Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ю. В. Матиясевич, Один вероятностный эквивалент гипотезы четырех красок, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2003, том 48, выпуск 2, 411–416

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp295>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.85.209

26 апреля 2023 г., 15:19:26

18. Маслов В. П. О фазовом переходе для классических фермионов. — Матем. заметки, 1998, т. 64, № 3, с. 470–473.
19. Blume L. E. The statistical mechanics of strategic interaction. — Games and Economic Behavior, 1993, v. 5, № 3, p. 387–424.
20. Маслов В. П. Двухуровневая модель слабо неидеального бозе-газа. Фазовый переход в метастабильном (сверхтекучем) состоянии. — Докл. РАН, 2003, т. 389, № 4, с. 1–2.
21. Маслов В. П. Модель слабо неидеального бозе-газа. Фазовый переход в сверхтекучем состоянии и эффект фонтанирования. — Вестник МГУ, сер. физ., астрон., 2003, № 1, с. 3–11.
22. Кеезом В. Гелий. М., 1949.
23. Физика низких температур. М.: ИЛ, 1959.

Поступила в редакцию
17.III.2003

© 2003 г.

МАТИЯСЕВИЧ Ю. В.*

ОДИН ВЕРОЯТНОСТНЫЙ ЭКВИВАЛЕНТ ГИПОТЕЗЫ ЧЕТЫРЕХ КРАСОК

Для каждого плоского тривалентного графа естественным образом строится вероятностное пространство и определяются два случайных события; гипотеза четырех красок оказывается эквивалентной (положительной) корреляции этих событий.

Ключевые слова и фразы: гипотеза четырех красок.

В 2002 году знаменитой гипотезе четырех красок исполнилось 150 лет. Согласно исследователям истории математики (см., например, [8], [18]), единоличное авторство этой гипотезы принадлежит Френсису Гатри (Francis Guthrie). В 1852 году он раскрашивал карту Англии и обнаружил, что достаточно использовать всего четыре краски для того, чтобы раскрасить всю карту так, чтобы любые два соседних английских графства были окрашены в разные цвета. Френсис предположил, что четырех красок хватило бы и для любой мыслимой карты (разумеется, раскрашиваемые области должны быть связными). Не будучи в состоянии доказать это, Френсис обратился за помощью к своему брату — студенту-математику Фредерику (Frederick Guthrie). Тот в свою очередь адресовал этот вопрос своему профессору де Моргану (A. de Morgan), который стал задавать этот вопрос другим.

Первое «доказательство» гипотезы Гатри было опубликовано А.Б. Кемпе [15] четверть века спустя; еще через десятилетие в нем была найдена ошибка.

Кемпе стал первым, но не последним автором ошибочного доказательства гипотезы Гатри. Ситуация изменилась в 1976 году, когда К. Аппель и В. Хакен [2] объявили о доказательстве гипотезы о четырех красках, полученном с помощью интенсивного счета на компьютерах. Объем потребовавшихся вычислений был столь велик, что найденное доказательство [3], [4] не могло быть проверено человеком.

Сейчас, четверть века спустя, положение дел существенно не изменилось. К. Аппель и В. Хакен опубликовали новое, несколько более простое доказательство [5]. Н. Робертсон, Д. Сандерс, П. Сеймур и Р. Томас, придя к выводу, что они не могут проверить в этом доказательстве даже ту часть, которая была сделана без компьютеров, написали новые программы и получили дальнейшие упрощения. Тем не менее

* С.-Петербургское отделение Математического института им. В. А. Стеклова РАН, Фонтанка, 27, 191011 С.-Петербург, Россия; URL: <http://logic.pdmi.ras.ru/~yumat>

их новое доказательство [20] основано на тех же идеях, восходящих еще к «доказательству» Кемпе, и также не может быть проверено человеком.

Таким образом, остается «потребность» в доказательстве теоремы четырех красок, доступном пониманию человеком. Какую же роль могла бы сыграть здесь теория вероятностей? (Или — чем можно оправдать появление в этом журнале статьи про раскраски карт?) Одним из признаков, характеризующих значимость какой-либо математической проблемы, является наличие у нее переформулировок на языке не одного, а нескольких разделов математики. По этому признаку гипотеза четырех красок является выдающейся проблемой — она имеет десятки переформулировок на языке не менее десятка разных разделов математики (см., например, [1], [6], [7], [9]–[14], [16], [19], [21]–[23] и дальнейшие ссылки в этих работах). В данной заметке дается переформулировка гипотезы четырех красок на языке теории вероятностей — понятие плоского графа в ней участвует, но понятие раскраски — нет. Вопрос о том, насколько идеи и методы теории вероятностей могли бы оказаться полезными для нового доказательства, тем более доступного человеку, остается открытым.

Для начала уточним понятие карты, фигурирующее в формулировке гипотезы четырех красок. Мы будем считать, что карта задана *изображением* на плоскости некоторого двусвязного графа. Изображение графа — это отображение множества V его вершин в попарно различные точки плоскости и множества E его ребер в жордановы кривые, имеющие своими концами образы соответствующих вершин и, кроме них, не имеющие больше никаких общих точек. Такое изображение разбивает плоскость на открытые области, называемые *странами*. Две разные страны считаются соседними, если существует ребро, изображение которого принадлежит замыканию каждой из этих стран. (Жордановость нужна для того, чтобы избежать патологического разбивания плоскости на произвольно большое количество попарно соседних стран; двусвязность гарантирует, что изображение каждого ребра лежит на границе двух разных стран, т.е. никакая страна не граничит сама с собой.)

Легко понять, что при доказательстве гипотезы четырех красок можно ограничиться рассмотрением только тривалентных графов, т.е. графов, у которых каждая вершина является концом ровно трех ребер (ибо образ любой вершины всегда можно окружить малой окрестностью, которую объявить новой страной). Пусть $G = \langle V_G, E_G \rangle$ — такой граф, имеющий $3n$ ребер $e_1, \dots, e_{3n}$ (количество ребер тривалентного графа всегда, очевидно, кратно трем).

Наряду с графом G , задающим карту, мы можем рассмотреть его *реберный граф* $F_G = \langle E_G, L_G \rangle$. Вершинами графа F_G являются ребра графа G . Две вершины e_i и e_j графа F_G соединены в нем ребром тогда и только тогда, когда e_i и e_j , рассматриваемые как ребра графа G , инцидентны одной и той же его вершине.

Каждая из $3n$ вершин графа F_G имеет степень 4, соответственно, граф F_G имеет $6n$ ребер.

Неориентированный граф с $6n$ ребрами можно сделать ориентированным графом 2^{6n} способами. Ориентируя граф F_G , мы будем считать все эти способы равновероятными, т.е. выбирать одну из двух возможных ориентаций каждого ребра с вероятностью $\frac{1}{2}$ независимо от выбора ориентаций других ребер. Точнее, мы будем рассматривать одновременно две случайные ориентации $\vec{F}_G$ и $\overleftarrow{F}_G$ графа F_G , так что наше вероятностное пространство состоит из 2^{12n} пар ориентаций $\langle \vec{F}_G, \overleftarrow{F}_G \rangle$ с вероятностью выбора какой-либо конкретной пары, равной 2^{-12n} .

Мы введем два понятия похожести двух ориентаций и свяжем их корреляцию с гипотезой четырех красок.

Будем говорить, что две ориентации графа F_G имеют *одинаковую четность*, если одна из них получается из другой изменением ориентации четного количества ребер.

В ориентированном графе каждая вершина характеризуется двумя числами — *степенью исхода* и *степенью захода*, т.е. количеством выходящих и входящих ребер. Будем говорить, что две ориентации графа F_G *сравнимы по модулю 3*, если для каждой его вершины степень исхода в одной ориентации сравнима по модулю 3 со степенью исхода этой же вершины в другой ориентации.

Обозначим через A_G событие, состоящее в том, что пара случайно выбранных ориентаций имеет одинаковую четность. Обозначим через B_G событие, состоящее в том, что пара случайно выбранных ориентаций сравнима по модулю 3.

Оказывается, что, каков бы ни был двусвязный плоский тривалентный граф G , события A_G и B_G не являются независимыми, причем коэффициент корреляции тесно связан с количеством $\chi_G(4)$ раскрасок в 4 цвета карты, определяемой графом G .

Теорема. Для любого двусвязного плоского тривалентного графа G с $3n$ ребрами

$$\mathbf{P}(B_G | A_G) - \mathbf{P}(B_G) = \left(\frac{27}{4096} \right)^n \cdot \frac{\chi_G(4)}{4}. \quad (1)$$

Следствие. Гипотеза четырех красок эквивалентна утверждению о том, что для любого двусвязного плоского тривалентного графа G события A_G и B_G не являются независимыми.

Доказательство. Для представления 2^{12n} возможных выборов ориентаций $\vec{F}_G$ и $\vec{F}_G''$ мы будем использовать производящие функции. Это будут многочлены от формальных переменных $x_1, \dots, x_{3n}$, каждая из которых соответствует одному элементу множества E_G (которое одновременно является множеством ребер графа G и множеством вершин графа F_G).

Строя производящую функцию для выборов ориентации $\vec{F}_G$, мы будем представлять два возможных выбора направления у ребра, соединяющего вершины e_i и e_j графа F_G , посредством многочлена

$$x_i - x_j, \quad (2)$$

где $i < j$, а именно, одночлен x_k будет символизировать, что ребро выходит из вершины e_k . При этом 2^{6n} выборов ориентации $\vec{F}_G$ находятся в естественном взаимно однозначном соответствии с 2^{6n} одночленами, получающимися при раскрытии скобок (без приведения подобных членов) в многочлене

$$M' = \prod_{e_i, e_j \in L_G} (x_i - x_j). \quad (3)$$

Легко видеть, что ориентации, имеющие одинаковую четность, соответствуют одночленам, имеющим одинаковые знаки, и наоборот.

Для представления сравнимости по модулю 3 мы введем оператор $\mathcal{R}$, который заменяет каждый показатель степени переменной x_k его остатком от деления на 3. Соответственно, сравнимые по модулю 3 ориентации представлены равными (с точностью до знака) одночленами в многочлене $\mathcal{R}M'$.

Для представления возможных выборов ориентации $\vec{F}_G''$ будет использоваться многочлен, аналогичный многочлену M' . Отличие состоит в том, что вместо (2) два возможных выбора направления в ориентации у ребра, соединяющего вершины e_i и e_j , представлены теперь многочленом $x_i^2 - x_j^2$, в котором одночлен x_k^2 символизирует, что ребро выходит из вершины e_k . Соответственно, многочлен M'' определяется равенством

$$M'' = \prod_{e_i, e_j \in L_G} (x_i^2 - x_j^2). \quad (4)$$

Положим

$$M = M' M'' \quad (5)$$

и вычислим двумя способами свободный член m_0 многочлена $\mathcal{R}M = \mathcal{R}(M' M'') = \mathcal{R}(\mathcal{R}(M') \mathcal{R}(M''))$.

Первый способ вычисления m_0 связан с левой частью в (1). Очевидно, что $\mathbf{P}(A_G) = \frac{1}{2}$, так что эта левая часть равна

$$2\mathbf{P}(A_G B_G) - \mathbf{P}(B_G). \quad (6)$$

Для произвольной пары ориентаций $\langle \vec{F}_G, \vec{F}_G' \rangle$ имеет место один из следующих трех случаев.

- I. Эти ориентации не сравнимы по модулю 3.
- II. Эти ориентации сравнимы по модулю 3 и имеют одинаковую четность.
- III. Эти ориентации сравнимы по модулю 3, но имеют разную четность.

В случае I вклад пары ориентаций $\langle \vec{F}_G, \vec{F}_G' \rangle$ в (6) равен 0, и вклад пары соответствующих одночленов в m_0 также равен 0; в случае II вклад этой пары ориентаций в (6) равен 2^{-12n} , а вклад пары соответствующих одночленов в m_0 равен 1; наконец, в случае III вклад пары ориентаций в (6) равен -2^{-12n} , а вклад пары одночленов в m_0 равен -1 . Таким образом,

$$m_0 = 2^{12n} (P(B_G | A_G) - P(B_G)). \quad (7)$$

Второй способ вычисления m_0 связан с правой частью в (1).

Каждая раскраска в четыре цвета $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ карты, задаваемой графом G , порождает раскраску ребер этого графа в три цвета 1, 2, 3, называемую *раскраской Тейта*. А именно, если две соседние страны окрашены в цвета α и β или же в цвета γ и δ , то разделяющее их ребро окрашивается в цвет 0; если же страны окрашены в цвета α и γ или же в цвета β и δ — то ребро красится в цвет 1; наконец, если цветами стран являются α и δ или же β и γ , то у ребра цвет 2. Легко видеть, что при этом для любой вершины инцидентные ей три ребра окрашены попарно по-разному, т.е. во все три цвета 1, 2 и 3.

Наоборот, если мы имеем раскраску Тейта, то можем по ней найти порождающую ее раскраску карты. Для этого можно окрасить произвольную страну в один из четырех цветов, а затем продолжить раскраску соседних стран в соответствии с описанными выше правилами (нетрудно доказать, что противоречия при этом не возникнет благодаря односвязности сферы). Таким образом, количество раскрасок Тейта равно $\frac{1}{4} \chi_G(4)$.

Степень многочлена $\mathcal{R}M$ по каждой из $3n$ переменных не превосходит 2, следовательно, этот многочлен может быть однозначно восстановлен по его значениям при подходящих 3^{3n} выборах значений его переменных. В качестве таких значений мы придадим каждой переменной $x_1, \dots, x_{3n}$ все три значения кубического корня из 1:

$$1, \quad \omega, \quad \omega^2, \quad (8)$$

где $\omega = (-1 + \sqrt{-3})/2$. По интерполяционной формуле Лагранжа

$$\mathcal{R}M = \sum_{\mu} (\mathcal{R}M)(\omega^{\mu(v_1)}, \dots, \omega^{\mu(v_{3n})}) P_{\mu}, \quad (9)$$

где

$$P_{\mu} = \prod_{k=1}^{3n} \frac{(x_k - \omega^{\mu(v_k)+1})(x_k - \omega^{\mu(v_k)+2})}{(\omega^{\mu(v_k)} - \omega^{\mu(v_k)+1})(\omega^{\mu(v_k)} - \omega^{\mu(v_k)+2})}, \quad (10)$$

а суммирование ведется по всем 3^{3n} отображениям вида

$$\mu: E_G \longrightarrow \{0, 1, 2\}. \quad (11)$$

Благодаря выбору значений (8), мы можем устранить оператор $\mathcal{R}$ из правой части (9):

$$\mathcal{R}M = \sum_{\mu} M(\omega^{\mu(v_1)}, \dots, \omega^{\mu(v_{3n})}) P_{\mu}. \quad (12)$$

Легко видеть, что если для некоторого ребра $e_i e_j$ графа F_G отображение μ таково, что $\mu(e_i) = \mu(e_j)$, то $M(\omega^{\mu(v_1)}, \dots, \omega^{\mu(v_{3n})}) = 0$. Таким образом, суммирование в (12) достаточно вести по тем $\frac{1}{4} \chi_G(4)$ отображениям μ , которые являются раскрасками Тейта. Найдем, чему равно значение $M(\omega^{\mu(v_1)}, \dots, \omega^{\mu(v_{3n})})$ в этом случае.

Согласно (5), (3) и (4), многочлен M является произведением $12n$ сомножителей, которые можно сгруппировать в $2n$ произведений вида

$$(x_i - x_j)(x_j - x_k)(x_i - x_k)(x_i^2 - x_j^2)(x_j^2 - x_k^2)(x_i^2 - x_k^2) \quad (13)$$

таких, что $i < j < k$ и соответствующие ребра e_i, e_j, e_k графа G инцидентны одной и той же его вершине. Поскольку в раскраске Тейта эти три ребра окрашены в три цвета 0, 1 и 2, значение произведения (13) всегда равно $(1 - \omega)(\omega - \omega^2)(1 - \omega^2)(1 - \omega^2)(\omega^2 - \omega^4)(1 - \omega^4) = 27$ и, соответственно,

$$M(\omega^{\mu(v_1)}, \dots, \omega^{\mu(v_{3n})}) = 3^{6n},$$

$$m_0 = 3^{6n} \sum_{\mu} P_{\mu}(0, \dots, 0), \quad (14)$$

где суммирование ведется по тем $\frac{1}{4} \chi_G(4)$ отображениям μ , которые являются раскрасками Тейта.

Согласно (10),

$$P_{\mu}(0, \dots, 0) = \prod_{k=1}^{3n} \frac{\omega^{\mu(v_k)+1} \omega^{\mu(v_k)+2}}{(\omega^{\mu(v_k)} - \omega^{\mu(v_k)+1})(\omega^{\mu(v_k)} - \omega^{\mu(v_k)+2})}$$

$$= \prod_{k=1}^{3n} \frac{1}{(1 - \omega)(1 - \omega^2)} = 3^{-3n}.$$

Вместе с (14) и (7) это дает требуемое равенство (1).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Alon N., Tarsi M. A note on graph colorings and graph polynomials. — J. Combin. Theory, Ser. B, 1997, v. 70, № 1, p. 197–201.
2. Appel K., Haken W. Every planar map is four colorable. — Bull. Amer. Math. Soc., 1976, v. 82, p. 711–712.
3. Appel K., Haken W. Every planar map is four colorable. Part I: Discharging. — Illinois J. Math., 1977, v. 21, p. 429–490.
4. Appel K., Haken W., Koch J. Every planar map is four colorable. Part II: Reducibility. — Illinois J. Math., 1977, v. 21, p. 491–567.
5. Appel K., Haken W. Every Planar Map is Four Colorable. Providence, R.I.: Amer. Math. Soc., 1989, 741 p.
6. Colin de Verdiere Y. On a new graph invariant and a criterion for planarity. — Contemp. Math., 1993, v. 147, p. 137–147.
7. Hoffman T., Mitchem J., Schmeichel E. On edge-coloring graphs. — Ars Combin., 1992, v. 33, p. 119–128.
8. Hudry O. Le problème des quatre couleurs. — La recherche de la vérité, Ed. by M. Serfati. Paris: Kangourou, 1999, p. 211–240.
9. Jensen T. R., Toft B. Graph Coloring Problems. New York: Wiley, 1995, 295 p.
10. Kainen P. C. Is the four color theorem true? — Geombinatorics, 1993, v. 3, № 2, p. 41–56.
11. Kauffman L. H. Map coloring and the vector cross product. — J. Combin. Theory, Ser. B, 1990, v. 48, № 2, p. 145–154.
12. Kauffman L. H. Combinatorial recoupling theory and 3-manifold invariants. — NATO Adv. Sci. Inst., Ser. B Phys., 1993, v. 315, p. 1–17.
13. Kauffman L. H. Spin networks, topology and discrete physics. — Adv. Ser. Math. Phys., 1994, v. 17, p. 234–274.
14. Kauffman L. H., Saleur H. An algebraic approach to the planar coloring problem. — Comm. Math. Phys., 1993, v. 152, № 3, p. 565–590.
15. Kempe A. B. On the geographical problem of the four colors. — Amer. J. Math., 1879, v. 2, p. 193–201.
16. Matiyasevich Yu. Some arithmetical restatements of the four color conjecture. — Theoret. Comput. Sci., 2001, v. 257, № 1–2, p. 167–183;
<http://logic.pdmi.ras.ru/~yumat/Journal/jcontord.htm>, mirrored at
<http://www.informatik.uni-stuttgart.de/ifi/ti/personen/Matiyasevich/Journal/jcontord.htm>.

17. Матиясевич Ю. В. Некоторые алгебраические методы вычисления количества раскрасок графов. — Зап. науч. семинаров ПОМИ, 2001, т. 283, с. 193–205; <http://www.pdmi.ras.ru/zns/2001/v283.html>.
18. May K. O. The origin of the four-color conjecture. — Isis, 1965, v. 56, p. 346–348.
19. Ore Ø. The Four-Color Problem. New York–London: Academic Press, 1967, 259 p.
20. Robertson N., Sanders D., Seymour P., Thomas R. The four-colour theorem. — J. Combin. Theory, Ser. B, 1997, v. 70, № 1, p. 2–44.
21. Thomas R. An update on the four-colour theorem. — Notices Amer. Math. Soc., 1998, v. 45, № 7, p. 848–859; <http://www.ams.org/notices/199807/thomas.ps>.
22. Saaty T. L. Thirteen colorful variations on Guthrie's four-color conjecture. — Amer. Math. Monthly, 1972, v. 79, p. 2–43.
23. Saaty T. L., Kainen P. C. The Four-Color Problem. Assaults and Conquest. Düsseldorf etc.: McGraw-Hill, 1977, 217 p.

Поступила в редакцию
17.XII.2002

© 2003 г.

УРУСОВ М. А.*, ЧЕРНЫЙ А. С.*

РАЗДЕЛЯЮЩИЕ МОМЕНТЫ ДЛЯ МЕР НА ПРОСТРАНСТВАХ С ФИЛЬТРАЦИЕЙ

В работе вводится понятие *разделяющего момента* для пары мер $\mathbf{P}$ и $\tilde{\mathbf{P}}$, заданных на пространстве с фильтрацией. Это понятие дает удобное описание взаимного расположения $\mathbf{P}$ и $\tilde{\mathbf{P}}$ с точки зрения вопросов абсолютной непрерывности и сингулярности. Далее, мы находим явный вид разделяющего момента для случаев, когда $\mathbf{P}$ и $\tilde{\mathbf{P}}$ — распределения процессов Леви, распределения решений стохастических дифференциальных уравнений и распределения процессов Бесселя. Полученные результаты дают, в частности, критерии локальной абсолютной непрерывности, абсолютной непрерывности, а также сингулярности мер $\mathbf{P}$ и $\tilde{\mathbf{P}}$.

Ключевые слова и фразы: разделяющий момент, локальная абсолютная непрерывность мер, абсолютная непрерывность мер, сингулярность мер, процессы Леви, стохастические дифференциальные уравнения, процессы Бесселя.

1. Введение

Пусть $\mathbf{P}$ и $\tilde{\mathbf{P}}$ — вероятностные меры, заданные на пространстве с фильтрацией $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \in [0, \infty)})$. Мы вводим понятие *разделяющего момента* для $\mathbf{P}$ и $\tilde{\mathbf{P}}$ (см. определение 2.2). Неформально, разделяющий момент — это такой момент остановки, «до которого $\mathbf{P}$ и $\tilde{\mathbf{P}}$ эквивалентны, а после которого $\mathbf{P}$ и $\tilde{\mathbf{P}}$ сингулярны». В терминах разделяющего момента легко выражаются такие свойства, как локальная абсолютная непрерывность, абсолютная непрерывность, а также сингулярность $\mathbf{P}$ и $\tilde{\mathbf{P}}$ (см. лемму 2.1). Особенно же удобным понятие разделяющего момента является в том случае, когда меры $\mathbf{P}$ и $\tilde{\mathbf{P}}$ «находятся в общем положении», т.е. для них не выполнено ни свойство локальной абсолютной непрерывности, ни свойство сингулярности.

В разделе 3 мы находим явный вид разделяющего момента для случая, когда $\mathbf{P}$ и $\tilde{\mathbf{P}}$ — распределения процессов Леви (см. теорему 3.1). Как следствие, отсюда получаются критерии локальной абсолютной непрерывности, абсолютной непрерывности, а

* Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, механико-математический факультет, кафедра теории вероятностей, Ленинские горы, 119992 Москва, Россия; e-mail: urusov@mech.math.msu.su, cherny@mech.math.msu.su