Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. В. Болдин, Об оценке наименьших модулей в нестационарной авторегрессии и проверке стационарности, *Теория вероятн. и ее примен.*, 1996, том 41, выпуск 2, 409–417

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp2951>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.90.164.192

26 апреля 2023 г., 14:05:05

2. Вазания Н. Н. Вероятностные распределения в линейных пространствах. Тбилиси: Мецниереба, 1971, 156 с.
3. Вазания Н. Н., Тариеладзе В. И., Чобанян С. А. Вероятностные распределения в банаховых пространствах. М.: Наука, 1985, 367 с.
4. Давыдов Ю. А., Лифшиц М. А. Метод расслоений в некоторых вероятностных задачах. — Итоги науки и техники, сер. Теория вероятн. Матем. статист. Теорет. киберн., 1984, т. 22, с. 61–157.
5. Сазаненко А. И. Одна оценка для плотности распределения функционалов интегрального типа. — Труды Ин-та математики СО АН СССР, 1982, т. 1, с. 180–186.
6. Паулаускас В.И. О скорости сходимости в центральной предельной теореме в некоторых банаховых пространствах. — Теория вероятн. и ее примен., 1976, т. XXI, в. 4, с. 775–791.
7. Паулаускас В.И. О плотности распределения нормы гауссовского вектора в банаховых пространствах. — Докл. АН СССР, 1982, т. 266, в. 6, с. 1301–1304.
8. Götze F. Asymptotic expansions for bivariate von Mises functionals. — Z. Wahrscheinlichkeitstheor. verw. Geb., 1979, B. 50, H. 3, S. 333–355.
9. Ehrhard A. Symmetrization dans l'espace de Gauss. — Math. Scand., 1983, v. 53, p. 281–301.
10. Kuelbs J., Kurtz T. Berry–Esseen estimates in Hilbert space and an application to the law of iterated logarithm. — Ann. Probab., 1974, v. 2, № 3, p. 287–407.
11. Rhee W., Talagrand M. Uniform convexity and distribution of the norm for Gaussian measure. — Probab. Theory Relat. Fields, 1986, v. 71, № 1, p. 59–64.

Поступила в редакцию
16.IV.1993

© 1996 г.

БОЛДИН М. В.*

ОБ ОЦЕНКЕ НАИМЕНЬШИХ МОДУЛЕЙ В НЕСТАЦИОНАРНОЙ АВТОРЕГРЕССИИ И ПРОВЕРКЕ СТАЦИОНАРНОСТИ

Для нестационарной схемы авторегрессии

$$u_i = \beta_i u_{i-1} + \varepsilon_i, \quad \sup_i |\beta_i| < 1,$$

предлагаются тесты для проверки гипотезы стационарности $H_0: \beta_i = \beta$, β неизвестно, основанные на процессе

$$\hat{w}_n(t) = \hat{s}_n^{-1} n^{-1/2} \sum_{k=nt}^{[nt]} u_{k-1} \text{sign}(u_k - \hat{\beta}_{n,LD} u_{k-1}), \quad t \in [0, 1],$$

$\hat{\beta}_{n,LD}$ — оценка наименьших модулей.

Ключевые слова и фразы: авторегрессия, оценка наименьших модулей, принцип инвариантности, близкие альтернативы.

*Мех.-матем. ф-т, кафедра теории вероятностей, МГУ, Воробьевы горы, 119899 Москва, Россия.

1. Постановка задачи. Рассмотрим нестационарное соотношение авторегрессии с коэффициентом, зависящим от времени,

$$u_i = \beta_i u_{i-1} + \varepsilon_i, \quad i \in \mathbb{Z}, \quad (1)$$

в котором $\{\beta_i\}$ — последовательность неслучайных неизвестных коэффициентов, $\sup_i |\beta_i| \leq b < 1$; $\{\varepsilon_i\}$ — независимые одинаково распределенные случайные величины (н.о.р.сл.в.) с неизвестной функцией распределения $G(x)$. Будем предполагать, что

- (i) $E\varepsilon_1 = 0$, $E|\varepsilon_1|^{2+\Delta} < \infty$ при некотором $\Delta > 0$;
- (ii) существует плотность $g(x) = G'(x)$, $\sup_x g(x) < \infty$, $g(x)$ удовлетворяет условию Липшица в нуле, $g(0) > 0$.

При условии (i) существует решение уравнения (1) вида

$$u_i = \sum_{j \geq 0} \gamma_{ij} \varepsilon_{i-j}, \quad (2)$$

где $\gamma_{i0} = 1$, $\gamma_{ij} = \beta_i \beta_{i-1} \cdots \beta_{i-j+1}$ при $j \geq 1$, ряд сходится в $L^{2+\Delta}$.

Пусть наблюдения $u_0, u_1, \dots, u_n$ удовлетворяют (2).

Цель работы состоит в построении тестов для проверки гипотезы стационарности

$$H_0: \beta_i = \beta, \quad i \in \mathbb{Z}, \quad \beta \text{ неизвестно,}$$

и исследовании мощности тестов при альтернативе

$$H_{1n}: \beta_k = \beta + a_{kn} n^{-1/2}, \quad k = 1, \dots, n, \quad \sup_{k,n} |a_{kn}| \leq A < \infty.$$

Тестовые статистики будут основываться на случайном процессе

$$\hat{w}_n(t) = \hat{s}_n^{-1} n^{-1/2} \sum_{k=1}^{[nt]} u_{k-1} \text{sign}(u_k - \hat{\beta}_{n,LD} u_{k-1}), \quad t \in [0, 1], \quad (3)$$

где $\hat{\beta}_{n,LD}$ — оценка наименьших модулей для β , построенная в предположении, что H_0 верна, $\hat{s}_n^2 = n^{-1} \sum_{k=1}^n u_k^2$, $[\cdot]$ — целая часть числа.

Похожие процессы использовались ранее в схемах линейной регрессии и авторегрессии (см. [1], [2]) для проверки гипотез о структуре схем.

2. Об оценке наименьших модулей. Если гипотеза H_0 верна, то в качестве оценки для β можно взять оценку наименьших модулей $\hat{\beta}_{n,LD}$, являющуюся решением задачи

$$\sum_{k=1}^n |u_k - \theta u_{k-1}| \longrightarrow \inf_{\theta \in \mathbb{R}^1}. \quad (4)$$

Для непрерывной $G(x)$ решение (4) п.н. единственно и совпадает с одной из точек u_k/u_{k-1} , $k = 1, \dots, n$; оно может быть найдено либо перебором, либо более экономными способами (см., например, [3, раздел 1.1]).

Введем случайный процесс

$$l_n(\theta) = \sum_{k=1}^n u_{k-1} \text{sign}(u_k - \theta u_{k-1}), \quad \theta \in \mathbb{R}^1.$$

Перепишывая его в виде

$$l_n(\theta) = \sum_{k=1}^n |u_{k-1}| \text{sign}(u_k/u_{k-1} - \theta),$$

видим, что траектории $l_n(\theta)$ — невозрастающие кусочно-постоянные функции со скачками в точках u_k/u_{k-1} , $k = 1, \dots, n$. Для непрерывной $G(x)$ решение задачи (4) совпадает с п.н. единственным решением уравнения

$$l_n(\theta) \div 0 \quad (5)$$

(символ $\div$ в (5) означает переход через ноль), которое и будем дальше изучать.

Легко убедиться, что при условиях (i)–(ii) и справедливости H_0

$$n^{-1}l_n(\theta) = \lambda(\theta) + o_P(1), \quad n \rightarrow \infty,$$

где

$$\lambda(\theta) = -2E \left[u_1^0 G((\theta - \beta) u_1^0) \right], \quad u_i^0 = \sum_{j \geq 0} \beta^j \varepsilon_{i-j},$$

и существует производная

$$\lambda'(\beta) = -2g(0) E(u_1^0)^2 = -2g(0) E\varepsilon_1^2 (1 - \beta^2)^{-1}.$$

Обозначим $a_n(t) = \sum_{k=1}^{[nt]} a_{kn}$, $t \in [0, 1]$.

Следующая теорема 1 дает равномерное линейное стохастическое разложение процесса $n^{-1/2}l_n(\theta)$ в окрестности β , справедливое при H_{1n} .

Теорема 1. Пусть выполнены условия (i)–(ii), и верна альтернатива H_{1n} . Тогда при $n \rightarrow \infty$ и любом $0 < \Theta < \infty$

$$\sup_{|\theta| \leq \Theta} \left| n^{-1/2}l_n(\beta + \theta n^{-1/2}) - n^{-1/2} \sum_{k=1}^n u_{k-1}^0 \text{sign } \varepsilon_k - \lambda'(\beta) [\theta - a_n(1)] \right| = o_P(1).$$

Теорема 1 будет доказана в п. 4. Она легко влечет за собой следующее утверждение.

Следствие 1. Если выполнены условия (i)–(ii), верна альтернатива H_{1n} и $\sqrt{n}(\hat{\beta}_n - \beta) = O_P(1)$, то при $n \rightarrow \infty$

$$n^{-1/2}l_n(\hat{\beta}_n) = n^{-1/2} \sum_{k=1}^n u_{k-1}^0 \text{sign } \varepsilon_k + \lambda'(\beta) [\sqrt{n}(\hat{\beta}_n - \beta) - a_n(1)] + o_P(1). \quad (6)$$

В силу теоремы 21.1 [4] (см. также пример 1 в § 21 [4])

$$n^{-1/2} \sum_{k=1}^n u_{k-1}^0 \text{sign } \varepsilon_k \longrightarrow \mathcal{N}(0, E(u_1^0)^2), \quad n \rightarrow \infty. \quad (7)$$

Последнее замечание и следствие 1 влекут за собой теорему 2.

Теорема 2. Пусть выполнены условия (i)–(ii). Тогда, если верна H_{1n} , то для решения $\hat{\beta}_{n,LD}$ уравнения (5) справедливо представление

$$\sqrt{n}(\hat{\beta}_{n,LD} - \beta) = -[\lambda'(\beta)]^{-1} n^{-1/2} \sum_{k=1}^n u_{k-1}^0 \text{sign } \varepsilon_k + a_n(1) + o_P(1)$$

и, следовательно, при $a_n(1) \rightarrow a(1)$

$$\sqrt{n}(\hat{\beta}_{n,LD} - \beta) \longrightarrow \mathcal{N}\left(a(1), \frac{1 - \beta^2}{[2g(0)]^2 E\varepsilon_1^2}\right), \quad n \rightarrow \infty.$$

Теорема 2 будет доказана в п. 5.

При H_0 асимптотический сдвиг $a(1) = 0$ и утверждение теоремы 2 совпадает с известным утверждением об асимптотической нормальности оценки наименьших модулей в стационарной схеме авторегрессии (см., например, [5]). Подчеркнем, что наш подход и в стационарном случае отличается от использованного в [5].

3. Предельные распределения $\hat{w}_n(t)$ и тестовых статистик. Введем случайный процесс

$$w_n(t) = \left[E(u_1^0)^2 \right]^{-1/2} n^{-1/2} \sum_{k=1}^{[nt]} u_{k-1} \operatorname{sign} \left(u_k - \hat{\beta}_{n,LD} u_{k-1} \right), \quad t \in [0, 1].$$

Процесс $w_n(t)$ построен «в соответствии» с уравнением (5), определяющим $\hat{\beta}_{n,LD}$, в частности, $w_n(1) = [E(u_1^0)^2]^{-1/2} n^{-1/2} l_n(\hat{\beta}_{n,LD})$.

Пусть $w(t)$ — броуновский мост, а $D[0, 1]$ — метрическое пространство Скорохода [4, гл. 5]. Будем предполагать, что для некоторой функции $a(t) \in D[0, 1]$

$$(iii) \quad \sup_t |a_n(t) - a(t)| = o(1), \quad n \rightarrow \infty.$$

Теорема 3. Пусть выполнены условия (i)–(ii). Тогда при гипотезе H_0 и $n \rightarrow \infty$ процесс $w_n(t)$ слабо сходится в $D[0, 1]$ к $w(t)$, а при альтернативе H_{1n} и добавочном условии (iii) — к $w(t) + \sigma(\beta) \delta(t)$, где $\delta(t) = a(t) - ta(1)$,

$$\sigma(\beta) = 2g(0) (E\varepsilon_1^2)^{1/2} (1 - \beta^2)^{-1/2}.$$

Схема доказательства теоремы 3 будет приведена в п. 6.

Пусть процесс $\hat{w}_n(t)$ определен в (3). Поскольку $\hat{s}_n^2$ — состоятельная H_{1n} оценка $E(u_1^0)^2$, то для $\hat{w}_n(t)$ справедливы те же утверждения о слабой сходимости, что и для $w_n(t)$. Поэтому в условиях теоремы 3 статистики

$$\begin{aligned} \hat{D}_n &= \sup_t |\hat{w}_n(t)| = \hat{s}_n^{-1} \max_{m \leq n} \left| n^{-1/2} \sum_{k=1}^m u_{k-1} \operatorname{sign} \left(u_k - \hat{\beta}_{n,LD} u_{k-1} \right) \right|, \\ \hat{\omega}_n^2 &= \hat{s}_n^{-2} \int_0^1 \hat{w}_n^2(t) dt = \hat{s}_n^{-2} n^{-2} \sum_{m=1}^n \left[\sum_{k=1}^m u_{k-1} \operatorname{sign} \left(u_k - \hat{\beta}_{n,LD} u_{k-1} \right) \right]^2 \end{aligned}$$

сходятся по распределению к $\sup_t |w(t)|$ и $\int_0^1 w^2(t) dt$.

Распределения последних — известные распределения А. Н. Колмогорова и Н. В. Смирнова. Статистики $\hat{D}_n$ и $\hat{\omega}_n^2$ — статистики тестов для проверки H_0 . При альтернативе H_{1n} они сходятся соответственно к $\sup_t |w(t) + \sigma(\beta) \delta(t)|$ и $\int_0^1 [w(t) + \sigma(\beta) \delta(t)]^2 dt$.

Строить случайные процессы типа $\hat{w}_n(t)$ можно, разумеется, не только с помощью $\hat{\beta}_{n,LD}$, но и других М-оценок. Необходимо лишь, чтобы структура процесса была «согласована» с уравнением, определяющим оценку. Например, для оценки наименьших квадратов $\hat{\beta}_{n,LS}$, определяемой уравнением

$$\sum_{k=1}^n u_{k-1} (u_k - \theta u_{k-1}) = 0,$$

можно рассмотреть процесс

$$\hat{w}_n^{LS}(t) = \hat{s}_{n,LS}^{-1} n^{-1/2} \sum_{k=1}^{[nt]} u_{k-1} \left(u_k - \hat{\beta}_{n,LS} u_{k-1} \right),$$

где $\hat{s}_{n,LS}^2$ — состоятельная оценка $E(u_1^0)^2 E\varepsilon_1^2$. При H_{1n} и (i) он будет сходиться к

$$w(t) + \sigma_{LS}(\beta) \delta(t), \quad \sigma_{LS}(\beta) = (1 - \beta^2)^{-1/2}.$$

Отметим особо, что предположение $E|\varepsilon_1|^{2+\Delta} < \infty$ вовсе не является существенным для нашего подхода и определяется лишь используемой оценкой. При H_0 в случае $E\varepsilon_1^2 = \infty$ не выполнены достаточные условия локальной асимптотической нормальности (ЛАН) для наблюдений (о достаточных условиях ЛАН см. [6]), и обшлеупотребительные оценки, в частности, $\hat{\beta}_{n,LD}$, перестают быть асимптотически нормальными [3, Sect. 3.2, 3.4], [5]. В этом случае можно использовать, например, медианную оценку из [2], которая асимптотически нормальна при $E|\varepsilon_1|^{1+\Delta} < \infty$.

4. Доказательство теоремы 1. Пусть $\Delta_k(x)$ равняется 1, $\frac{1}{2}$ или 0 при $\varepsilon_k < x$, $\varepsilon_k = x$, $\varepsilon_k > x$ соответственно. Тогда

$$n^{-1/2} l_n(\beta + \theta n^{-1/2}) - n^{-1/2} \sum_{k=1}^n u_{k-1} \text{sign } \varepsilon_k = -2z_{1n}(\theta) - 2z_{2n}(\theta), \quad (8)$$

где

$$\begin{aligned} z_{1n}(\theta) &= n^{-1/2} \sum_{k=1}^n u_{k-1} \left[\Delta_k((\theta - a_{kn}) u_{k-1} n^{-1/2}) \right. \\ &\quad \left. - G((\theta - a_{kn}) u_{k-1} n^{-1/2}) - \Delta_k(0) + G(0) \right], \\ z_{2n}(\theta) &= n^{-1/2} \sum_{k=1}^n u_{k-1} \left[G((\theta - a_{kn}) u_{k-1} n^{-1/2}) - G(0) \right]. \end{aligned}$$

Лемма 1. При условиях (i)–(ii)

$$\sup_{|\theta| \leq \Theta} |z_{1n}(\theta)| = o_P(1), \quad n \rightarrow \infty.$$

Доказательство. Представим $z_{1n}(\theta)$ в виде

$$z_{1n}(\theta) = p_{1n}(\theta) + p_{2n}(\theta),$$

где

$$\begin{aligned} p_{1n}(\theta) &= n^{-1/2} \sum_{k=1}^n u_{k-1} I\{u_{k-1} > 0\} \\ &\quad \times \left[\Delta_k((\theta - a_{kn}) u_{k-1} n^{-1/2}) - G((\theta - a_{kn}) u_{k-1} n^{-1/2}) - \Delta_k(0) + G(0) \right], \end{aligned}$$

$I(\cdot)$ — индикатор события, а $p_{2n}(\theta)$ определяется аналогичным выражением, в котором $I\{u_{k-1} > 0\}$ заменен на $I\{u_{k-1} \leq 0\}$.

Разделим отрезок $[-\Theta, \Theta]$ на 3^{m_n} частей точками $\eta_{sn} = -\Theta + 2\Theta 3^{-m_n} s$, $s = 0, 1, \dots, 3^{m_n}$, и пусть $3^{m_n} \theta n^{\delta/4}$ при $n \rightarrow \infty$, где $\delta = \min(\Delta, 1)$. Пусть η_{jn} — та точка среди $\{\eta_{sn}\}$, для которой

$$0 \leq \eta_{jn} - \theta \leq 2\Theta 3^{-m_n}. \quad (9)$$

Обозначим

$$\hat{u}_{k-1,s} = u_{k-1} \left[1 - 2\Theta 3^{-m_n} \eta_{sn}^{-1} I\{u_{k-1} \leq 0\} \right], \quad (10)$$

$$\tilde{u}_{k-1,s} = u_{k-1} \left[1 - 2\Theta 3^{-m_n} \eta_{sn}^{-1} I\{u_{k-1} > 0\} \right], \quad (11)$$

$k = 1, \dots, n$, $s = 0, 1, \dots, 3^{m_n}$. Для построенных величин в силу (9) и определений (10) и (11) справедливы неравенства

$$\eta_{jn} \tilde{u}_{k-1,j} \leq \theta u_{k-1} \leq \eta_{jn} \hat{u}_{k-1,j}, \quad k = 1, \dots, n. \quad (12)$$

Обозначим

$$\begin{aligned} \hat{U}_{sn} &= (\hat{u}_{0s}, \dots, \hat{u}_{n-1,s}), \quad \tilde{U}_{sn} = (\tilde{u}_{0s}, \dots, \tilde{u}_{n-1,s}), \\ q_n(\eta_{jn}, \hat{U}_{jn}) &= n^{-1/2} \sum_{k=1}^n u_{k-1} I\{u_{k-1} > 0\} \\ &\times \left[\Delta_k((\eta_{jn} \hat{u}_{k-1,j} - a_{kn} u_{k-1}) n^{-1/2}) \right. \\ &\quad \left. - G((\eta_{jn} \hat{u}_{k-1,j} - a_{kn} u_{k-1}) n^{-1/2}) - \Delta_k(0) + G(0) \right]. \end{aligned}$$

В силу монотонности по y функций $\Delta_k(y)$, $G(y)$ и соотношения (12), справедливы неравенства

$$\begin{aligned} p_{1n}(\theta) &\leq q_n(\eta_{jn}, \hat{U}_{jn}) + n^{-1/2} \sum_{k=1}^n u_{k-1} I\{u_{k-1} > 0\} \\ &\times \left[G((\eta_{jn} \hat{u}_{k-1,j} - a_{kn} u_{k-1}) n^{-1/2}) - G((\eta_{jn} \tilde{u}_{k-1,j} - a_{kn} u_{k-1}) n^{-1/2}) \right], \\ p_{1n}(\theta) &\geq q_n(\eta_{jn}, \tilde{U}_{jn}) - n^{-1/2} \sum_{k=1}^n u_{k-1} I\{u_{k-1} > 0\} \\ &\times \left[G((\eta_{jn} \hat{u}_{k-1,j} - a_{kn} u_{k-1}) n^{-1/2}) - G((\eta_{jn} \tilde{u}_{k-1,j} - a_{kn} u_{k-1}) n^{-1/2}) \right]. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \sup_{|\theta| \leq \Theta} |p_{1n}(\theta)| &\leq \sup_{0 \leq j \leq 3^{m_n}} \left\{ |q_n(\eta_{jn}, \hat{U}_{jn})| + |q_n(\eta_{jn}, \tilde{U}_{jn})| \right\} \\ &+ \sup_{0 \leq j \leq 3^{m_n}} n^{-1/2} \sum_{k=1}^n u_{k-1} I\{u_{k-1} > 0\} \\ &\times \left[G((\eta_{jn} \hat{u}_{k-1,j} - a_{kn} u_{k-1}) n^{-1/2}) - G((\eta_{jn} \tilde{u}_{k-1,j} - a_{kn} u_{k-1}) n^{-1/2}) \right]. \quad (13) \end{aligned}$$

С помощью формулы Тейлора, условий (i)-(ii) и определений (10), (11) убеждаемся, что второе слагаемое в правой части (13) есть $O_P(3^{-m_n}) = o_P(1)$, $n \rightarrow \infty$.

Рассмотрим в (13) $q_n(\eta_{jn}, \hat{U}_{jn})$. Положим для краткости

$$\begin{aligned} \xi_k &= \xi_k(j, n) := u_{k-1} I\{u_{k-1} > 0\} \\ &\times \left[\Delta_k((\eta_{jn} \hat{u}_{k-1,j} - a_{kn} u_{k-1}) n^{-1/2}) \right. \\ &\quad \left. - G((\eta_{jn} \hat{u}_{k-1,j} - a_{kn} u_{k-1}) n^{-1/2}) - \Delta_k(0) + G(0) \right]. \end{aligned}$$

Пусть $\Omega_{\leq i}$ — сигма-алгебра, порожденная $\{\varepsilon_s, s \leq i\}$. Очевидно,

$$E\xi_k = E[E(\xi_k | \Omega_{\leq k-1})] = 0,$$

так как $E(\xi_k | \Omega_{\leq k-1}) = 0$ п.н.

Аналогично, для $k < j$

$$E\xi_k\xi_j = E[E(\xi_k\xi_j | \Omega_{\leq j-1})] = E[\xi_k E(\xi_j | \Omega_{\leq j-1})] = 0.$$

Кроме того, $\forall x_1, x_2 \in \mathbf{R}^1$ и $\delta = \min(\Delta, 1)$

$$E[\Delta_k(x_1) - G(x_1) - \Delta_k(x_2) + G(x_2)]^2 \leq |G(x_1) - G(x_2)| \leq |G(x_1) - G(x_2)|^\delta.$$

Отсюда $E\xi_k^2 \leq Eu_{k-1}^2 |G(\eta_{jn}\hat{u}_{k-1,j} - a_{kn}u_{k-1})n^{-1/2} - G(0)|^\delta = O(n^{-\delta/2})$ равномерно по k, j в силу (i), (ii), $\sup_{k,n} |a_{kn}| \leq A$ и неравенства $|\hat{u}_{k-1,j}| \leq 3|u_{k-1}|$, следующего из (10).

Используя равенство $q_n(\eta_{jn}, \hat{U}_{jn}) = n^{-1/2} \sum_{k=1}^n \xi_k$, находим:

$$\sup_{0 \leq j \leq 3^{m_n}} E q_n^2(\eta_{jn}, \hat{U}_{jn}) = O(n^{-\delta/2}). \quad (14)$$

Теперь из (14) $\forall \varepsilon > 0$ в силу неравенства Чебышева

$$\begin{aligned} P\left\{\sup_{0 \leq j \leq 3^{m_n}} |q_n(\eta_{jn}, \hat{U}_{jn})| > \varepsilon\right\} &\leq \sum_{j=0}^{3^{m_n}} P\left\{|q_n(\eta_{jn}, \hat{U}_{jn})| > \varepsilon\right\} \\ &\leq \varepsilon^{-2} \sum_{j=0}^{3^{m_n}} E q_n^2(\eta_{jn}, \hat{U}_{jn}) = O(3^{m_n} n^{-\delta/2}) = O(n^{-\delta/4}) = o(1), \quad n \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

в силу выбора m_n .

Аналогично показывается, что

$$\sup_{0 \leq j \leq 3^{m_n}} |q_n(\eta_{jn}, \tilde{U}_{jn})| = o_P(1), \quad n \rightarrow \infty.$$

Следовательно, первое слагаемое в правой части (13) есть $o_P(1)$, $n \rightarrow \infty$. Значит,

$$\sup_{|\theta| \leq \Theta} |p_{2n}(\theta)| = o_P(1), \quad n \rightarrow \infty.$$

Аналогично показывается, что

$$\sup_{|\theta| \leq \Theta} |p_{2n}(\theta)| = o_P(1), \quad n \rightarrow \infty.$$

Лемма 1 доказана.

Лемма 2. При условиях (i)–(ii)

$$\sup_{|\theta| \leq \Theta} \left| z_{2n}(\theta) - g(0) (\theta - a_n(1)) E\varepsilon_1^2 (1 - \beta^2)^{-1} \right| = o_P(1), \quad n \rightarrow \infty.$$

Утверждение леммы 2 следует из формулы Тейлора и закона больших чисел.

Утверждение теоремы 1 следует теперь из (8), лемм 1, 2 и сходимости

$$n^{-1/2} \sum_{k=1}^n u_{k-1} \text{sign } \varepsilon_k - n^{-1/2} \sum_{k=1}^n u_{k-1}^0 \text{sign } \varepsilon_k = o_P(1), \quad n \rightarrow \infty.$$

5. Доказательство теоремы 2. В силу теоремы 1 и соотношения (7) при достаточно большом $B > 0$ выполнено неравенство $l_n(\beta - Bn^{-1/2}) > 0$ с вероятностью, сколь угодно близкой к единице, равномерно по $n > n_0$ и, аналогично,

$l_n(\beta - Bn^{-1/2}) < 0$. Это влечет за собой, в силу монотонности $l_n(\theta)$, соотношение $\hat{\beta}_{n,LD} \in [\beta - Bn^{-1/2}, \beta + Bn^{-1/2}]$ с вероятностью, сколь угодно близкой к единице, равномерно по $n > n_0$. Следовательно,

$$\sqrt{n}(\hat{\beta}_{n,LD} - \beta) = O_P(1), \quad n \rightarrow \infty.$$

Теперь отметим, что

$$n^{-1/2} l_n(\hat{\beta}_{n,LD}) = o_P(1), \quad n \rightarrow \infty.$$

Действительно, скачки функции $l_n(\theta)$ не больше $\max_{1 \leq k \leq n} |u_{k-1}| \leq \max_{0 \leq k \leq n-1} |\varepsilon_k| \times (1-b)^{-1} + |u_0|$. Поскольку при $E\varepsilon_1^2 < \infty$

$$n^{-1/2} \max_{0 \leq k \leq n-1} |\varepsilon_k| = o_P(1),$$

то

$$n^{-1/2} \max_{1 \leq k \leq n} |u_{k-1}| = o_P(1), \quad n \rightarrow \infty.$$

Теперь остается положить в (6) $\hat{\beta}_n = \hat{\beta}_{n,LD}$ и разрешить (6) относительно $\sqrt{n}(\hat{\beta}_{n,LD} - \beta)$. Теорема 2 доказана.

6. Доказательство теоремы 3. Приведем схему доказательства в предположении справедливости H_{1n} .

Справедливо следующее соотношение, доказываемое аналогично теореме 1: при любом $0 < \Theta < \infty$ и $n \rightarrow \infty$ в условиях теоремы 3

$$\begin{aligned} \sup_{|\theta| \leq \Theta} \sup_{1 \leq m \leq n} \left| n^{-1/2} \sum_{k=1}^m u_{k-1} \operatorname{sign} [u_k - (\beta + \theta n^{-1/2}) u_{k-1}] \right. \\ \left. - n^{-1/2} \sum_{k=1}^m u_{k-1}^0 \operatorname{sign} \varepsilon_k - \lambda'(\beta) \theta m/n \right. \\ \left. + \lambda'(\beta) n^{-1} \sum_{k=1}^m a_{kn} \right| = o_P(1). \end{aligned} \quad (15)$$

Из (15) аналогично следствию 1 получаем, что для любой последовательности $\hat{\beta}_n$ такой, что $\sqrt{n}(\hat{\beta}_n - \beta) = O_P(1)$, имеет место соотношение

$$\begin{aligned} \sup_{1 \leq m \leq n} \left| n^{-1/2} \sum_{k=1}^m u_{k-1} \operatorname{sign} (u_k - \hat{\beta}_n u_{k-1}) - n^{-1/2} \sum_{k=1}^m u_{k-1}^0 \operatorname{sign} \varepsilon_k \right. \\ \left. - \lambda'(\beta) \sqrt{n}(\hat{\beta}_n - \beta) m/n + \lambda'(\beta) n^{-1} \sum_{k=1}^m a_{kn} \right| = o_P(1), \quad n \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (16)$$

Обозначим

$$\nu_n(t) = [E(u_1^0)^2]^{-1/2} n^{-1/2} \sum_{k=1}^{[nt]} u_{k-1}^0 \operatorname{sign} \varepsilon_k.$$

В силу теоремы 2 при H_{1n} и $n \rightarrow \infty$

$$\sqrt{n}(\hat{\beta}_{n,LD} - \beta) = \sigma^{-1}(\beta) \nu_n(1) + a_n(1) + o_P(1), \quad n \rightarrow \infty. \quad (17)$$

Следовательно,

$$\sqrt{n}(\hat{\beta}_{n,LD} - \beta) = O_P(1).$$

Отсюда и из (16) при $\hat{\beta}_n = \hat{\beta}_{n,LD}$ несложно получить, что

$$\sup_{0 \leq t \leq 1} \left| w_n(t) - \nu_n(t) - \sigma(\beta) \sqrt{n} (\hat{\beta}_{n,LD} - \beta) t - \sigma(\beta) a_n(t) \right| = o_P(1), \quad n \rightarrow \infty. \quad (18)$$

Подставляя (17) в (18), находим, что при $n \rightarrow \infty$

$$\sup_{0 \leq t \leq 1} \left| w_n(t) - [\nu_n(t) - t\nu_n(1)] - \sigma(\beta) [a_n(t) - ta_n(1)] \right| = o_P(1). \quad (19)$$

В силу теоремы 21.1 из [4] и примера 1 в § 21 [4], $\nu_n(t)$ при $n \rightarrow \infty$ слабо сходится в $D[0, 1]$ к стандартному винеровскому процессу $\nu(t)$. Следовательно, $\nu_n(t) - t\nu_n(1)$ сходится к броуновскому мосту $w(t) = \nu(t) - t\nu(1)$, что совместно с (19) доказывает теорему 3.

В заключение автор выражает благодарность профессору Ю. Н. Тюрину за полезное обсуждение работы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Болдин М. В. О распределении статистик серий в схеме линейной регрессии. — Теория вероятн. и ее примен., 1993, т. 38, в. 1, с. 154–161.
2. Boldin M. V. On median tests and estimates in autoregressive models. — Math. Methods Statist., 1994, v. 3, № 2, p. 114–129.
3. Bloomfield P., Steiger W. Least absolute deviations. — Boston: Birkhäuser, 1983, 349 p.
4. Биллингсли П. Сходимость вероятностных мер. М.: Наука, 1977, 352 с.
5. Pollard D. Asymptotics for least absolute deviation regression estimators. — Econometric Theory, 1991, v. 7, p. 186–199.
6. Kreiss J.-P. On adaptive estimation in stationary ARMA-processes. — Ann. Statist., 1987, v. 15, № 1, p. 112–123.

Поступила в редакцию
24.I.1994

© 1996 г. ГОРЯЙНОВ В. В.*, ПОЛКОВНИКОВ А. А.**

О ПРЕДЕЛЬНЫХ РАСПРЕДЕЛЕНИЯХ ВЕРОЯТНОСТЕЙ ДЛЯ ДОКРИТИЧЕСКИХ ВЕТВЯЩИХСЯ ПРОЦЕССОВ

Изучаются свойства распределений вероятностей, возникающих в предельной теореме для докритических ветвящихся процессов. Получено описание предельных распределений для процессов с непрерывным временем и изучен вопрос существования и построения процессов, имеющих предельное распределение с заданными начальными вероятностями.

Ключевые слова и фразы: докритический ветвящийся процесс, инфинитезимальная производящая функция, предельное распределение, предельная интерполяционная задача.

*Институт прикладной математики и механики АН Украины, Донецк, Украина.

**Донецкий государственный университет, Донецк, Украина.