Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. В. Горяйнов, А. А. Полковников, О предельных распределениях вероятностей для докритических ветвящихся процессов, *Теория вероятн. и ее примен.*, 1996, том 41, выпуск 2, 417–425

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp2953>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.237.206.68

26 апреля 2023 г., 03:33:33

Отсюда и из (16) при $\hat{\beta}_n = \hat{\beta}_{n,LD}$ несложно получить, что

$$\sup_{0 \leq t \leq 1} \left| w_n(t) - \nu_n(t) - \sigma(\beta) \sqrt{n} (\hat{\beta}_{n,LD} - \beta) t - \sigma(\beta) a_n(t) \right| = o_P(1), \quad n \rightarrow \infty. \quad (18)$$

Подставляя (17) в (18), находим, что при $n \rightarrow \infty$

$$\sup_{0 \leq t \leq 1} \left| w_n(t) - [\nu_n(t) - t\nu_n(1)] - \sigma(\beta) [a_n(t) - ta_n(1)] \right| = o_P(1). \quad (19)$$

В силу теоремы 21.1 из [4] и примера 1 в § 21 [4], $\nu_n(t)$ при $n \rightarrow \infty$ слабо сходится в $D[0, 1]$ к стандартному винеровскому процессу $\nu(t)$. Следовательно, $\nu_n(t) - t\nu_n(1)$ сходится к броуновскому мосту $w(t) = \nu(t) - t\nu(1)$, что совместно с (19) доказывает теорему 3.

В заключение автор выражает благодарность профессору Ю. Н. Тюрину за полезное обсуждение работы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Болдин М. В. О распределении статистик серий в схеме линейной регрессии. — Теория вероятн. и ее примен., 1993, т. 38, в. 1, с. 154–161.
2. Boldin M. V. On median tests and estimates in autoregressive models. — Math. Methods Statist., 1994, v. 3, № 2, p. 114–129.
3. Bloomfield P., Steiger W. Least absolute deviations. — Boston: Birkhäuser, 1983, 349 p.
4. Биллингсли П. Сходимость вероятностных мер. М.: Наука, 1977, 352 с.
5. Pollard D. Asymptotics for least absolute deviation regression estimators. — Econometric Theory, 1991, v. 7, p. 186–199.
6. Kreiss J.-P. On adaptive estimation in stationary ARMA-processes. — Ann. Statist., 1987, v. 15, № 1, p. 112–123.

Поступила в редакцию
24.I.1994

© 1996 г. ГОРЯЙНОВ В. В.*, ПОЛКОВНИКОВ А. А.**

О ПРЕДЕЛЬНЫХ РАСПРЕДЕЛЕНИЯХ ВЕРОЯТНОСТЕЙ ДЛЯ ДОКРИТИЧЕСКИХ ВЕТВЯЩИХСЯ ПРОЦЕССОВ

Изучаются свойства распределений вероятностей, возникающих в предельной теореме для докритических ветвящихся процессов. Получено описание предельных распределений для процессов с непрерывным временем и изучен вопрос существования и построения процессов, имеющих предельное распределение с заданными начальными вероятностями.

Ключевые слова и фразы: докритический ветвящийся процесс, инфинитезимальная производящая функция, предельное распределение, предельная интерполяционная задача.

*Институт прикладной математики и механики АН Украины, Донецк, Украина.

**Донецкий государственный университет, Донецк, Украина.

1. Введение. Пусть ξ_t ($\xi_0 = 1$) — марковский ветвящийся процесс с одним типом частиц. Всюду в дальнейшем предполагается также однородность процессов во времени. Согласно принятой терминологии (см., например, [1]–[3]), ветвящийся процесс ξ_t будем называть докритическим, если $M\xi_1 < 1$, критическим, если $M\xi_1 = 1$, и надкритическим, если $M\xi_1 > 1$. Как впервые было обнаружено в [4], для докритического процесса ξ_t существуют пределы условных вероятностей

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P\{\xi_t = k \mid \xi_t > 0\} = b_k,$$

$k = 1, 2, \dots$. При этом $\sum_{k=1}^{\infty} b_k = 1$, т.е. $b_1, b_2, \dots$ представляет собой распределение вероятностей, которое в дальнейшем будем называть предельным распределением соответствующего докритического процесса.

Предельные распределения докритических ветвящихся процессов могут быть разнообразными, но не произвольными. В случае процессов с непрерывным временем оказывается возможным получить точное описание предельных распределений. Содержание этого результата составляет теорема 1, доказанная в следующем параграфе.

Естественно возникает также вопрос о существовании и построении докритического ветвящегося процесса, который имел бы предельное распределение с заданными начальными вероятностями. В связи с этим введем понятие предельной интерполяционной задачи.

О п р е д е л е н и е. Пусть $i_1, \dots, i_n$ — различные натуральные числа и $a_1, \dots, a_n$ — неотрицательные числа, удовлетворяющие условию $\sum_{k=1}^n a_k \leq 1$. Будем говорить, что предельная интерполяционная задача

$$\{i_1, \dots, i_n; a_1, \dots, a_n\}$$

непрерывно (дискретно) разрешима, если найдется такой докритический ветвящийся процесс ξ_t с непрерывным (соответственно, дискретным) временем, что

$$a_k = \lim_{t \rightarrow \infty} P\{\xi_t = i_k \mid \xi_t > 0\}$$

при всех $k = 1, \dots, n$. Процесс ξ_t , удовлетворяющий этим условиям, будем называть решением поставленной предельной интерполяционной задачи.

Поскольку всякий процесс с непрерывным временем содержит в себе процесс с дискретным временем и теми же асимптотическими свойствами, то из непрерывной разрешимости предельной интерполяционной задачи следует и ее дискретная разрешимость. С другой стороны, легко привести пример дискретно разрешимой задачи, которая не является непрерывно разрешимой. Поэтому полученные результаты можно рассматривать как формулируемые в терминах предельного распределения необходимые условия вложимости процесса Гальтона–Ватсона в однородный марковский ветвящийся процесс с непрерывным временем.

В п. 3 получены необходимые и достаточные условия непрерывной разрешимости предельных интерполяционных задач $\{1, 2; x, y\}$, $\{1, \dots, n; a_1, \dots, a_n\}$ и $\{1, 3; x, y\}$. Приведенные доказательства позволяют построить процессы с требуемыми свойствами.

Мы признательны рецензенту за обнаруженную им неточность в первом варианте статьи и полезные замечания относительно терминологии.

2. Описание предельных распределений для процессов с непрерывным временем. Следующий результат выделяет среди всех распределений вероятностей на натуральных числах те, которые могут быть получены как предельные распределения докритических ветвящихся процессов с непрерывным временем.

Теорема 1. Для того чтобы распределение вероятностей $b_1 \neq 1, b_2, b_3, \dots$ являлось предельным распределением для докритического ветвящегося процесса с

непрерывным временем, необходимо и достаточно, чтобы выполнялась следующая система неравенств:

$$\begin{aligned} b_1 &> 0, \\ \nu_2 &= (2 - \lambda) b_2 - 3\sigma b_3 \geq 0, \\ \nu_n &= (n - \lambda) b_n - (n + 1) \sigma b_{n+1} - \frac{1}{b_1} \sum_{k=2}^{n-1} (n - k + 1) \nu_k b_{n-k+1} \geq 0, \end{aligned}$$

$n = 3, 4, \dots$, где $\sigma = b_1/(b_1^2 + 2b_2)$ и $\lambda = b_1\sigma$.

Доказательство. Пусть ξ_t — докритический ветвящийся процесс с непрерывным временем, для которого $b_1, b_2, \dots$ является предельным распределением. Пусть также $p_n(t) = P\{\xi_t = n\}$ и $F(t; z) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n(t) z^n$ — производящая функция процесса ξ_t , которая (см., например, [1], [2]) удовлетворяет прямому и обратному уравнениям Колмогорова

$$\frac{\partial}{\partial t} F(t; z) = v(z) \frac{\partial}{\partial z} F(t; z), \quad \frac{\partial}{\partial t} F(t; z) = v(F(t; z)),$$

где

$$v(z) = \left. \frac{\partial}{\partial t} F(t; z) \right|_{t=0}$$

— инфинитезимальная производящая функция процесса ξ_t . Отметим также, что функция $v(z)$ является инфинитезимальной производящей функцией докритического ветвящегося процесса с непрерывным временем в том и только том случае (см. [5]), если она допускает представление в виде

$$v(z) = \alpha \left[1 - z + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\lambda_n}{n} (z^n - 1) \right], \quad (1)$$

где $\alpha > 0$, а λ_n , $n = 2, 3, \dots$, — произвольные неотрицательные числа, удовлетворяющие условию $\sum_{n=2}^{\infty} \lambda_n < 1$.

Далее, пусть $g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n z^n$ — производящая функция предельного распределения. Тогда

$$g(z) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{F(t; z) - F(t; 0)}{1 - F(t; 0)}.$$

Кроме того, используя уравнения Колмогорова, легко получить (см. [5]) следующее предельное соотношение:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1 - F(t; z)}{F'(t; z)} = - \frac{v(z)}{v'(1)} = u(z),$$

где $F' = \partial F / \partial z$, а под $v'(1)$ понимается угловая производная. Но тогда в силу теоремы Вейерштрасса имеем

$$g'(z) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{F'(t; z)}{1 - F(t; z)} \left(1 - \frac{F(t; z) - F(t; 0)}{1 - F(t; 0)} \right) = \frac{1 - g(z)}{u(z)}.$$

Записывая теперь равенство

$$u(z) g'(z) = 1 - g(z) \quad (2)$$

в терминах степенных рядов, получаем

$$\left(\sigma - z + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\lambda_n}{n} z^n \right) \left(\sum_{n=1}^{\infty} n b_n z^{n-1} \right) = \lambda \left(1 - \sum_{n=1}^{\infty} b_n z^n \right),$$

где

$$\sigma = 1 - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\lambda_n}{n}, \quad \lambda = 1 - \sum_{n=2}^{\infty} \lambda_n. \quad (3)$$

Равенство коэффициентов при одинаковых степенях z приводит к следующей системе:

$$\begin{aligned} \sigma b_1 &= \lambda, \\ 2\sigma b_2 &= (1 - \lambda) b_1, \\ n\sigma b_n &= (n - 1 - \lambda) b_{n-1} - \sum_{k=2}^{n-1} \frac{n-k}{k} \lambda_k b_{n-k}, \quad n = 3, 4, \dots \end{aligned} \quad (4)$$

Полагая теперь $\nu_n = b_1 \lambda_n / n$, $n = 2, 3, \dots$, и выражая λ_n из системы (4) через $b_1, \dots, b_{n+1}$, убеждаемся, что система неравенств $\lambda > 0$, $\lambda_n \geq 0$, $n = 2, 3, \dots$, эквивалентна приведенной в формулировке теоремы. Таким образом, в одну сторону утверждение доказано.

Допустим теперь, что распределение вероятностей $b_1 \neq 1, b_2, b_3, \dots$ удовлетворяет условиям теоремы, т.е. неотрицательны числа ν_n , $n = 2, 3, \dots$, определенные в формулировке теоремы. Определим функцию $u(z)$ степенным разложением

$$u(z) = \frac{1}{\lambda} \left(\sigma - z + \frac{1}{b_1} \sum_{n=2}^{\infty} \nu_n z^n \right).$$

Непосредственно из определения чисел ν_n и их неотрицательности следуют неравенства $\nu_n \leq nb_n$, $n = 2, 3, \dots$, которые влекут за собой сходимость ряда $\sum_{n=2}^{\infty} \nu_n z^n$ в единичном круге. Таким образом, $u(z)$ корректно определена и является голоморфной в единичном круге функцией. Заметим теперь, что для $\lambda_n = n\nu_n/b_1$, $n = 2, 3, \dots$, как следует из условий на ν_n , выполняется система равенств (4). Это означает, что функции $u(z)$ и $g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n z^n$ удовлетворяют равенству (2). Полагая в нем $z = x$, $0 < x < 1$, и осуществляя предельный переход при $x \rightarrow 1$, получаем $u(1) = 0$. Следовательно, $u(z)$ является инфинитезимальной производящей функцией некоторого ветвящегося процесса ξ_t с непрерывным временем.

Далее, равенство $u(1) = 0$ влечет за собой соотношение $\sigma = 1 - (1/b_1) \sum_{n=2}^{\infty} \nu_n$, используя которое, получаем

$$\frac{u(x)}{x-1} = \frac{1}{\lambda} \left(-1 + \frac{1}{b_1} \sum_{n=2}^{\infty} \nu_n \sum_{k=0}^{n-1} x^k \right).$$

Поскольку правая часть последнего равенства не убывает по x на интервале $0 < x < 1$, то существует ее предел при $x \rightarrow 1$, равный $u'(1)$. Из равенства (2) получаем также

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{u(x)}{x-1} = - \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - g(x)}{(1-x)g'(x)} = - \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sum_{k=0}^{n-1} x^k}{\sum_{n=1}^{\infty} nb_n x^{n-1}} \leq -1.$$

Это означает, что $u(z)$ является инфинитезимальной производящей функцией докритического ветвящегося процесса.

В силу единственности представления голоморфной в единичном круге функции $v(z)$ в виде (1), а также замечая, что предельное распределение определяется лишь числами λ_n , $n = 2, 3, \dots$, из представления инфинитезимальной производящей функции, приходим к утверждению о совпадении предельного распределения процесса ξ_t с данным распределением вероятностей $b_1, b_2, \dots$. Теорема доказана.

3. Условия непрерывной разрешимости предельных интерполяционных задач. Рассмотрим вначале задачу описания области взаимного изменения

b_1, b_2 предельных распределений докритических ветвящихся процессов с непрерывным временем.

Теорема 2. *Предельная интерполяционная задача $\{1, 2; x, y\}$, $x \neq 1$, непрерывно разрешима в том и только том случае, если выполняются неравенства $0 < x < 1$, и $\frac{1}{2}x(1-x) < y \leq x(1-x)$. При этом, в случае равенства $y = x(1-x)$ решениями являются лишь процессы ξ_i , описываемые производящими функциями вида*

$$F(t; z) = \frac{(e^{\alpha t} - 1) + [1 - (1-x)e^{\alpha t}]z}{[e^{\alpha t} - (1-x)] - (1-x)(e^{\alpha t} - 1)z},$$

где $\alpha > 0$, а вероятности предельного распределения определяются равенствами $b_n = x(1-x)^{n-1}$, $n = 1, 2, \dots$.

Доказательство. Допустим вначале, что предельная интерполяционная задача $\{1, 2; x, y\}$ непрерывно разрешима, т.е. существует такой докритический ветвящийся процесс ξ_i с непрерывным временем, предельное распределение $b_1, b_2, \dots$ которого удовлетворяет условию $b_1 = x$, $b_2 = y$. Как отмечалось при доказательстве теоремы 1, инфинитезимальная производящая функция $v(z)$ процесса ξ_i имеет вид (1) с некоторыми $\alpha > 0$ и неотрицательными числами $\lambda_2, \lambda_3, \dots$, удовлетворяющими условию $\sum_{n=2}^{\infty} \lambda_n < 1$. Определяя, как и в доказательстве теоремы 1, λ и σ по формулам (3), получим связь между числами $\lambda_2, \lambda_3, \dots$ и распределением вероятностей $b_1, b_2, \dots$, описываемую системой (4). Разрешая первые два равенства в (4) относительно b_1, b_2 , получим $x = \lambda/\sigma$, $y = x(1-\lambda)/(2\sigma)$. Непосредственно из определения λ и σ , а также из условий на $\lambda_2, \lambda_3, \dots$ следуют неравенства

$$0 < \lambda < 1, \quad \frac{1}{2}(1+\lambda) \leq \sigma < 1. \quad (5)$$

При этом равенство $\sigma = (1+\lambda)/2$ возможно лишь в случае $\lambda_2 = 1-\lambda$, $\lambda_n = 0$ при $n = 3, 4, \dots$, т.е. когда инфинитезимальная производящая функция процесса ξ_i имеет вид

$$v(z) = \alpha \left(\frac{1+\lambda}{2} - z + \frac{1-\lambda}{2} z^2 \right),$$

где $\alpha > 0$. Легко убедиться, что неравенства (5), переписанные в терминах x, y , принимают вид неравенств из формулировки теоремы, а равенство $\sigma = (1+\lambda)/2$ эквивалентно равенству $y = x(1-x)$. В случае выполнения равенства $y = x(1-x)$ инфинитезимальную производящую функцию $v(z)$ процесса ξ_i можно представить в виде

$$v(z) = \frac{\alpha}{x} (1-z) (1 - (1-x)z),$$

где α — положительное число. Интегрируя обратное уравнение Колмогорова с этой инфинитезимальной производящей функцией, приходим к процессу ξ_i , производящая функция $F(t; z)$ которого имеет вид, представленный в формулировке теоремы. Кроме того, если $g(z)$ — производящая функция предельного распределения вероятностей $b_1, b_2, \dots$, соответствующего процессу ξ_i , то $b_1 = x$, $b_2 = x(1-x)$, и (2) принимает вид

$$\frac{1}{x} (1-z) (1 - (1-x)z) g'(z) = 1 - g(z).$$

Это равенство можно переписать в виде

$$\left[\log (1 - g(z)) \right]' = - \frac{x}{(1-z)(1 - (1-x)z)},$$

где под $\log(1 - g(z))$ понимается непрерывная ветвь, обращающаяся в нуль при $z = 0$.

Интегрирование последнего равенства дает

$$g(z) = \frac{xz}{1 - (1-x)z} = \sum_{n=1}^{\infty} x(1-x)^{n-1} z^n.$$

Таким образом, в одну сторону утверждение доказано.

Обратно, пусть x и y такие, что выполнены неравенства из формулировки теоремы. Положим $\sigma = x/(x^2 + 2y)$ и $\lambda = x\sigma$. Легко проверить, что для определенных таким образом λ и σ выполняются неравенства (5). При этом равенства $y = x(1-x)$ и $\sigma = (1+\lambda)/2$ выполняются одновременно.

Допустим вначале, что $y < x(1-x)$. Тогда $\sigma > (1+\lambda)/2$ и найдется такое натуральное $k \geq 2$, что $k(1-\sigma) < 1-\lambda \leq (k+1)(1-\sigma)$. Положим $\lambda_n = 0$ при $n \neq k, k+1$ и

$$\lambda_k = k[(k+1)(1-\sigma) - (1-\lambda)], \quad \lambda_{k+1} = (k+1)[(1-\lambda) - k(1-\sigma)].$$

Очевидно, что определенные таким образом λ_n , $n = 2, 3, \dots$, являются неотрицательными числами и

$$\sum_{n=2}^{\infty} \lambda_n = \lambda_k + \lambda_{k+1} = 1 - \lambda < 1, \quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\lambda_n}{n} = \frac{\lambda_k}{k} + \frac{\lambda_{k+1}}{k+1} = 1 - \sigma.$$

Но тогда, подставляя определенную выше последовательность $\lambda_2, \lambda_3, \dots$, в формулу (1) получим инфинитезимальную производящую функцию $v(z)$ докритического ветвящегося процесса ξ_t с непрерывным временем, предельное распределение вероятностей $b_1, b_2, \dots$ которого связывает с числами λ_n , $n = 2, 3, \dots$, система (4). Из первых двух равенств этой системы и связи λ и σ с x и y получаем $b_1 = x$, $b_2 = y$.

В случае $y = x(1-x)$ определенные выше λ и σ удовлетворяют условию $\sigma = (1+\lambda)/2$. Но тогда, полагая в (1) $\lambda_2 = 1-\lambda$, $\lambda_n = 0$ при $n = 3, 4, \dots$, получим инфинитезимальную производящую функцию $v(z)$ докритического ветвящегося процесса ξ_t , который имеет требуемое предельное распределение вероятностей. Теорема доказана.

Следующий результат дает точное описание множества тех точек $(b_1, \dots, b_m)$ в $\mathbb{R}^m$, для которых непрерывно разрешима предельная интерполяционная задача

$$\{1, 2, \dots, m; b_1, b_2, \dots, b_m\}. \quad (6)$$

В случае $m = 2$ решение этой задачи дает теорема 2.

Теорема 3. Пусть $m \geq 3$ и $b_1 \neq 1$. Тогда предельная интерполяционная задача (6) непрерывно разрешима в том и только в том случае, если выполнена система неравенств

$$0 < b_1 < 1, \quad \frac{1}{2} b_1(1-b_1) < b_2 \leq b_1(1-b_1), \\ \max \{0, (n+1)\beta_n - \alpha_n\} \leq \nu_n \leq \beta_n, \quad (7)$$

$n = 2, \dots, m-1$, где $\alpha_2 = b_1(1-\lambda)$, $\beta_2 = b_1(1-\sigma)$,

$$\alpha_n = \alpha_2 - \sum_{k=2}^{n-1} k\nu_k, \quad \beta_n = \beta_2 - \sum_{k=2}^{n-1} \nu_k,$$

$n = 3, \dots, m$, а числа λ, σ и ν_k , $k = 2, \dots, m-1$, определяются посредством $b_1, \dots, b_m$ так же, как и в формулировке теоремы 1. При этом равенство в правой части (7) допускается лишь в случае $\alpha_n = n\beta_n$.

Доказательство. Допустим вначале, что предельная интерполяционная задача (6) разрешима и ξ_i — докритический ветвящийся процесс с непрерывным временем, предельное распределение $b_1, b_2, \dots$ которого имеет первые m вероятностей из условия задачи. Как отмечалось при доказательстве теоремы 1, инфинитезимальная производящая функция $v(z)$ процесса ξ_i имеет вид (1) с некоторым $\alpha > 0$ и неотрицательными числами $\lambda_2, \lambda_3, \dots$, удовлетворяющими условию $\sum_{n=2}^{\infty} \lambda_n < 1$ и связанными с предельным распределением $b_1, b_2, \dots$ системой (4), в которой λ и σ определены равенствами (3). Разрешая систему, составленную из первых двух равенств (4), получаем выражение λ и σ через b_1 и b_2 , приведенное в формулировке теоремы 1.

Рассмотрим также величины

$$\nu_n = \frac{1}{n} b_1 \lambda_n, \quad \alpha_n = \sum_{k=n}^{\infty} k \nu_k, \quad \beta_n = \sum_{k=n}^{\infty} \nu_k,$$

$n = 2, 3, \dots$. Очевидно, что $\alpha_2 = b_1(1 - \lambda)$, $\beta_2 = b_1(1 - \sigma)$, а числа ν_n , $n = 2, 3, \dots$, выражаются через вероятности $b_1, b_2, \dots$ предельного распределения ξ_i по формулам из теоремы 1.

Из теоремы 2 следует выполнимость первых двух неравенств доказываемого утверждения. Покажем выполнимость (7). Из неотрицательности чисел λ_n следуют неравенства $\nu_n \leq \beta_n$, $n = 2, 3, \dots$. Знак равенства достигается лишь в случае $\nu_k = \lambda_k = 0$ при всех $k > n$. В этом случае имеем также $0 = \alpha_{n+1} = \alpha_n - n\nu_n = \alpha_n - n\beta_n$, т.е. выполняется соотношение $\alpha_n = n\beta_n$. В общем случае получаем

$$\begin{aligned} \alpha_n - n\nu_n &= (n+1) \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{k}{n+1} \nu_k \geq (n+1) \sum_{k=n+1}^{\infty} \nu_k \\ &= (n+1) \beta_{n+1} = (n+1)(\beta_n - \nu_n), \end{aligned}$$

откуда следует неравенство $\nu_n \geq (n+1)\beta_n - \alpha_n$. Учитывая также неотрицательность чисел ν_n , приходим к неравенствам (7). Остается заметить, что α_n, β_n при $n = 3, \dots, m$ также совпадают с определенными в формулировке теоремы. В одну сторону утверждение доказано.

Обратно, пусть теперь для чисел $b_1, \dots, b_m$ выполнены условия теоремы и числа $\lambda, \sigma, \nu_n, \alpha_n, \beta_n$ определены в соответствии с формулировкой теоремы. Из (7) следует, в частности, неотрицательность чисел ν_n, β_n $n = 1, 2, \dots, m-1$. Кроме того, неравенство $(n+1)\beta_n - \alpha_n \leq \beta_n$ влечет за собой также неотрицательность чисел α_n , $n = 2, 3, \dots, m-1$.

Допустим, что выполняется равенство $\nu_{m-1} = \beta_{m-1}$. По условию теоремы тогда должно выполняться и равенство $\alpha_{m-1} = (m-1)\beta_{m-1}$, которое можно переписать в виде

$$\alpha_2 - \sum_{k=2}^{m-2} k \nu_k = (m-1) \nu_{m-1}.$$

Отсюда следует соотношение $\sum_{k=2}^{m-1} k \nu_k = b_1(1 - \lambda)$. Аналогично, из равенства $\nu_{m-1} = \beta_{m-1}$ получаем $\sum_{k=2}^{m-1} \nu_k = b_1(1 - \sigma)$. Определим теперь $v(z)$ по формуле (1), в которой положим $\lambda_n = n\nu_n/b_1$ при $n = 2, 3, \dots, m-1$ и $\lambda_n = 0$ при $n \geq m$. Соотношения, приведенные выше, переписываются в терминах λ_n в виде равенства (3). Но тогда ветвящийся процесс ξ_i с инфинитезимальной производящей функцией $v(z)$ приводит к предельному распределению $b_1, b_2, \dots$, в котором начальные вероятности $b_1, \dots, b_m$ совпадают, в силу соотношений (4), с начальными данными рассматриваемой предельной интерполяционной задачи.

Остается рассмотреть случай $\nu_{m-1} < \beta_{m-1}$. Заметим прежде всего, что в этом случае величины α_m и β_m , определенные в формулировке теоремы, строго положительны. Действительно, $\beta_m = \beta_{m-1} - \nu_{m-1} > 0$ в силу неравенства $\nu_{m-1} < \beta_{m-1}$. Далее, по условию выполнения (7) при $n = m-1$ имеем $\alpha_m = \alpha_{m-1} - (m-1)\nu_{m-1} > \alpha_{m-1} - (m-1)\beta_{m-1} \geq 0$.

Пусть теперь номер $N \geq m$ таков, что выполняются неравенства $N\beta_m \leq \alpha_m < (N+1)\beta_m$. Существование такого N следует из неравенства $m\beta_m \leq \alpha_m$, которое, в свою очередь, является следствием основного неравенства $m\beta_{m-1} - \alpha_{m-1} \leq \nu_{m-1}$. Действительно, $m\beta_m - \alpha_m = m(\beta_{m-1} - \nu_{m-1}) - [\alpha_{m-1} - (m-1)\nu_{m-1}] = m\beta_{m-1} - \alpha_{m-1} - \nu_{m-1} \leq 0$.

Положим теперь $\lambda_n = n\nu_n/b_1$ для $n = 2, \dots, m-1$,

$$\lambda_n = \frac{N}{b_1} [(N+1)\beta_m - \alpha_m], \quad \lambda_{N+1} = \frac{N+1}{b_1} (\alpha_m - N\beta_m)$$

и $\lambda_n = 0$ для остальных n . Непосредственно из способа определения λ_n и свойств ν_n следует, что $\lambda_n \geq 0$ при всех $n = 2, 3, \dots$. Кроме того,

$$\begin{aligned} \sum_{n=2}^{\infty} \lambda_n &= \frac{1}{b_1} \left[\sum_{k=2}^{m-1} k\nu_k + \alpha_m \right] = \frac{\alpha_2}{b_1} = 1 - \lambda, \\ \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\lambda_n}{n} &= \frac{1}{b_1} \left[\sum_{k=2}^{m-1} \nu_k + \beta_m \right] = \frac{\beta_2}{b_1} = 1 - \sigma. \end{aligned}$$

Отмеченные свойства чисел λ_n , $n = 2, 3, \dots$, позволяют определить посредством формулы (1) инфинитезимальную производящую функцию $v(z)$ некоторого докритического ветвящегося процесса ξ_t с непрерывным временем. Из равенств (4) и связи между λ_n и ν_n при $n = 2, 3, \dots, m-1$ следует, что предельное распределение $b_1, b_2, \dots$ полученного процесса ξ_t имеет в качестве начальных вероятностей $b_1, \dots, b_m$ требуемые значения. Теорема доказана.

Приведем одно приложение доказанного выше общего результата.

Теорема 4. *Предельная интерполяционная задача $\{1, 3; x, y\}$, $x \neq 1$, непрерывно разрешима в том и только том случае, если выполнена система неравенств*

$$\begin{aligned} 0 &< x < 1; \\ y &\leq x(1-x)^2 && \text{при } 0 < x \leq \frac{1}{2}; \\ &\leq \frac{1}{4}x(1-x)(3-2x) && \text{при } \frac{1}{2} < x < 1; \\ &> \frac{1}{6}x(1-x)(2-x) && \text{при } 0 < x \leq \frac{2}{3}; \\ y &> \frac{1}{48}x(12-12x-x^2) && \text{при } \frac{2}{3} < x < \frac{6}{7}; \\ &\geq x(1-x)^2 && \text{при } \frac{6}{7} \leq x < 1. \end{aligned}$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Харрис Т. Теория ветвящихся случайных процессов. М.: Мир, 1966, 356 с.
2. Севастьянов Б. А. Ветвящиеся процессы. М.: Наука, 1971, 436 с.
3. Athreya K. D., Ney P. E. Branching processes. Berlin-Heidelberg: Springer-Verlag, 1972.
4. Яглом А. М. Некоторые предельные теоремы теории ветвящихся случайных процессов. — Докл. АН СССР, 1947, т. 56, № 8, с. 795-798.

5. Горяйнов В. В. Дробное итерирование вероятностных производящих функций и вложение дискретных ветвящихся процессов в непрерывные. — Матем. сб., 1993, т. 184, № 5, с. 55–74.

Поступила в редакцию
9.VII.1993

© 1996 г.

ДЕНИСОВА И. Ю.*

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ РЕШЕНИЯ СИСТЕМЫ СТОХАСТИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

В работе изучается асимптотическое поведение угловой компоненты решения двумерной системы нелинейных стохастических дифференциальных уравнений специального вида в некоторой области. Эта область представляет собой кольцо, внешняя и внутренняя окружности которого являются инвариантными множествами соответствующей линеаризованной системы.

Ключевые слова и фразы: стохастическое дифференциальное уравнение Ито, инвариантное множество, стационарное множество, предел с вероятностью единица.

Пусть существует решение $\zeta(t) = (\zeta_1(t), \dots, \zeta_n(t))$ системы стохастических дифференциальных уравнений

$$d\zeta(t) = a(\zeta(t)) dt + b(\zeta(t)) dw(t), \quad (1)$$

где $t \geq 0$, $a(x) = (a_1(x), \dots, a_n(x))$, $b(x) = (b_1(x), \dots, b_n(x))$ — действительные измеримые функции, $x = (x_1, \dots, x_n)$ — точка из $\mathbf{R}^n$, $w(t)$ — одномерный винеровский процесс, заданный на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Пусть решение $\zeta(t)$ при $t = 0$ принимает значение $x^0 = (x_1^0, \dots, x_n^0)$, x^0 — неслучайное, а коэффициенты $a(x)$ и $b(x)$ допускают разложения

$$a(x) = Ax + \tilde{a}(x), \quad b(x) = Bx + \tilde{b}(x).$$

Рассмотрим систему линейных стохастических дифференциальных уравнений, соответствующую данной нелинейной системе (1):

$$d\xi(t) = A\xi(t) dt + B\xi(t) dw(t). \quad (2)$$

Пусть D — открытая область в $\mathbf{R}^n$ и τ_D — момент первого выхода процесса $\xi(t)$ из области D .

О п р е д е л е н и е 1. Непустое множество $\Gamma \subseteq D$ называется инвариантным множеством системы (2) до момента первого выхода τ_D , если

$$P\{\xi(t) \in \Gamma \forall t < \tau_D \mid \xi(0) \in \Gamma\} = 1.$$

Пусть уравнение инвариантного множества системы (2) имеет вид $G(x) = C$, где C — некоторая постоянная, функция $G(x) \in C^2(D)$ [1].

*Московский институт радиотехники, электроники и автоматики, просп. Вернадского, 78, Москва, Россия.