lambda_n)$ — кратность собственного значения λ_n .

Пример 4. Пусть $\omega = (p, q)$, $x = H(p, q)$, $P(d\omega) = dp dq$, $\theta = kT$, где $H(p, q)$ — некоторая функция Гамильтона, $p \in \mathbf{R}^n$, $q \in \mathbf{R}^n$, тогда преобразование (8) приобретет следующий вид:

$$\bar{P}^{(\theta)}(d\omega) = \frac{dp dq}{\exp\{H(p, q)/(kT)\} \Phi(kT, \rho) - \rho}.$$

Аналогично определяется семейство вероятностных мер $\bar{P}^{(\theta)}$, $\theta \in \mathbf{R}$, соответствующее преобразованию (7) для ферми-статистики:

$$\bar{P}^{(\theta)}(d\omega) = \frac{1}{e^{X(\omega)/\theta} \Phi(\theta, \rho) + \rho} P(d\omega). \quad (10)$$

Пример 5. Пусть снова λ_n — собственные значения самосопряженного оператора $\hat{H}$, а $\sigma(\lambda_n)$ — их кратности, тогда распределение Ферми (7) приобретает вид

$$\bar{P}^{(\theta)}(\lambda_n) = \frac{\sigma(\lambda_n)}{e^{\lambda_n/\theta} \Phi(\theta, \rho) + \rho}.$$

Пример 6. Пусть $\omega = (p, q)$, $P(d\omega) = dp dq$, $\theta = kT$, $x = H(p, q)$, где $H(p, q)$ — некоторая функция Гамильтона, $p \in \mathbf{R}^n$, $q \in \mathbf{R}^n$, тогда преобразование (10) приобретает следующий вид:

$$\bar{P}^{(\theta)}(d\omega) = \frac{dp dq}{\exp\{H(p, q)/(kT)\} \Phi(kT, \rho) + \rho}. \quad (11)$$

Отметим, что последние распределения не рассматриваются в классической статистической физике, но они имеют место при переходе из квантовой статистики при $\hbar \rightarrow 0$. Этот факт впервые был замечен автором (см. [13]). Тем не менее физики фактически применяли его для ферми-систем в температурном уравнении Томаса–Ферми [14]. Оно будет приведено ниже.

2. Матрица выплат и интегральные уравнения. Пусть $p_1, \dots, p_n$ — вероятности того, что случайная величина X принимает значения $x_1, \dots, x_n$ соответственно, и пусть $\bar{p}_1, \dots, \bar{p}_n$ — преобразование этих вероятностей, зависящее от $x_1, \dots, x_n$:

$$\bar{p}_1 = f_1(x_1, \dots, x_n, \theta) p_1, \dots, \bar{p}_n = f_n(x_1, \dots, x_n, \theta) p_n. \quad (12)$$

Например, преобразование (12) является преобразованием Гиббса–Эшера, Бозе–Эйнштейна–Эшера или Ферми–Дирака–Эшера.

Введем матрицу выплат $\{a_{ik}\}_{i=1, \dots, n, k=1, \dots, n}$, зависящую от пары компонент вектора $(x_1, \dots, x_n)$: каждой паре x_i, x_k мы ставим в соответствие «выплату» a_{ik} (термин заимствован из теории игр).

Например, в игре в орлянку есть только два значения случайной величины и если дважды выпал орел, то платится налог на выигрыш в размере a_{11} , если дважды выпала решка, то платится дотация a_{22} , если первый раз выпал орел, а второй — решка или наоборот, то платится налог держателю игорного дома — a_{12} .

Если играют N игроков, то все a_{ij} делятся на N , т.е. каждая пара, в которой один получил x_i , а другой — x_j , независимо от того, в каком месте пространства они находятся, выплачивает дополнительный налог a_{ij}/N .

При этом каждый игрок звонит каждому другому, они сравнивают случайные «выигрыши» (у одного, например, x_i , у другого — x_j) и получают компенсацию или выплачивают налог a_{ij} .

Описано, таким образом, парное взаимодействие. В отличие от модели Изинга, где «опрашиваются» только соседи, в этой игре соседей нет. Аналогом является газ частиц, каждая из которых взаимодействует с каждой, — парное взаимодействие. Оно в нашем случае «глобальное» (но малое: $\sim 1/N$) в отличие от модели Изинга, где взаимодействие локально. В физике в этом случае говорят о дальнем действии. Однако в модели газа, состоящего из твердых шариков, взаимодействие короткодействующее, хотя «соседом» может оказаться любая частица, в отличие от «кристаллических», пронумерованных элементов в модели Изинга. Этот термин связан с пространственной переменной, которая в нашей «игровой» модели отсутствует.

Мы определили преобразования Гиббса–Эшера, Бозе–Эйнштейна–Эшера и Ферми–Дирака–Эшера для невзаимодействующих игроков. Теперь определим, как будет меняться распределение, если учитывать малое, $\sim 1/N$, парное взаимодействие или уплату по матрице выплат.

Приведем уравнение, которому будет удовлетворять это преобразование при $N \rightarrow \infty$. Рассмотрим уравнение для $\bar{x}_i$: $\bar{x}_i = x_i + \sum_{j=1}^n a_{ij} f_j(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n, \theta) p_j$, из которого находятся так называемые «одетые» $\bar{x}_i$, и искомое преобразование имеет вид: $\bar{p}_j = f_j(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n, \theta) p_j$. Это преобразование (распределение) может иметь особенности типа фазовых переходов, подобные тем, которые возникают в модели Изинга.

Приведем обобщение этого уравнения на уже рассмотренный случай (1), (6), (9). В этом случае вместо матрицы выплат мы рассмотрим оператор выплат $A(\omega, \bar{\omega})$, где $A(\omega, \bar{\omega})$ — функция, измеримая по паре $\omega, \bar{\omega}$.

Для классической статистики получаем уравнение

$$\bar{X}(\omega) = X(\omega) + \int_{\Omega} A(\omega, \bar{\omega}) \frac{e^{-\bar{X}(\bar{\omega})/\theta}}{\Phi(\theta)} P(d\bar{\omega}).$$

Для объектов, не меняющихся при перестановке (бозе-случай), —

$$\bar{X}(\omega) = X(\omega) + \int_{\Omega} A(\omega, \bar{\omega}) \frac{P(d\bar{\omega})}{e^{\bar{X}(\bar{\omega})/\theta} \Phi(\theta, \rho) - \rho},$$

и для объектов, отвечающих статистике Ферми, —

$$\bar{X}(\omega) = X(\omega) + \int_{\Omega} A(\omega, \bar{\omega}) \frac{P(d\bar{\omega})}{e^{\bar{X}(\bar{\omega})/\theta} \Phi(\theta, \rho) + \rho}.$$

Полученные «одетые» решения $X(\omega)$ подставляются в формулы (1), (6), (9), что дает соответственно распределение для трех статистик.

Пример 7. Уравнение Больцмана–Пуассона–Власова для «одетого» потенциала будет иметь вид (при $\bar{p} = p$):

$$\frac{\bar{p}^2}{2m} + \bar{u}(q) = \frac{p^2}{2m} + u(q) + \int \frac{V(q - q') e^{-(p'^2/(2m) + u(q'))/\theta} dp' dq'}{\int e^{-(p'^2/(2m) + u(q'))/\theta} dp' dq'}.$$

Здесь гамильтониан $H(p, q) = p^2/(2m) + u(q)$, m — масса, а $V(q - q')$ — потенциал взаимодействия между частицами.

Уравнения для «одетых» потенциалов в случае ферми- и бозе-распределений соответственно имеют вид:

$$\bar{u}(q) = u(q) + \int \frac{V(q - q') dp' dq'}{\exp\{\theta^{-1}(|p'|^2/(2m) + \bar{u}(q'))\} \Phi(\theta, \rho) + \rho}$$

(температурное уравнение Томаса–Ферми, [14, с. 339]) и

$$\bar{u}(q) = u(q) + \int \frac{V(q - q') dp' dq'}{\exp\{\theta^{-1}(|p'|^2/(2m) + \bar{u}(q'))\} \Phi(\theta, \rho) - \rho}.$$

Последнее уравнение не было известно в физике. Его впервые получил автор в [15] — для случая $\theta = 0$ и в [7] (формула (6)) — для общего случая. Бифуркация решений приведенных выше интегральных уравнений приводит к фазовым переходам [16]–[18].

3. Точно решаемые примеры вероятностных игр. Сравнение решения уравнения «одетого» гамильтониана с точным решением. Есть различие в определении энтропии в физике, с одной стороны, и в теории информации и финансовой математике — с другой. Они отличаются знаком.

Пример 8. Пусть N игроков играют в орла и решку с банком. Если у них есть возможность перевернуть монету в выгодное для них положение, то они придут к выигрышу, равному $N\alpha$, где α — плата за выпадение одного орла.

В теории вероятностей и моделях рынка [19] есть целый ряд марковских процессов — так называемое глауберово движение, hot-bath — «горячая ванна», Мегаполис и др., когда постепенно мы приходим к распределению Гиббса. В работе [2] (гл. 2, § 2.9) показано, что конечный результат будет один и тот же; значит, огрубляя процесс, зависящий от времени, ограничиваясь простым переворачиванием монеты, мы приходим к тому же результату. Таким образом, данную задачу можно рассматривать как задачу на выигрыш, но с дополнительным налогом, который равен температуре (или волатильности), умноженной на энтропию Шеннона. Это можно интерпретировать как налог на «неточность информации».

Теперь предположим, что каждый играющий связывается по телефону с каждым другим и если у обоих выпала решка, то они получают одинаковую дотацию из банка, равную $2V/N$. Отсюда следует, что всего банк выплачивает

$$\frac{2N_1(N_1 - 1)}{N} \sim 2n^2 N,$$

где $N \gg 1$, $n = N_1/N$, а N_1 — число выпадений решки.

Поэтому общий выигрыш, деленный на αN , будет равен

$$f(n, \theta) = 1 - n + 2Vn^2 - \theta n \ln n - \theta(1 - n) \ln(1 - n). \quad (13)$$

Предположим, что $V = 1$ и результат исходного броска всеми играющими таков, что n меньше того значения $n_0(\theta)$, которое дает минимум для выигрыша (13). Если температура θ меньше некоторой θ_c , а каждый переворот монеты приводит к большему выигрышу, то в результате выигрыш будет равен меньшему из максимальных значений $f(n, \theta)$.

Это значит, что при малом и медленном изменении температуры игроки переворачивают мало монет, а при $\theta > \theta_c$ для того, чтобы выиграть, они должны переворачивать сразу большое количество монет.

Если речь идет не об игре в орла-решку, а о покупке-продаже акций, то такой скачок означает «пробой» по терминологии рынка.

Пример 9. Бозе-статистика. Многогранные кости. Мы приведем здесь пример точно решаемой вероятностной игры, связанной с энтропией бозе-эйнштейновского типа, и покажем на этом примере, что она может решаться с помощью уравнения (11).

Мы рассмотрим следующую игру. Одновременно кидают N одинаковых костей, каждая кость имеет M граней, грани с номером i соответствует число λ_i , $\lambda_i < \lambda_{i+1}$, $\lambda_i < 0$ при $i \leq G_1$, $\lambda_i > 0$ при $i > G_1$. Выигрыш (доход) вычисляется следующим образом. Обозначим через n_i число костей, у которых выпала грань с номером i . Очевидно, что $\sum_{i=1}^M n_i = N$. Пусть $G_1, G_2 > 0$ — целые числа такие, что $G_1 + G_2 = M$. Введем для броска одной кости осредненный проигрыш

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{G_1} \sum_{i=1}^{G_1} \lambda_i$$

и выигрыш

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{G_2} \sum_{i=1}^{G_2} \lambda_{G_1+i},$$

тогда выигрыш для броска N костей задается формулой

$$\mathcal{E} = \varepsilon_1 N_1 + \varepsilon_2 N_2,$$

где N_1, N_2 выражаются следующим образом: $N_1 = \sum_{i=1}^{G_1} n_i$, $N_2 = \sum_{i=1}^{G_2} n_{i+G_1}$. Очевидно, что $N_1 + N_2 = N$. Будем считать, что кости являются неразличимыми. В таком случае число возможных вариантов бросания N костей с выигрышем $\mathcal{E} = \varepsilon_1 N_1 + \varepsilon_2 N_2$ равно

$$\Gamma(N_1, N_2) = \sum_{K_1=0}^N \cdots \sum_{K_M=0}^N \delta_{L_1 N_1} \delta_{L_2 N_2}, \quad (14)$$

где δ_{LN} — символ Кронекера, а L_1, L_2 зависят от $K_1, \dots, K_M$ следующим образом: $L_1 = \sum_{i=1}^{G_1} K_i$, $L_2 = \sum_{i=1}^{G_2} K_{i+G_1}$. Легко убедиться, что (14) может быть записано в виде:

$$\Gamma(N_1, N_2) = \frac{(N_1 + G_1 - 1)!}{N_1! (G_1 - 1)!} \cdot \frac{(N_2 + G_2 - 1)!}{N_2! (G_2 - 1)!}. \quad (15)$$

Введем энтропию, отвечающую выигрышу $\mathcal{E} = \varepsilon_1 N_1 + \varepsilon_2 N_2$, следующим образом:

$$S(N_1, N_2) = \ln \left(\Gamma(N_1, N_2) \right). \quad (16)$$

Кроме того, будем считать, что в игре взимается налог на выигрыш. А именно, у каждой пары выигравших костей — таких костей, у которых выпала грань с номером $i > G_1$, — отнимается величина V/N , $\varepsilon_2^* - \varepsilon_1 < V < 2(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)$. Кроме того, компенсируемый налог равен $\theta S(N_1, N_2)$, где θ — константа. Поскольку таких пар всего $N_2(N_2 - 1)/2$ штук, то окончательный выигрыш (доход) в игре составит

$$\mathcal{E}(N_1, N_2) = \varepsilon_1 N_1 + \varepsilon_2 N_2 - \frac{V N_2 (N_2 - 1)}{2N} - \theta S(N_1, N_2). \quad (17)$$

В отличие от обычных игр на выигрыш, мы рассмотрим игру в поддавки, чтобы оставалась прямая аналогия с физикой. Каждый играющий старается проиграть как можно больше, скажем, если сумма выигрыша вычитается из жалования, которое он получает.

Каждому играющему предоставляется право, увидев ответ, присоединиться к ε_1 или ε_2 по его желанию, т.е. поменять N_1 на $N \pm 1$ и N_2 на $N_2 \pm 1$, выбирая знак $+$ или $-$, так, чтобы выигрыш уменьшился. Нетрудно видеть, что если N_2^0 , при котором достигается $\max \mathcal{E}(N - N_2, N_2)$, не лежит на конце интервала $0 \leq N_2/N \leq 1$, то когда в игре выпало $N_2 < N_2^0$, игроки будут вычитать из N_2 единицу, а когда $N_2 > N_2^0$ — прибавлять. В результате можно прийти к одному из минимумов: глобальному или локальному. Если увеличивать параметр θ , то при некотором θ_0 максимум и локальный минимум сольются и при $\theta > \theta_0$ будет лишь один глобальный минимум. Если

игроки находились на локальном минимуме, то, значит, часть из них должна будет быстро присоединяться к другой группе, чтобы попасть на глобальный минимум.

В нашем случае $h(x) = \lambda(x) + \sum_{x'} V(x, x')$, где $\lambda(x) = \varepsilon_1$ при $1/M \leq x \leq G_1/M$ и $\lambda(x) = \varepsilon_2$ при $G_1 \leq x \leq 1$, $V(x, x') = -V$ при $(G_1+1)/M \leq x \leq 1$ и $(G_1+1)/M \leq x' \leq 1$ и $V(x, x') = 0$ вне этих интервалов.

Уравнение для «одетого» гамильтониана $\tilde{h}(x)$ в данном случае имеет вид:

$$\tilde{h}(x) = \lambda(x) + \frac{1}{N} \sum_{x'=1}^M V(x, x') f(\tilde{h}(x')), \quad (18)$$

где функция $f(h)$, $h \in \mathbf{R}$, имеет вид $f(h) = (\exp\{(h - \mu)/\theta\} - 1)^{-1}$. Здесь θ — множитель, а μ — нормирующий множитель, который находится из условия $N = \sum_{x=1}^M f(\tilde{h}(x))$. Отсюда следует, что решение уравнения (18) имеет вид $\tilde{h}(x) = h_1$ при $1 \leq x \leq G_1/M$, $\tilde{h}(x) = h_2$ при $(G_1+1)/M \leq x \leq M$, где $h_1 = \varepsilon_1$, а h_2 определяется из уравнения

$$h_2 = \varepsilon_2 - \frac{g_2 V}{\rho} f(h_2), \quad g_i = \frac{G_i}{N},$$

здесь $G_2 = M - G_1$. Уравнение (18) для множителя μ примет вид $\rho = g_1 f(h_1) + g_2 f(h_2)$. Мы получим систему уравнений

$$\rho = \frac{g_1}{\exp\{(\varepsilon_1 - \mu)/\theta\} - 1} + \frac{g_2}{\exp\{(h_2 - \mu)/\theta\} - 1}, \quad (19)$$

$$h_2 = \varepsilon_2 - \frac{g_2 V}{\rho} \frac{1}{\exp\{(h_2 - \mu)/\theta\} - 1}. \quad (20)$$

Величины μ и h_2 определяются из уравнений (19), (20). Кроме того, они удовлетворяют условиям $\varepsilon_1 - \mu > 0$, $h_2 - \mu > 0$, а $\varepsilon_1, \varepsilon_2, V, \theta$ удовлетворяют условиям

$$\varepsilon_2 - \varepsilon_1 > 0, \quad \varepsilon_2 - \varepsilon_1 - V < 0, \quad \theta > 0. \quad (21)$$

Выразим множитель μ из уравнения (20): $\mu = h_2 - \theta \ln(1 + g_2 V / \rho (\varepsilon_2 - h_2))$. Введем n_1, n_2 следующим образом:

$$n_1 = \frac{1}{\exp\{(\varepsilon_1 - \mu)/\theta\} - 1}, \quad n_2 = \frac{1}{\exp\{(h_2 - \mu)/\theta\} - 1}.$$

Из (21) следует, что $n_1 > 0$, $n_2 > 0$.

Уравнения (19), (20) соответственно примут вид:

$$n_1 = \frac{\rho - g_2 n_2}{g_1}, \quad h_2 = \varepsilon_2 - \frac{g_2 V}{\rho} n_2. \quad (22)$$

Кроме того,

$$\mu = \varepsilon_1 + \theta \ln \left(\frac{n_1}{1 + n_1} \right), \quad \mu = h_2 + \theta \ln \left(\frac{n_2}{1 + n_2} \right). \quad (23)$$

Приравняв правые части уравнений (23) и подставляя выражения (22), получим следующее уравнение для $n = g_2 n_2 / \rho$, $\varepsilon = \varepsilon_2 - \varepsilon_1$:

$$\varepsilon - Vn + \theta \ln \left(\frac{n}{g_2 + n} \cdot \frac{g_1 + 1 - n}{1 - n} \right) = 0.$$

Если в (17) перейти к пределу при $N \rightarrow \infty$, $N/M \rightarrow \rho$ с помощью формулы Стирлинга, то, полагая $N_1/N \rightarrow n_1$, $N_2/N \rightarrow n_2$ и приравняв производную по n_2 ($n_1 = 1 - n_2$) к нулю, получим второе уравнение (22).

Пример 10. Ферми-статистика. Размещение по очередям. Пример взят из «Двенадцати стульев». Альяхен послал опекаемых им старушек в очереди за сахаром, который выдавали по $\frac{1}{2}$ килограмма на человека, чтобы потом продать сахар по спекулятивной цене. Пусть имеются две очереди: в одной продукт дает после продажи «навар» ε_1 , а в другой — ε_2 , причем $\varepsilon_2 > \varepsilon_1$, но чтобы попасть во вторую

очередь, взимается взятка с каждой пары старушек, равная V/N , где N — число старушек. Пусть одна очередь длины G_1 , а вторая длины G_2 , $G_1 + G_2 = M > N$. Так как старушки становятся обязательно на разные места очереди, то число возможных размещений равно Γ_F при $n = 2$ (формула (3)) и мы приходим аналогично предыдущему примеру к формуле (15), где $S = \ln \Gamma_F$. Мы получим в результате то же уравнение (16), где $f(h) = (\exp\{h/\theta\} \Phi(\theta, \rho) + \rho)^{-1}$.

Предположим, что N старушек наугад разошлись по двум магазинам, а далее стали свободно переходить из одного в другой с целью уменьшения при каждом переходе дохода Альхена, которого не любили. Мы попадаем в ту же ситуацию, что и в предыдущем примере. Если M/N достаточно велико, то при некотором θ_0 локальный минимум и глобальный максимум сольются и при $\theta > \theta_0$ старушки должны будут дружно ринуться в другую очередь.

Во всех трех примерах этого пункта скачок не является аналогом фазового перехода первого рода (и тем более второго, третьего и т.д. рода). Здесь «скачет» свободная энергия. Этот переход аналогичен переходу термодинамики движущейся сверхтекучей жидкости (терминология автора, см. [6], [20], [21]) в обычную термодинамику. И в этом смысле скачок аналогичен эффекту фонтанирования, полученному экспериментально в 1938 г. Д. Алленом и Х. Джонсом [22], [23, гл. X].

Автор выражает глубокую благодарность А. С. Черному за ценные замечания.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Bucklew J.* Large Deviation Technique in Decision, Simulation, and Estimation. New York: Wiley, 1990, 270 p.
2. *Cover T. M., Thomas J. A.* Elements of Information Theory. New York: Wiley, 1991, 542 p.
3. *Csiszar I.* I-divergence geometry of probability distributions and minimization problems. — *Ann. Probab.*, 1975, v. 3, № 1, p. 146–158.
4. *Föllmer H., Schied A.* Stochastic Finance. An Introduction in Discrete Time. Berlin: de Gruyter, 2002, 422 p.
5. *Frittelli M.* The minimal entropy martingale measure and the valuation problem in incomplete markets. — *Math. Finance*, 2000, v. 10, № 1, p. 39–52.
6. *Маслов В. П.* Квантование термодинамики и ультравторичное квантование. М.: Институт компьютерных исследований, 2001, 384 с.
7. *Maslov V. P.* Quasi-particles associated with Lagrangian manifolds corresponding to classical self-consistent fields. I–XII. — *Russian J. Math. Phys.*, 1994, v. 2, p. 527–534; 1995, v. 3, p. 123–132, 271–276, 401–406, 529–534; 1996, v. 4, p. 117–122, 265–270, 539–546; 1997/98, v. 5, p. 123–130, 273–278, 405–412, 529–534.
8. *Маслов В. П.* Методы квантовой статистики с точки зрения теории вероятностей. — *Теория вероятн. и ее примен.*, 2002, т. 47, в. 4, с. 686–709.
9. *Ширяев А. Н.* Основы стохастической финансовой математики. Т. 2: Теория. М.: ФАЗИС, 1998, 544 с.
10. *Ширяев А. Н.* Вероятность. М.: Наука, 1989, 640 с.
11. *Маслов В. П.* Эконофизика и квантовая статистика. — *Матем. заметки*, 2002, т. 72, № 6, с. 883–891.
12. *Ландау Л. Д., Лившиц Е. М.* Статистическая физика. М.: Наука, 1964.
13. *Maslov V. P.* On a new class of integral equations with jumping nonlinearity. — *Math. Res.*, 1994, v. 82, p. 217–225.
14. *Ашкрофт Н., Мермин Н.* Физика твердого тела. Т. 1. М.: Мир, 1979.
15. *Маслов В. П.* Теорема о классическом пределе $\hbar \rightarrow 0$ для N взаимодействующих фермионов. — *Матем. заметки*, 1998, т. 63, № 1, с. 145–146.
16. *Маслов В. П.* О фазовом переходе для классических фермионов. — *Матем. заметки*, 1998, т. 63, № 4, с. 635–637.
17. *Маслов В. П.* О фазовом переходе для классических бозонов, фермионов и обычных классических частиц. — *Матем. заметки*, 1998, т. 63, № 5, с. 792–795.

18. Маслов В. П. О фазовом переходе для классических фермионов. — Матем. заметки, 1998, т. 64, № 3, с. 470–473.
19. Blume L. E. The statistical mechanics of strategic interaction. — Games and Economic Behavior, 1993, v. 5, № 3, p. 387–424.
20. Маслов В. П. Двухуровневая модель слабо неидеального бозе-газа. Фазовый переход в метастабильном (сверхтекучем) состоянии. — Докл. РАН, 2003, т. 389, № 4, с. 1–2.
21. Маслов В. П. Модель слабо неидеального бозе-газа. Фазовый переход в сверхтекучем состоянии и эффект фонтанирования. — Вестник МГУ, сер. физ., астрон., 2003, № 1, с. 3–11.
22. Кеезом В. Гелий. М., 1949.
23. Физика низких температур. М.: ИЛ, 1959.

Поступила в редакцию
17.III.2003

© 2003 г.

МАТИЯСЕВИЧ Ю. В.*

ОДИН ВЕРОЯТНОСТНЫЙ ЭКВИВАЛЕНТ ГИПОТЕЗЫ ЧЕТЫРЕХ КРАСОК

Для каждого плоского тривалентного графа естественным образом строится вероятностное пространство и определяются два случайных события; гипотеза четырех красок оказывается эквивалентной (положительной) корреляции этих событий.

Ключевые слова и фразы: гипотеза четырех красок.

В 2002 году знаменитой гипотезе четырех красок исполнилось 150 лет. Согласно исследователям истории математики (см., например, [8], [18]), единоличное авторство этой гипотезы принадлежит Френсису Гатри (Francis Guthrie). В 1852 году он раскрашивал карту Англии и обнаружил, что достаточно использовать всего четыре краски для того, чтобы раскрасить всю карту так, чтобы любые два соседних английских графства были окрашены в разные цвета. Френсис предположил, что четырех красок хватило бы и для любой мыслимой карты (разумеется, раскрашиваемые области должны быть связными). Не будучи в состоянии доказать это, Френсис обратился за помощью к своему брату — студенту-математику Фредерику (Frederick Guthrie). Тот в свою очередь адресовал этот вопрос своему профессору де Моргану (A. de Morgan), который стал задавать этот вопрос другим.

Первое «доказательство» гипотезы Гатри было опубликовано А.Б. Кемпе [15] четверть века спустя; еще через десятилетие в нем была найдена ошибка.

Кемпе стал первым, но не последним автором ошибочного доказательства гипотезы Гатри. Ситуация изменилась в 1976 году, когда К. Аппель и В. Хакен [2] объявили о доказательстве гипотезы о четырех красках, полученном с помощью интенсивного счета на компьютерах. Объем потребовавшихся вычислений был столь велик, что найденное доказательство [3], [4] не могло быть проверено человеком.

Сейчас, четверть века спустя, положение дел существенно не изменилось. К. Аппель и В. Хакен опубликовали новое, несколько более простое доказательство [5]. Н. Робертсон, Д. Сандерс, П. Сеймур и Р. Томас, придя к выводу, что они не могут проверить в этом доказательстве даже ту часть, которая была сделана без компьютеров, написали новые программы и получили дальнейшие упрощения. Тем не менее

* С.-Петербургское отделение Математического института им. В. А. Стеклова РАН, Фонтанка, 27, 191011 С.-Петербург, Россия; URL: <http://logic.pdmi.ras.ru/~yumat>