Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. И. Барон, О моменте первого достижения для процессов ожидания, *Теория вероятн. и ее примен.*, 1996, том 41, выпуск 2, 396–403

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp2949>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.197.130.99

26 апреля 2023 г., 14:52:47

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

© 1996 г.

БАРОН М. И.*

О МОМЕНТЕ ПЕРВОГО ДОСТИЖЕНИЯ
ДЛЯ ПРОЦЕССОВ ОЖИДАНИЯ

За последние 40 лет процессы ожидания рассматривались в литературе в различных областях теории вероятностей и статистики. Их изучали в разное время Д. Линдли [8], Д. Кендалл [3] и А. А. Боровков [1] — в теории массового обслуживания, Е. Пэйдж [10] и Р. Хан [4], [5] — в алгоритме кумулятивных сумм, Н. Прабху [11] — в теории запасов, и другие. В ряде статей в различных контекстах критической величиной становился момент прохождения процессом некоторого наперед заданного уровня N .

В настоящей работе выводится асимптотика математического ожидания момента первого достижения при $N \rightarrow \infty$. Хотя в дискретном случае результат первой части статьи вытекает из доклада В. Лотова [9], его можно получить и иным путем, дополнив доказательство В. Лабковского [7].

Во второй части статьи определяется процесс ожидания с непрерывным временем, индуцированный стохастически непрерывным случайным процессом с независимыми приращениями. Аналогичный результат для момента первого достижения оказывается справедливым и в этом случае.

Ключевые слова и фразы: процесс ожидания, момент первого достижения уровня.

1. Пусть $X = \{X_t, t \in \mathbb{N}\}$ — последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин со средним $\mathbb{E}X_1$, причем $-\infty \leq \mathbb{E}X_1 < 0$. Процессом ожидания, индуцированным последовательностью X_t , называется последовательность случайных величин $\{W_t, t \in \mathbb{N}_0\}$, определенная равенствами

$$W_0 = 0, \quad W_{t+1} = \max\{0; W_t + X_{t+1}\}.$$

Для каждого положительного N рассмотрим $\tau^X(N) = \min\{t: W_t \geq N\}$ — момент первого достижения уровня N процессом W_t .

Введем обозначения: $\varphi^X(z) = \mathbb{E}z^{X_1}$, $\varphi^X(+\infty) = +\infty$, — общая производящая функция величин X_t ; R^X — верхняя граница интервала, на котором функция $\varphi^X(z)$ принимает конечные значения;

$$\gamma^X = \begin{cases} R^X, & \text{если } \varphi^X(R^X) \leq 1, \\ \theta^X, & \text{если } 1 < \varphi^X(R^X) \leq +\infty, \end{cases} \quad (1)$$

где θ^X — единственный корень уравнения $\varphi^X(z) = 1$, удовлетворяющий условию $1 < \theta^X < R^X$.

Для характеристик исходной последовательности индекс X мы будем опускать, при рассмотрении же семейства последовательностей $Y_t^{(j)}$ индекс j для удобства будем писать внизу: R_j^Y , $\varphi_j^Y(z)$.

*Mathematics, Statistic Dept. UMBC, Baltimore, MD 21228-5398, USA.

В статье [6] был сформулирован следующий результат для целочисленных X_t .

Теорема 1. Существует предел $\lim_{N \rightarrow \infty} \sqrt[N]{E\tau(N)} = \gamma$, где $\gamma = \gamma^X$ определено равенством (1).

Однако, доказано было лишь неравенство $\lim_{N \rightarrow \infty} \sqrt[N]{E\tau(N)} \geq \gamma$. Недостающую часть доказательства В. А. Лабковский привел в заметке [7], но в случае, когда $\varphi(R) \leq 1$, ему пришлось ввести в теорему следующее дополнительное условие: среди возрастающих последовательностей N_j , по которым $\lim_{j \rightarrow \infty} P^{1/N_j} \{X_1 = N_j\} = R^{-1}$, существует такая, что $\lim_{j \rightarrow \infty} N_j/N_{j-1} = 1$.

На самом деле, теорема верна в своей первоначальной формулировке даже без предположения о целочисленности X_t .

1) Сначала рассмотрим случай целочисленных величин X_t . Для завершения доказательства теоремы достаточно доказать неравенство $\lim_{N \rightarrow \infty} \sqrt[N]{E\tau(N)} \leq \gamma$ для случая, когда $\varphi(R) \leq 1$.

Рассмотрим семейство последовательностей случайных величин $\{Y_t^{(j)}\}$, $t \in \mathbb{N}\}_{j \in \mathbb{N}}$:

$$Y_t^{(j)} = \begin{cases} X_t, & \text{если } X_t \leq j, \\ 0, & \text{если } X_t > j. \end{cases}$$

При любых j и t с вероятностью единица $Y_t^{(j)} \leq X_t$, поэтому, очевидно, $\tau_j^Y(N) \geq \tau(N)$. Кроме того,

$$\varphi_j^Y(z) = \sum_{n=-\infty}^j z^n P\{X_1 = n\} + P\{X_1 > j\}, \quad (2)$$

откуда $R_j^Y = +\infty$ при любом j ; $\varphi_j^Y(R_j^Y) = +\infty$, и, согласно результатам [7],

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sqrt[N]{E\tau_j^Y(N)} \leq \theta_j^Y.$$

Следовательно,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sqrt[N]{E\tau(N)} \leq \theta_j \quad \text{при любом } j. \quad (3)$$

Далее, поскольку при любом j с вероятностью единица $Y_t^{(j)} \leq Y_t^{(j+1)}$, то $\varphi_j^Y(z) \leq \varphi_{j+1}^Y(z)$ при любом $z \geq 1$, откуда $\theta_j^Y \geq \theta_{j+1}^Y$. Но $\theta_j^Y \geq 1$ при всех j , поэтому существует предел $\lim_{j \rightarrow \infty} \theta_j^Y = \theta_\infty$.

Если $\theta_\infty < R$, то для достаточно больших j $\theta_j^Y < R$, и мы имеем противоречие: $1 = \varphi_j^Y(\theta_j^Y) \leq \varphi(\theta_j^Y) < 1$, так как из $\varphi(R) < 1$ следует $\varphi(z) < 1$ при всех $z \in (1, R]$.

Невозможно и неравенство $\theta_\infty > R$, поскольку из соотношений $\theta_\infty \leq \theta_j^Y$ и $\varphi_j^Y(\theta_j^Y) = 1$ следует, что $\varphi_j^Y(\theta_\infty) \leq 1$ при всех j . Переходя в (2) к пределу по $j \rightarrow \infty$ при $z = \theta_\infty$, получаем, что $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \theta_\infty^n P\{X_1 = n\} \leq 1$. Значит, θ_∞ лежит в интервале сходимости ряда, определяющего $\varphi(z)$.

Следовательно, $\theta_\infty = R$, и осталось в неравенстве (3) перейти к пределу по $j \rightarrow \infty$.

2) Пусть величины X_t таковы, что $2^n X_t$ принимает лишь целые значения при некотором n . Очевидно, что $\tau^X(N) = \tau^{2^n X}(2^n N)$ с вероятностью 1, и, согласно результатам [6], [7] и первой части доказательства,

$$\sqrt[N]{E\tau(N)} = \sqrt[N]{E\tau^{2^n X}(2^n N)} \left(2^n \sqrt[N]{E\tau^{2^n X}(2^n N)} \right)^{2^n} \rightarrow (\gamma^{2^n X})^{2^n}, \quad n \rightarrow \infty.$$

Но $\varphi^{2^n X}(z) = E z^{2^n X_1} = \varphi^X(z^{2^n})$, поэтому $\gamma^{2^n X} = (\gamma^X)^{2^{-n}}$, откуда $\sqrt[N]{E\tau(N)} \rightarrow \gamma$, $N \rightarrow \infty$.

3) Перейдем к рассмотрению общего случая. Для всех целых положительных n введем случайные величины

$$Y_i^{(n)} = \frac{[2^n X_i]}{2^n} \quad \text{и} \quad Z_i^{(n)} = \begin{cases} X_i, & \text{если } 2^n X_i \in \mathbb{Z}, \\ \frac{[2^n X_i] + 1}{2^n}, & \text{если } 2^n X_i \notin \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Заметим, что $EY_i^{(n)} < 0$ всегда, так как $EX_i < 0$, а $EZ_i^{(n)} \leq EX_i + \frac{1}{2^n} < 0$ для больших n . Поэтому, согласно предыдущему пункту,

$$\sqrt[n]{E\tau_n^Y(N)} \rightarrow \gamma_n^Y \quad \text{и} \quad \sqrt[n]{E\tau_n^Z(N)} \rightarrow \gamma_n^Z \quad \text{при } N \rightarrow \infty.$$

Кроме того, $Y_i^{(n)} \leq X_i \leq Z_i^{(n)}$ при всех i и n почти наверное, что влечет за собой неравенство

$$\tau_i^Z(N) \leq \tau(N) \leq \tau_n^Y(N).$$

Докажем, что $\gamma_n^Y \rightarrow \gamma$ и $\gamma_n^Z \rightarrow \gamma$ при $n \rightarrow \infty$, тогда будет доказано и существование предела $\lim_{N \rightarrow \infty} \sqrt[n]{E\tau(N)} = \gamma$.

Очевидно, что

- i) $R_n^Y = R_n^Z = R$ при всех n ,
- ii) при любом $z \in [1, R]$ $\varphi_n^Y(z)$ не убывает с ростом n и стремится к $\varphi(z)$ при $n \rightarrow \infty$,
- iii) при любом $z \in [1, R]$ $\varphi_n^Z(z)$ не возрастает с ростом n и также стремится к $\varphi(z)$ при $n \rightarrow \infty$.

Рассмотрим три случая.

А) $\varphi(R) < 1$. Тогда $\varphi_n^Y(R) < 1$ и для больших n $\varphi_n^Z(R) < 1$. Значит, $\gamma_n^Y = R_n^Y = R = R_n^Z = \gamma_n^Z$, и доказательство завершено.

В) $\varphi(R) > 1$. Тогда $\varphi_n^Z(R) > 1$ и для больших n $\varphi_n^Y(R) > 1$, откуда $\gamma_n^Y = \theta_n^Y$ и $\gamma_n^Z = \theta_n^Z$. Из (ii) и (iii) следует, что с ростом n θ_n^Y не возрастает, а θ_n^Z не убывает. Кроме того, $\theta_n^Z \leq \theta \leq \theta_n^Y$. Поэтому существуют пределы $\lim_{n \rightarrow \infty} \theta_n^Y = \theta_\infty^Y \geq \theta$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} \theta_n^Z = \theta_\infty^Z \leq \theta$. По определению θ , $\varphi_n^Y(\theta_\infty^Y) = \varphi_n^Z(\theta_\infty^Z) = 1$, поэтому при любом n $\varphi_n^Y(\theta_\infty^Y) \leq 1$ и $\varphi_n^Z(\theta_\infty^Z) \geq 1$. Переходя к пределу по $n \rightarrow \infty$, получим $\varphi(\theta_\infty^Y) \leq 1$ и $\varphi(\theta_\infty^Z) \geq 1$.

Но поскольку $\theta_\infty^Z \leq \theta \leq \theta_\infty^Y$ и $\varphi(\theta) = 1$, то $\varphi(\theta_\infty^Y) \geq 1$ и $\varphi(\theta_\infty^Z) \leq 1$. А это возможно только в случае $\theta_\infty^Z = \theta_\infty^Y = \theta$.

С) $\varphi(R) = 1$. Тогда $\gamma = R$, $\gamma_n^Y = R_n^Y = R$, $\gamma_n^Z = \theta_n^Z$, и осталось доказать, что $\theta_n^Z \rightarrow R$, $n \rightarrow \infty$. Аналогично предыдущему случаю, существует предел $\lim_{n \rightarrow \infty} \theta_n^Z = \theta_\infty^Z \leq R$ и $\varphi(\theta_\infty^Z) \geq 1$. Но из $\varphi(R) = 1$ следует, что $\varphi(z) < 1$ при всех $1 < z < R$. Поэтому $\theta_\infty^Z = R$, чем и завершается доказательство.

2. Аналогичный результат можно получить для процессов с непрерывным временем. Разумеется, в этом случае потребуется иное определение процесса ожидания.

Пусть $\{S_t, t \in \mathbb{R}_+\}$ — однородный стохастически непрерывный и непрерывный справа случайный процесс с независимыми приращениями, выходящий из нуля, и пусть существует математическое ожидание $-\infty \leq ES_1 < 0$. Процесс ожидания $\{W_t, t \in \mathbb{R}_+\}$ определим следующим образом:

$$W_t = S_t - \inf_{[0, t]} S_u.$$

Легко видеть, что в случае дискретного времени это определение совпадает с данным ранее, если положить $X_t = S_t - S_{t-1}$.

Пусть $\tau(N) = \inf\{t: W_t \geq N\}$; $\varphi(z) = Ez^{S_1}$; r и R — соответственно, нижняя и верхняя границы интервала, где функция $\varphi(z)$ конечна, а γ и θ определяются так же, как раньше.

Теорема 2. Существует предел $\lim_{N \rightarrow \infty} \sqrt[N]{E\tau(N)} = \gamma$.

Доказательство. Пусть $\{\bar{S}_t, t \in \mathbb{N}_0\}$ — случайный процесс с дискретным временем, определенный равенством $\bar{S}_t = S_t$ при всех $t \in \mathbb{N}_0$;

$$\bar{W}_t = \bar{S}_t - \inf_{u \leq t} \bar{S}_u = S_t - \inf\{S_u: u \leq t, u \in \mathbb{N}_0\} \leq W_t$$

почти наверное для всех $t \in \mathbb{N}_0$. Тогда, если $\bar{\tau}(N) = \inf\{t: \bar{W}_t \geq N\}$, то $\bar{\tau}(N) \geq \tau(N)$ с вероятностью 1.

Процесс $\bar{X}_t = \bar{S}_t - \bar{S}_{t-1}$ удовлетворяет всем условиям теоремы 1, поэтому

$$\sqrt[N]{E\bar{\tau}(N)} \rightarrow \gamma, \quad N \rightarrow \infty, \quad (4)$$

откуда $\lim_{N \rightarrow \infty} \sqrt[N]{E\tau(N)} \leq \lim_{N \rightarrow \infty} \sqrt[N]{E\bar{\tau}(N)} = \gamma$.

Докажем, что $\lim_{N \rightarrow \infty} \sqrt[N]{E\tau(N)} \geq \gamma$.

1) Сначала рассмотрим случай $r = 0$, т.е. $\varphi(z) < \infty$ при любом $z \in (0, 1]$. Из этого условия следует, что $\varphi(1/z) = Ez^{-S_1} < \infty$ при любом $z \in [1, +\infty)$ и $Ez[-S_1] = \sum_{N=-\infty}^{\infty} P\{[S_1] = -N\} z^N < \infty$, т.е. радиус сходимости этого ряда равен $+\infty$, откуда, по формуле Коши,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sqrt[N]{P\{[S_1] = -N\}} = 0.$$

Легко доказать, что для неотрицательных чисел $a_1, a_2, \dots$, если $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$, то $\lim_{N \rightarrow \infty} (\sum_{n=N}^{\infty} a_n)^{1/N} = \lim_{N \rightarrow \infty} \sqrt[N]{a_N}$. Используя этот факт, имеем:

$$0 = \lim_{N \rightarrow \infty} \sqrt[N]{P\{[S_1] = -N\}} = \lim_{N \rightarrow \infty} \sqrt[N]{P\{[S_1] \leq -N\}} = \lim_{N \rightarrow \infty} \sqrt[N]{P\{S_1 \leq -N\}}.$$

Это означает, что для любого $c > 0$ $P\{S_1 \leq -N\} = o(c^N)$ при $N \rightarrow \infty$, и если $p_N = P\{\inf_{0 \leq t \leq 1} S_t \leq -N\}$, то по неравенству Колмогорова

$$p_N \leq 2P\{S_1 \leq -N\} = o(c^N), \quad N \rightarrow \infty. \quad (5)$$

Зафиксируем $\varepsilon > 0$ и положим $t_N = [\tau(N + N\varepsilon)] + 1$. Докажем, что вероятность события $A_N = \{t_N < \bar{\tau}(N)\}$ стремится к нулю при $N \rightarrow \infty$.

Если событие A_N произошло, то $\bar{W}_{t_N} < N$. Но $W_{\tau(N+N\varepsilon)} \geq N + N\varepsilon$ всегда, поэтому

$$\begin{aligned} A_N &\subset \{W_{\tau(N+N\varepsilon)} - \bar{W}_{t_N} > N\varepsilon\} \\ &= \left\{ \left(S_{\tau(N+N\varepsilon)} - \inf_{t \leq \tau(N+N\varepsilon)} S_t \right) - \left(S_{t_N} - \inf_{\substack{t \leq t_N \\ t \in \mathbb{N}_0}} S_t \right) > N\varepsilon \right\} \subset (B_N \cup C_N), \end{aligned}$$

где события B_N и C_N суть

$$\begin{aligned} B_N &= \left\{ S_{\tau(N+N\varepsilon)} - S_{t_N} \geq \frac{N\varepsilon}{2} \right\}, \\ C_N &= \left\{ \inf_{\substack{t \leq t_N \\ t \in \mathbb{N}_0}} S_t - \inf_{t \leq \tau(N+N\varepsilon)} S_t \geq \frac{N\varepsilon}{2} \right\}. \end{aligned}$$

Момент остановки $\tau(N + N\varepsilon)$ — марковский, поэтому

$$S_{t+\tau(N+N\varepsilon)} - S_{\tau(N+N\varepsilon)} \stackrel{d}{=} S_t,$$

и так как $t_N \in [\tau(N + N\varepsilon), \tau(N + N\varepsilon) + 1]$, то

$$P(B_N) \leq P\left\{\inf_{[0,1]} S_t \leq -\frac{N\varepsilon}{2}\right\} = p_{N\varepsilon/2}. \quad (6)$$

Далее, $C_N = \cup_{j=0}^{t_N} C_{jN}$, где через C_{jN} обозначены события

$$C_{jN} = \left\{S_j - \inf_{[j, j+1]} S_t \geq N\varepsilon/2\right\}.$$

Поскольку $S_{t+j} - S_j \stackrel{d}{=} S_t$ при любом j , то

$$P(C_{jN}) = P\left\{\inf_{[0,1]} S_t \leq -\frac{N\varepsilon}{2}\right\} = p_{N\varepsilon/2}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} P(C_N) &\leq \sum_{k=1}^{\infty} P\{t_N = k\} (k+1) P(C_{0N}) = E(t_N + 1) p_{N\varepsilon/2} \\ &\leq (E\tau(N + N\varepsilon) + 2) p_{N\varepsilon/2} \leq (E\bar{\tau}(N + N\varepsilon) + 2) p_{N\varepsilon/2}. \end{aligned}$$

Объединяя этот результат с (6), получим:

$$P(A_N) \leq P(B_N) + P(C_N) \leq (E\bar{\tau}(N + N\varepsilon) + 3) p_{N\varepsilon/2}. \quad (7)$$

Согласно (4), $E\bar{\tau}(N + N\varepsilon) = o(2\gamma)^{N+N\varepsilon}$, $N \rightarrow \infty$, и если в (5) положить $c = (2\gamma)^{-2(1+\varepsilon)/\varepsilon}$, то из (7) имеем:

$$P(A_N) \rightarrow 0, \quad N \rightarrow \infty. \quad (8)$$

Далее,

$$\begin{aligned} E\tau(N + N\varepsilon) &\geq Et_N - 1 = E\{t_N | A_N\} P(A_N) + E\{t_N | \bar{A}_N\} P(\bar{A}_N) - 1 \\ &\geq E\{t_N | A_N\} P(A_N) + E\{\bar{\tau}(N) | \bar{A}_N\} P(\bar{A}_N) - 1 \\ &= E\bar{\tau}(N) - E\{\bar{\tau}(N) - t_N | A_N\} P(A_N) - 1. \end{aligned}$$

Пусть $\sigma_N = \min\{t_N; \bar{\tau}(N)\}$. Это марковский момент остановки, и, кроме того, событие A_N принадлежит соответствующей ему σ -алгебре $\mathcal{F}_{\sigma_N}$. Поэтому (см. [12, § 4.1]) процесс $\bar{S}_i^{(\sigma)} = \bar{S}_{i+\sigma_N} - \bar{S}_{\sigma_N}$ не зависит от A_N и $\bar{S}_i^{(\sigma)} \stackrel{d}{=} \bar{S}_i$.

Определим случайный процесс $\{\bar{V}_t, t \in N_0\}$:

$$\bar{V}_0 = \bar{W}_{t_N}; \quad \bar{V}_{i+1} = \max\{0; \bar{V}_i + \bar{S}_{i+1}^{(\sigma)} - S_i^{(\sigma)}\}.$$

Момент $\bar{\tau}(N) - t_N$ есть момент первого достижения этим процессом уровня N .

Тогда, если $\bar{W}_i^{(\sigma)}$ — процесс ожидания, индуцированный процессом $S_i^{(\sigma)}$, а $\bar{\tau}^{(\sigma)}(N) = \inf\{t: \bar{W}_t^{(\sigma)} \geq N\}$, то $\bar{W}_i^{(\sigma)}$ определяется так же, как $\bar{V}_i$, с той лишь разницей, что $\bar{W}_0^{(\sigma)} = 0$, а $\bar{V}_0 = \bar{W}_{t_N} \geq 0$. Поэтому с вероятностью единица $\bar{W}_i^{(\sigma)} \leq \bar{V}_i$ и $\bar{\tau}(N) - t_N \leq \bar{\tau}^{(\sigma)}(N) \stackrel{d}{=} \bar{\tau}(N)$. Кроме того, $\bar{\tau}^{(\sigma)}(N)$ не зависит от события A_N . Следовательно,

$$E\{\bar{\tau}(N) - t_N | A_N\} \leq E\{\bar{\tau}^{(\sigma)}(N) | A_N\} = E\bar{\tau}^{(\sigma)}(N) = E\bar{\tau}(N),$$

и, продолжая нашу выкладку, имеем:

$$\mathbf{E}\tau(N + N\varepsilon) \geq \mathbf{E}\tau(N)(1 - \mathbf{P}(A_N)) - 1.$$

Учитывая (4) и (8), получим:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sqrt[N]{\mathbf{E}\tau(N)} = \left(\lim_{N \rightarrow \infty} \sqrt[N]{\mathbf{E}\tau(N + N\varepsilon)} \right)^{1/(1+\varepsilon)} \geq \gamma^{1/(1+\varepsilon)},$$

откуда, в силу произвольности выбора ε , $\lim_{N \rightarrow \infty} \sqrt[N]{\mathbf{E}\tau(N)} \geq \gamma$.

2) Докажем теорему в общем случае. Случайный процесс S_t допускает следующее разложение:

$$S_t = \xi_t + \int_{|x| > 1} x \nu_t(dx) + \int_{|x| \leq 1} x \tilde{\nu}_t(dx),$$

где ν_t и $\tilde{\nu}_t$ суть случайные пуассоновские меры (подробнее см. [2, гл. VI]).

Для каждого натурального k рассмотрим

$$S_t^{(k)} = \xi_t + \int_{|x| \leq 1} x \tilde{\nu}_t(dx) + \int_{-k}^{-1} x \nu_t(dx) + \int_1^{\infty} x \nu_t(dx).$$

Тогда $S_t = S_t^{(k)} + \int_{-\infty}^{-k} x \nu_t(dx)$;

$$S_t^{(k)} \geq S_t^{(k+1)} \geq \dots \geq S_t; \quad (9)$$

$S_t^{(k)} \rightarrow S_t$, $k \rightarrow \infty$, почти наверное. При достаточно больших k $\mathbf{E}S_1^{(k)} < 0$, так как $\mathbf{E}S_1 < 0$. Покажем, что при этих k процесс $S_t^{(k)}$ удовлетворяет условиям первой части доказательства, т.е. $\varphi_k(z) = \mathbf{E}z^{S_1^{(k)}} < \infty$ при всех $z \in (0, 1]$.

Если $f_k(z)$ — характеристическая функция величины $S_1^{(k)}$, то она имеет вид (см. [2, гл. VI, § 4])

$$\begin{aligned} f_k(z) = \exp \left\{ iaz - \frac{b}{2} z^2 + \int_{-k}^{-1} (e^{izx} - 1) \Pi_1(dx) + \int_1^{\infty} (e^{izx} - 1) \Pi_1(dx) \right. \\ \left. + \int_{0 < |x| \leq 1} (e^{izx} - 1 - izx) \Pi_1(dx) \right\}, \end{aligned} \quad (10)$$

где $\Pi_1(A) = \mathbf{E}\nu_1(A)$ для любого измеримого A ; $a = \mathbf{E}\xi_1$; $b = \mathbf{D}\xi_1$. Последний интеграл следует понимать как несобственный, причем известно, что

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon < |x| \leq 1} x^2 \Pi_1(dx) < \infty. \quad (11)$$

Используя (10) для вычисления производящей функции, имеем:

$$\begin{aligned} \varphi_k(z) &= f_k(-i \log z) \\ &= \exp \left\{ a \log z - \frac{b}{2} \log^2 z + \int_{-k}^{-1} (z^x - 1) \Pi_1(dx) + \int_1^{\infty} (z^x - 1) \Pi_1(dx) \right. \\ &\quad \left. + \int_{0 < |x| \leq 1} (z^x - 1 - x \log z) \Pi_1(dx) \right\}. \end{aligned}$$

При $z \in (0, 1]$

$$\begin{aligned} \varphi_k(z) &\leq \exp \left\{ a \log z - \frac{b}{2} \log^2 z \right\} \exp \left\{ z^{-k} \Pi_1([-k, -1]) \right\} \\ &\quad \times \exp \left\{ \int_{0 < |x| \leq 1} (z^x - 1 - x \log z) \Pi_1(dx) \right\}. \end{aligned}$$

Первый сомножитель конечен при всех $z > 0$, второй — тоже, так как $\nu_1([-k, -1])$ — пуассоновская случайная величина, а $\Pi_1([-k, -1])$ — ее среднее. Рассмотрим третий сомножитель.

При $|x| \leq 1$

$$z^x - 1 - x \log z = \sum_{k=2}^{\infty} x^k \frac{\log^k z}{k!} \leq x^2 (z - \log z),$$

откуда, учитывая (11),

$$\int_{0 < |x| \leq 1} (z^x - 1 - x \log z) \Pi_1(dx) \leq (z - \log z) \int_{0 < |x| \leq 1} x^2 \Pi_1(dx) < \infty.$$

Таким образом, к процессам $S_i^{(k)}$ можно применить результаты первой части доказательства: существует предел

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sqrt[N]{E \tau_k^S(N)} = \gamma_k^S.$$

Из (9) следует, что $\tau(N) \geq \tau_k^S(N)$ при любом k с вероятностью 1. Поэтому

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sqrt[N]{E \tau(N)} \geq \lim_{N \rightarrow \infty} \sqrt[N]{E \tau_k^S(N)} = \gamma_k^S,$$

и осталось доказать, что $\gamma_k^S \rightarrow \gamma$, $k \rightarrow \infty$,

Поскольку

$$\varphi(z) = \varphi_k(z) \exp \left\{ \int_{-\infty}^{-k} (z^x - 1) \Pi_1(dx) \right\},$$

то $R_k^S = R$ при всех k . Кроме того, $\varphi(z) \leq \dots \leq \varphi_{k+1}(z) \leq \varphi_k(z) \leq +\infty$ при всех $z \geq 1$ и $\varphi_k(z) \rightarrow \varphi(z)$, $k \rightarrow \infty$. Ситуация полностью аналогична той, что мы рассматривали при доказательстве теоремы 1 для функций $\varphi_n^Z(z)$. Повторив доказательство, получим: $\gamma_k^S \rightarrow \gamma$, $k \rightarrow \infty$.

Автор глубоко признателен И. А. Ибрагимову, увлекшему его данной темой, и С. С. Валландеру, нашедшему время для прочтения этой статьи.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Боровков А. А. Вероятностные процессы в теории массового обслуживания. М.: Наука, 1972, 368 с.
2. Гитман И. И., Скороход А. В. Введение в теорию случайных процессов. 2-е изд. М.: Наука, 1977, 568 с.
3. Kendall D. G. Stochastic processes occurring in the theory of queues and their analysis by the method of imbedded Markov chains. — Ann. Math. Statist., 1953, v. 24, p. 338–354.
4. Khan R. A. A sequential detection procedure and the related cusum procedure. — Sankhya, 1979, v. 40, p. 146–162.
5. Khan R. A. Some first passage problems related to cusum procedures. — Stoch. Process. Appl., 1979, v. 9, p. 207–215.
6. Лабковский В. А. Об одном свойстве «процесса ожидания». — Теория вероятн. и ее примен., 1973, т. XVIII, в. 1, с. 203–206.
7. Лабковский В. А. Письмо в редакцию. — Теория вероятн. и ее примен., 1978, т. XXIII, в. 3, с. 698–700.

8. Lindley D. V. The theory of queues with a single server. — Proc. Cambridge Philos. Soc., 1952, v. 48, p. 277–289.
9. Лотов В. И. Асимптотические разложения в некоторых задачах определения разладки. — В сб.: Пятая международная Вильнюсская конференция по теории вероятностей и математической статистике. Тезисы докладов. Т. 1. Вильнюс: Ин-т матем. киберн., 1989, с. 321–322.
10. Page E. S. Continuous inspection schemes. — Biometrika, 1954, v. 41, p. 100–115.
11. Пшибы Н. Стохастические процессы теории запасов. М.: Мир, 1984, 185 с.
12. Скороход А. В. Случайные процессы с независимыми приращениями. 2-е изд. М.: Наука, 1986, 278 с.

Поступила в редакцию
25.VIII.1992

Исправленный вариант
18.XI.1993

© 1996 г.

БАУШЕВ А. Н.*

ОБ ОГРАНИЧЕННОСТИ ПЛОТНОСТИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ НОРМЫ ГАУССОВСКОГО СЛУЧАЙНОГО ВЕКТОРА

В статье доказано существование ограниченной плотности у распределения нормы гауссовского вектора со значениями в пространстве $L_1(S, \Sigma, \mu)$ в том случае, когда распределение вектора скалярно невырождено, а мера μ имеет, по крайней мере, один атом.

Ключевые слова и фразы: гауссовская мера, банахово пространство, плотность распределения, метод расслоений.

Введение. Пусть $(X, \|\cdot\|)$ — сепарабельное банахово пространство. При оценке скорости сходимости нормированной суммы независимых одинаково распределенных (предгауссовских) X -значных случайных векторов к предельному (гауссовскому) вектору с распределением P принципиальную роль играет вопрос о том, имеет ли функция $F_P(r) = P\{\|x\| < r\}$ ограниченную плотность распределения относительно меры Лебега на прямой или нет (см., например, [1], [6], [8], [10]). Один из подходов к этой проблеме связан с поиском необходимых и достаточных условий, которым должна удовлетворять норма $\|\cdot\|$ в пространстве X для того, чтобы функция $F_P(r)$ имела ограниченную плотность для каждой центрированной гауссовской меры P в X . Ограниченность плотности распределения гильбертовой нормы гауссовского случайного вектора со значениями в сепарабельном гильбертовом пространстве была доказана в работе Н. Н. Вахания [2]. Ю. А. Давыдовым (см. [4]) этот результат был распространен на случай пространств L_p , $1 < p < \infty$, а В. Ри и М. Талаграном — на случай равномерно выпуклых пространств, в которых модуль выпуклости (Кларксона) допускает оценку $\delta(\varepsilon) \geq C\varepsilon^p$, $p > 0$, [11]. С другой стороны, как показали примеры М. А. Лифшица [4] и В. И. Паулаускаса [7], существует гауссовский вектор со значениями в пространстве $\mathbb{R}_0$, имеющий независимые компоненты и нулевое среднее, плотность распределения нормы которого неограничена, а В. Ри и М. Талагран в работе [11] показали, что в сепарабельном гильбертовом пространстве можно

*С.-Петербургский ун-т путей сообщения, кафедра прикладной математики, Московский просп., 9, 191031 С.-Петербург, Россия.