Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Е. Бенинг, В. Ю. Королев, Непараметрическое оценивание вероятности разорения для обобщенных процессов риска, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2002, том 47, выпуск 1, 3–20

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp2954>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.209.158.208

26 апреля 2023 г., 13:20:00

© 2002 г.

БЕНИНГ В. Е.*, КОРОЛЕВ В. Ю.*

НЕПАРАМЕТРИЧЕСКОЕ ОЦЕНИВАНИЕ ВЕРОЯТНОСТИ РАЗОРЕНИЯ ДЛЯ ОБОБЩЕННЫХ ПРОЦЕССОВ РИСКА¹⁾

В данной заметке мы строим статистическую оценку вероятности разорения для обобщенного процесса риска, характеризующегося стохастичностью процессов страховых премий и интенсивности страховых выплат. Изучены асимптотические свойства предложенной оценки. Предложены алгоритмы построения приближенных непараметрических доверительных интервалов для вероятности разорения.

Ключевые слова и фразы: процесс риска, обобщенный процесс Кокса, вероятность разорения, случайные последовательности со случайными индексами, несмещенность, состоятельность, доверительные интервалы.

1. Введение. В данной статье, продолжая исследования асимптотических свойств обобщенных процессов риска, начатые в работе [1], мы рассматриваем задачу о статистическом оценивании вероятности разорения для таких процессов и исследуем асимптотические свойства предлагаемых оценок.

Базой для дальнейших обобщений будет служить классический процесс риска

$$R_0(t) = ct - \sum_{j=1}^{N_1(t)} X_j, \quad t \geq 0, \quad (1)$$

где $c > 0$ — ставка страховой премии, $\{X_j\}_{j \geq 1}$ — независимые одинаково распределенные неотрицательные случайные величины с $\mathbf{E}X_j = a$, имеющие смысл страховых выплат, $N_1(t)$ — стандартный пуассоновский процесс (однородный пуассоновский процесс с единичной интенсивностью), независимый от $\{X_j\}_{j \geq 1}$ и имеющий смысл количества страховых случаев до момента времени t . (Мы рассматриваем классический

*Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, факультет вычислительной математики и кибернетики, Воробьевы горы, 119899 Москва, Россия; e-mail: vkorolev@df.ru, bening@cs.msu.su

¹⁾ Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 00-01-00360), Российского гуманитарного научного фонда (проект 00-02-00152а), а также Committee on Knowledge Extension Research (CKER) Американского общества актуариев.

процесс риска в форме, немного отличающейся от традиционной. Как правило, предполагается, что процесс возникновения страховых требований — однородный пуассоновский с некоторой интенсивностью $\lambda > 0$. Мы же считаем, что $\lambda = 1$. Это предположение отнюдь не ограничивает общность наших рассуждений, а означает лишь, что мы выбираем единицу времени так, чтобы в среднем на единицу времени приходилась ровно одна страховая выплата. При этом с имеет смысл прироста капитала страховой компании за выбранную таким образом единицу времени.)

Пусть $\Lambda(t)$, $t \geq 0$, — независимый от $N_1(t)$ случайный процесс с неубывающими, почти наверное конечными непрерывными справа траекториями, выходящими из нуля. Процесс Кокса (также называемый дважды стохастическим пуассоновским процессом), управляемый процессом $\Lambda(t)$, определяется как

$$N(t) = N_1(\Lambda(t)), \quad t \geq 0. \quad (2)$$

Рассмотрим процесс

$$R(t) = c\Lambda(t) - \sum_{j=1}^{N(t)} X_j, \quad t \geq 0, \quad (3)$$

в предположении, что процесс $\Lambda(t)$ независим от последовательности $\{X_j\}_{j \geq 1}$. Процесс (3) является естественным обобщением классического процесса риска (1) и более гибкой моделью, поскольку модель (3) учитывает как флуктуации риска, так и флуктуации объема портфеля. Можно показать, что при флуктуациях риска (непостоянной интенсивности страховых выплат) в *разумных* стратегиях страховщика интенсивность пополнения резерва *не должна* быть постоянной [2], [3]. С другой стороны, очевидно, что среднее число выплат должно быть пропорционально количеству страховых договоров в портфеле страховой компании, которому, в свою очередь, в определенном смысле пропорционально значение $\Lambda(t)$. Следуя [1], процесс $R(t)$ мы будем называть обобщенным процессом риска.

Пусть $s > 0$ — начальный капитал страховой компании. Несложно видеть, что вероятность разорения для обобщенного процесса риска

$$\psi(s) = \mathbf{P} \left\{ s + \inf_{t>0} R(t) < 0 \right\}$$

совпадает с вероятностью разорения для классического процесса риска

$$\psi_0(s) = \mathbf{P} \left\{ s + \inf_{t>0} R_0(t) < 0 \right\},$$

поскольку процесс $R(t)$ отличается от $R_0(t)$ лишь случайной (вообще говоря, неоднородной) компрессией времени, не изменяющей амплитуду траекторий. Мы будем существенно использовать это обстоятельство.

Ниже мы рассмотрим алгоритм построения статистических оценок вероятности разорения и исследуем асимптотические свойства предложенных оценок.

Символы $\Rightarrow$, $\xrightarrow{P}$ и $\stackrel{d}{=}$ будут обозначать соответственно слабую сходимость, сходимость по вероятности и совпадение распределений. Стандартная нормальная функция распределения будет обозначаться $\Phi(x)$.

2. Статистические оценки вероятности разорения. Известны многие *аналитические* методы вычисления границ (нижних и верхних оценок) для вероятности разорения. Все они существенно используют информацию о поведении хвостов распределений страховых требований и существенно различны в зависимости от характера убывания этих хвостов. Однако, на практике получить *исчерпывающую* информацию о поведении хвостов требований, вообще говоря, не представляется возможным, поскольку статистические выводы о распределении страховых требований приходится делать на основе выборки *конечного* объема, результатом чего является чрезвычайно малая надежность выводов о поведении хвостов распределений выплат для значений аргументов, превосходящих наибольшее наблюдение. Тем самым, с практической точки зрения оказывается очень важной идея построения *статистических* оценок вероятности разорения (в том числе и верхних и нижних ее доверительных границ) напрямую, без предварительного оценивания хвостов распределений страховых выплат.

Задача статистического оценивания вероятности разорения для обобщенного процесса риска (равно как и для классического процесса риска) по его предыстории до некоторого фиксированного момента t имеет одну важную особенность. А именно, число $N(t)$ страховых выплат, осуществленных до этого момента, случайно. Поэтому на практике вероятность разорения приходится оценивать по выборке $X_1, X_2, \dots, X_{N(t)}$ *случайного* объема. При этом класс возможных распределений случайной величины $N(t)$ даже при описанных выше ограничениях весьма широк и отнюдь не ограничивается только пуассоновскими законами. Например, если $\Lambda(t)$ имеет гамма-распределение, то распределение $N(t)$ является отрицательным биномиальным.

Важным шагом в направлении построения статистических оценок вероятности разорения стала работа Веравербеке и Кру [8], в которой предложена непараметрическая оценка вероятности разорения для классического процесса риска и доказана ее асимптотическая нормальность. Однако элегантные результаты этой работы едва ли могут найти широкое практическое применение, поскольку, во-первых, оценки в ней строятся на основе выборки *неслучайного* объема и, во-вторых, свойство асимптотической нормальности построенной в работе [8] оценки вероятности разорения нельзя напрямую использовать для построения (асимптотических) доверительных интервалов, поскольку предельное распределение оценки (точнее, его дисперсия) зависит от *неизвестного* распределения требований.

Нашей целью является построение практически применимых точечных и интервальных оценок вероятности разорения для обобщенных процессов риска.

Исходя из принципа неразорения в среднем, предположим, что $c > a$. Как мы убедились выше,

$$\psi(s) = \psi_0(s).$$

Поэтому мы можем использовать хорошо известное представление вероятности разорения для классического процесса риска

$$\psi_0(s) = \left(1 - \frac{a}{c}\right) \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{a}{c}\right)^k (1 - G^{*k}(s)), \quad (4)$$

где $G(x) = a^{-1} \int_0^x (1 - F(y)) dy$, $x \geq 0$, и $G(x) = 0$ при $x < 0$, $F(y) = \mathbf{P}\{X_1 < y\}$, а символ G^{*k} обозначает k -кратную свертку функции распределения G с самой собой, $G^{*k}(x) = (G^{*(k-1)} * G)(x)$, $k \geq 1$, G^{*0} — функция распределения с единственным единичным скачком в нуле. Соотношение (4) называют формулой Поллачека–Хинчина или формулой Бекмана (см., например, [4], [5], [8]).

Мы будем считать, что параметры c и a известны. Вначале формально предположим, что в нашем распоряжении имеется выборка $X_1, \dots, X_n$, где $n \geq 1$ — некоторое целое число. Для такой ситуации в работе [8] для $\psi_0(s)$ предложена следующая непараметрическая оценка. Поскольку

$$\psi_0(s) = \frac{a}{c} - \left(1 - \frac{a}{c}\right) \bar{\psi}_0(s), \quad (5)$$

где

$$\bar{\psi}_0(s) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{a}{c}\right)^k G^{*k}(s), \quad (6)$$

достаточно построить оценку для $\bar{\psi}_0(s)$.

Пусть $A \subseteq \mathbb{R}^1$. Символом $1_A(x)$ мы будем обозначать индикаторную функцию множества A : $1_A(x) = 1$, если $x \in A$, и $1_A(x) = 0$, если $x \notin A$. Пусть $Y_1, Y_2, \dots$ — независимые одинаково распределенные случайные величины с функцией распределения $G(x)$. Тогда

$$\begin{aligned} G^{*k}(s) &= \mathbf{P}\{Y_1 + \dots + Y_k < s\} \\ &= \frac{1}{a^k} \int_0^\infty \dots \int_0^\infty 1_{[0,s)}(y_1 + \dots + y_k) \prod_{j=1}^k (1 - F(y_j)) dy_1 \dots dy_k. \end{aligned} \quad (7)$$

Пусть $F_n(x)$ — эмпирическая функция распределения, построенная по выборке $X_1, \dots, X_n$, т.е.

$$F_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n 1_{[0,x)}(X_i), \quad x \geq 0.$$

Тогда, заменяя в соотношении (7) F на F_n , получим выражение

$$\frac{1}{n^k a^k} \sum_{i_1=1}^n \cdots \sum_{i_k=1}^n \int_0^\infty \cdots \int_0^\infty \mathbf{1}_{[0,s)}(y_1 + \cdots + y_k) \prod_{j=1}^k \mathbf{1}_{[y_j, \infty)}(X_{i_j}) dy_1 \cdots dy_k,$$

которое представляет собой функционал Мизеса (см. [10, с. 32]). Поэтому в качестве статистической оценки для $G^{*k}(s)$ можно рассмотреть U -статистику вида

$$U_{n,k} = U_{n,k}(s) = (C_n^k)^{-1} \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n} h_k(X_{i_1}, \dots, X_{i_k}) \quad (8)$$

с симметричным ядром

$$h_k(x_1, \dots, x_k) = \frac{1}{a^k} \int_0^\infty \cdots \int_0^\infty \mathbf{1}_{[0,s)}(y_1 + \cdots + y_k) \prod_{j=1}^k \mathbf{1}_{[y_j, \infty)}(x_j) dy_1 \cdots dy_k. \quad (9)$$

Пусть $m(n)$ — некоторое целое число, $m(n) \leq n$. В силу (5) и (6) в качестве оценки для $\psi_0(s)$ при неслучайном объеме выборки n формально примем

$$\psi_n(s) = \frac{a}{c} - \left(1 - \frac{a}{c}\right) \bar{\psi}_n(s), \quad (10)$$

где

$$\bar{\psi}_n(s) = \sum_{k=1}^{m(n)} \left(\frac{a}{c}\right)^k U_{n,k}. \quad (11)$$

Теперь ясно, что, имея выборку $X_1, \dots, X_{N(t)}$, в качестве оценки для $\psi(s) = \psi_0(s)$ следует взять

$$\psi_{N(t)}(s) = \frac{a}{c} - \left(1 - \frac{a}{c}\right) \bar{\psi}_{N(t)}(s), \quad (12)$$

где

$$\bar{\psi}_{N(t)}(s) = \sum_{k=1}^{m(N(t))} \left(\frac{a}{c}\right)^k U_{N(t),k}. \quad (13)$$

3. Асимптотические свойства оценки вероятности разорения для обобщенного процесса риска. Обозначим

$$\sigma^2 = \left(1 - \frac{a}{c}\right)^2 \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{a}{c}\right)^{k+m} km \cdot \sigma_{k,m}, \quad (14)$$

где

$$\sigma_{k,m} = \mathbf{E} h_k(X_1) h_m(X_1) - G^{*k}(s) G^{*m}(s), \quad (15)$$

$$h_j(x) = \frac{1}{a} \int_0^\infty G^{*(j-1)}(s-y) \mathbf{1}_{[y, \infty)}(x) dy. \quad (16)$$

Следующее утверждение играет главную роль в данном пункте.

Теорема 1. Пусть оценка $\psi_{N(t)}(s)$ определяется соотношениями (12) и (13), причем функция $m(n)$ такова, что $m(n) \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$ так, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{m(n)} = 0. \quad (17)$$

Предположим, что $\Lambda(t) \xrightarrow{\mathbf{P}} \infty$ при $t \rightarrow \infty$. Пусть $d(t) > 0$ — функция такая, что $d(t) \rightarrow \infty$ ($t \rightarrow \infty$). Для того чтобы случайная величина $\sigma^{-1} \sqrt{d(t)} (\psi_{N(t)}(s) - \psi(s))$ имела предельное распределение при $t \rightarrow \infty$:

$$\sigma^{-1} \sqrt{d(t)} (\psi_{N(t)}(s) - \psi(s)) \Rightarrow Z \quad (t \rightarrow \infty), \quad (18)$$

необходимо и достаточно, чтобы существовала такая неотрицательная случайная величина Y , что

$$\frac{\Lambda(t)}{d(t)} \Rightarrow Y \quad (t \rightarrow \infty). \quad (19)$$

При этом

$$\mathbf{P}\{Z < x\} = \mathbf{E} \Phi(x \sqrt{Y}), \quad x \in \mathbb{R}^1. \quad (20)$$

Предельное распределение (20) одно и то же для любого $s > 0$.

Доказательству теоремы 1 мы предпошлим несколько лемм.

Лемма 1. Пусть $N(t)$ — процесс Кокса, управляемый процессом $\Lambda(t)$. Тогда $N(t) \xrightarrow{\mathbf{P}} \infty$, если и только если $\Lambda(t) \xrightarrow{\mathbf{P}} \infty$.

Доказательство см. в [6].

Лемма 2. Пусть $N(t)$ — процесс Кокса, управляемый процессом $\Lambda(t)$. Пусть $d(t) > 0$ — функция такая, что $d(t) \rightarrow \infty$ ($t \rightarrow \infty$). Тогда для того чтобы одномерные распределения нормированного процесса Кокса слабо сходились к распределению некоторой случайной величины Y :

$$\frac{N(t)}{d(t)} \Rightarrow Y \quad (t \rightarrow \infty),$$

необходимо и достаточно, чтобы одномерные распределения нормированного управляющего процесса $\Lambda(t)$ слабо сходились к тому же распределению:

$$\frac{\Lambda(t)}{d(t)} \Rightarrow Y \quad (t \rightarrow \infty).$$

Доказательство см. в [6] и [7].

Лемма 3. Пусть оценка $\psi_n(s)$ определяется соотношениями (10) и (11), причем функция $m(n) \leq n$ неограниченно возрастает при $n \rightarrow \infty$ так, что выполнено (17). Тогда случайная величина $\sigma^{-1} \sqrt{n} (\psi_n(s) - \psi_0(s))$ асимптотически нормальна:

$$\mathbf{P}\{\sigma^{-1} \sqrt{n} (\psi_n(s) - \psi_0(s)) < x\} \Rightarrow \Phi(x) \quad (n \rightarrow \infty).$$

Доказательство см. в [8].

Рассмотрим случайные величины $N_1, N_2, \dots, X_1, X_2, \dots$, определенные на одном и том же измеримом пространстве $(\Omega, \mathcal{A})$. Пусть на $\mathcal{A}$ задано семейство вероятностных мер $\{\mathbf{P}_\theta, \theta \in \Theta\}$. Предположим, что при каждом $n \geq 1$ случайная величина N_n принимает только натуральные значения и независима от последовательности $X_1, X_2, \dots$ относительно каждой меры из семейства $\{\mathbf{P}_\theta, \theta \in \Theta\}$. Пусть $T_n = T_n(X_1, \dots, X_n)$ — некоторая статистика. Для каждого $n \geq 1$ определим случайную величину T_{N_n} , положив $T_{N_n(\omega)} = T_{N_n(\omega)}(X_1(\omega), \dots, X_{N_n(\omega)}(\omega))$ для каждого элементарного исхода $\omega \in \Omega$. Будем говорить, что статистика T_n асимптотически нормальна, если существуют функции $\delta(\theta)$ и $t(\theta)$ такие, что при каждом $\theta \in \Theta$

$$\mathbf{P}_\theta \{ \delta(\theta) \sqrt{n} (T_n - t(\theta)) < x \} \Rightarrow \Phi(x) \quad (n \rightarrow \infty). \quad (21)$$

Лемма 4. Пусть $\{d_n\}_{n \geq 1}$ — некоторая неограниченно возрастающая последовательность положительных чисел. Предположим, что $N_n \xrightarrow{\mathbf{P}} \infty$ при $n \rightarrow \infty$. Пусть статистика T_n асимптотически нормальна в смысле (21). Для того чтобы при каждом $\theta \in \Theta$ существовала такая функция распределения $F(x, \theta)$, что

$$\mathbf{P}_\theta \{ \delta(\theta) \sqrt{d_n} (T_{N_n} - t(\theta)) < x \} \Rightarrow F(x, \theta) \quad (n \rightarrow \infty),$$

необходимо и достаточно, чтобы существовало семейство функций распределения $\mathcal{H} = \{H(x, \theta): \theta \in \Theta\}$, удовлетворяющее условиям

$$H(x, \theta) = 0, \quad x < 0, \quad \theta \in \Theta;$$

$$F(x, \theta) = \int_0^\infty \Phi(x\sqrt{y}) d_y H(y, \theta), \quad x \in \mathbb{R}^1, \quad \theta \in \Theta;$$

$$\mathbf{P}_\theta \{ N_n < d_n x \} \Rightarrow H(x, \theta), \quad n \rightarrow \infty, \quad \theta \in \Theta.$$

При этом если функции распределения случайных величин N_n не зависят от θ , то не зависят от θ и функции распределения $H(x, \theta)$, т.е. семейство $\mathcal{H}$ состоит из единственного элемента.

Доказательство. Данная лемма по сути лишь переобозначениями отличается от теоремы 3 из [9].

Доказательство теоремы 1. Пусть $\{t_1, t_2, \dots\}$ — произвольная неограниченно возрастающая последовательность моментов времени. Положим $N_n = N(t_n)$, $n \geq 1$. По лемме 1 условия $\Lambda(t) \xrightarrow{\mathbf{P}} \infty$ и $N(t) \xrightarrow{\mathbf{P}} \infty$ эквивалентны при $t \rightarrow \infty$. Поэтому, так как, согласно лемме 3, оценка $\psi_n(s)$ асимптотически нормальна, то по лемме 4 для сходимости (18), в которой t пробегает последовательность $\{t_1, t_2, \dots\}$, необходимо и достаточно, чтобы существовала случайная величина $Y \geq 0$ такая, что

$$\frac{N_n}{d(t_n)} \Rightarrow Y \quad (n \rightarrow \infty). \quad (22)$$

Но по лемме 2 сходимость (22) имеет место тогда и только тогда, когда

$$\frac{\Lambda(t_n)}{d(t_n)} \Rightarrow Y \quad (n \rightarrow \infty). \quad (23)$$

Как известно, семейство масштабных смесей нормальных законов (20) идентифицируемо, т.е. из того, что $\mathbf{E}\Phi(W_1x) = \mathbf{E}\Phi(W_2x)$, $x \in \mathbb{R}^1$, для неотрицательных случайных величин W_1 и W_2 , вытекает, что $W_1 \stackrel{d}{=} W_2$ (см., например, [6]). Поэтому распределение случайной величины Y не зависит от выбора последовательности $\{t_1, t_2, \dots\}$. Из произвольности последовательности $\{t_n\}_{n \geq 1}$ вытекает, что (23) эквивалентно (19). Теорема доказана.

Следствие 1. В условиях теоремы 1 для асимптотической нормальности оценки $\psi_{N(t)}(s)$ при $t \rightarrow \infty$:

$$\mathbf{P}\left\{\sigma^{-1}\sqrt{d(t)}(\psi_{N(t)}(s) - \psi(s)) < x\right\} \Rightarrow \Phi(x) \quad (t \rightarrow \infty)$$

необходимо и достаточно, чтобы

$$\frac{\Lambda(t)}{d(t)} \xrightarrow{\mathbf{P}} 1 \quad (t \rightarrow \infty). \quad (24)$$

Из теоремы 1 мы можем сделать несколько выводов об условиях состоятельности и асимптотической несмещенности оценки $\psi_{N(t)}(s)$. А именно, справедливы следующие утверждения.

Следствие 2. Пусть выполнены условия теоремы 1 и существуют неограниченно возрастающая функция $d(t)$ и случайная величина Y такие, что имеет место сходимость (19). Тогда оценка $\psi_{N(t)}(s)$ состоятельна.

Доказательство. Функцию распределения случайной величины $\sigma^{-1}\sqrt{d(t)}(\psi_{N(t)}(s) - \psi(s))$ обозначим $\Psi_t(x)$. Для произвольного $\varepsilon > 0$ имеем

$$\begin{aligned} & \mathbf{P}\left\{|\psi_{N(t)}(s) - \psi(s)| > \varepsilon\right\} \\ &= \mathbf{P}\left\{\sigma^{-1}\sqrt{d(t)}|\psi_{N(t)}(s) - \psi(s)| > \varepsilon\sigma^{-1}\sqrt{d(t)}\right\} \\ &= \Psi_t\left\{-\varepsilon\sigma^{-1}\sqrt{d(t)}\right\} + 1 - \Psi_t\left\{\varepsilon\sigma^{-1}\sqrt{d(t)} + 0\right\}. \end{aligned} \quad (25)$$

Но, согласно теореме 1, в условиях следствия 2 семейство функций распределения $\{\Psi_t(x)\}_{t>0}$ слабо компактно вследствие сходимости (18). Это означает, что для любого $\delta > 0$ существует такое $R_\delta > 0$, что, каким бы ни было $t > 0$, для любого $R \geq R_\delta$ справедливо неравенство $\Psi_t(-R) + 1 - \Psi_t(R + 0) < \delta$. В частности, это выполнено и для $t \geq t_\varepsilon = \inf\{t: \varepsilon\sigma^{-1}\sqrt{d(t)} > R\}$. Таким образом, из (25) следует, что для произвольных $\varepsilon > 0$ и $\delta > 0$ существует $t_0 = t_0(\varepsilon, \delta)$ такое, что $\mathbf{P}\{|\psi_{N(t)}(s) - \psi(s)| > \varepsilon\} < \delta$, для всех $t \geq t_0$, что и означает состоятельность оценки $\psi_{N(t)}(s)$. Следствие доказано.

Особенностью данной задачи является то, что в случае невырожденной случайной величины Y асимптотическое распределение оценки $\psi_{N(t)}(s)$ имеет более тяжелые хвосты, нежели нормальное распределение.

В качестве примера рассмотрим ситуацию, когда $\Lambda(t)$ имеет показательное распределение с параметром $1/t$. В этом случае разумно положить $d(t) \equiv t$. Тогда распределение случайной величины Y из (19) будет стандартным показательным, и, следовательно, распределение случайной величины Z из (18) имеет вид

$$\begin{aligned}
 \mathbf{P}\{Z < x\} &= \int_0^\infty \Phi(\sqrt{y}x) e^{-y} dy = \int_0^\infty \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\sqrt{y}x} e^{-u^2/2} du \right] e^{-y} dy \\
 &= \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty \int_0^{\sqrt{y}x} \exp\left\{-\frac{u^2}{2} - y\right\} du dy \\
 &= \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty \int_{u^2/x^2}^\infty e^{-y} dy e^{-u^2/2} du \\
 &= \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty \exp\left\{-\frac{u^2}{2} \left(1 + \frac{2}{x^2}\right)\right\} du \\
 &= \frac{1}{2} \left(1 + \frac{x}{\sqrt{2+x^2}}\right). \tag{26}
 \end{aligned}$$

У этого распределения отсутствуют моменты порядка $k \geq 2$. Несложно видеть, что для $\frac{1}{2} < \beta < 1$ β -квантиль этого распределения равен $\sqrt{2}(2\beta-1)/\sqrt{1-(2\beta-1)^2}$. Поэтому, например, расстояние между квантилями порядков 0.975 и 0.025 этого распределения (что в определенном смысле соответствует длине «наикратчайшего доверительного интервала») оказывается почти в 2.2 раза больше соответствующей характеристики нормального распределения с тем же параметром масштаба. Этот пример наглядно иллюстрирует, насколько важно учитывать случайность объема выборки, по которой оценивается тот или иной параметр, в данном случае — вероятность разорения. В противном случае можно существенно ошибиться в реальной точности оценок или в их реальной надежности (легко видеть, что реальная доверительная вероятность «95-процентного нормального» интервала, вычисленная по распределению (26), оказывается меньшей, чем 0.82).

В то же время, если $N(t) = N_1(t)$, т.е. если $\Lambda(t) \equiv t$, что соответствует классическому процессу риска, то, как вытекает из следствия 1 с $d(t) \equiv t$, статистика $\psi_{N(t)}(s)$ является асимптотически нормальной. Другими словами, для такой ситуации оценка вероятности разорения, построенная по выборке $(X_1, \dots, X_{N_1(n)})$, асимптотически (при $n \rightarrow \infty$) эквивалентна оценке вероятности разорения $\psi_n(s)$, определенной соотношениями (10) и (11).

Из-за упомянутой выше особенности предельных законов (наличие тяжелых хвостов, что может выражаться в отсутствии моментов, в частности, математического ожидания) говорить об асимптотической несмещенности оценки $\psi_{N(t)}(s)$ в терминах моментов не всегда целесообразно. Тем не менее, оказывается справедливым следующее утверждение. (Как обычно, медиана случайной величины X будет обозначаться $\text{med } X$.)

Следствие 3. Пусть выполнены условия теоремы 1 и существуют неограниченно возрастающая функция $d(t)$ и случайная величина Y такие, что имеет место сходимость (19). Тогда оценка $\psi_{N(t)}(s)$ является асимптотически несмещенной в том смысле, что

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \text{med } \psi_{N(t)}(s) = \psi(s). \quad (27)$$

Более того,

$$\text{med } \psi_{N(t)}(s) = \psi(s) + o\left((d(t))^{-1/2}\right). \quad (28)$$

Доказательство. В условиях следствия 3, согласно теореме 1, имеет место сходимость (18), из которой, как легко видеть, вытекает, что

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \text{med } \left(\sigma^{-1} \sqrt{d(t)} (\psi_{N(t)}(s) - \psi(s)) \right) = \text{med } Z = 0,$$

откуда следует, что

$$\sigma^{-1} \sqrt{d(t)} (\text{med } \psi_{N(t)}(s) - \psi(s)) \rightarrow 0, \quad (29)$$

что в силу неограниченного возрастания функции $d(t)$ возможно только в случае, когда выполнено (27). Далее, соотношение (29) означает справедливость (28). Следствие доказано.

4. Непараметрическая оценка асимптотической дисперсии.

К сожалению, теоремой 1 нельзя напрямую воспользоваться для построения асимптотических доверительных интервалов, поскольку асимптотическая дисперсия σ^2 , определяемая соотношениями (14)–(16), неизвестна, будучи зависящей от неизвестной функции распределения $F(x)$. Имея в качестве конечной цели построение асимптотических доверительных интервалов для вероятности разорения $\psi(s)$, в данном пункте мы сосредоточим внимание на построении непараметрической оценки для σ^2 и изучении ее свойств.

Как и в п. 2, вначале мы чисто формально предположим, что в нашем распоряжении имеется выборка $X_1, \dots, X_n$ независимых одинаково распределенных наблюдений. Пусть $\{k(n)\}_{n \geq 1}$ — последовательность натуральных чисел, удовлетворяющая условиям: $1 \leq k(n) \leq n$, $k(n) \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$ и

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{r=1}^{k(n)} \left(\frac{s}{c} \right)^r r^{3/2} \cdot \max \left\{ 1, \sum_{l=1}^{k(n)} \left(\frac{s}{c} \right)^l l \right\} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty). \quad (30)$$

В качестве оценки σ^2 рассмотрим выражение

$$\sigma_n^2 = \left(1 - \frac{a}{c}\right) \sum_{r=1}^{2k(n)} \sum_{l=1}^{k(n)} \left(\frac{a}{c}\right)^{r+l} rl \bar{\sigma}_{r,l}, \quad (31)$$

где

$$\bar{\sigma}_{r,l} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \bar{h}_r(X_i) \bar{h}_l(X_i) - U_{n,r} U_{n,l}, \quad (32)$$

$$\bar{h}_j(x) = \frac{1}{a} \int_0^\infty U_{n,j-1}(s-y) \mathbf{1}_{[y,\infty)}(x) dy, \quad (33)$$

а $U_{n,k} = U_{n,k}(s)$ и $h_k(x_1, \dots, x_k)$ определяются соотношениями (8) и (9).

Лемма 5. Пусть последовательность натуральных чисел $\{k(n)\}_{n \geq 1}$ удовлетворяет условиям $1 \leq k(n) \leq n$, $k(n) \rightarrow \infty$ и (30). Тогда оценка σ_n^2 является состоятельной:

$$\sigma_n^2 \xrightarrow{\mathbf{P}} \sigma^2 \quad (n \rightarrow \infty). \quad (34)$$

Доказательство. Заметим, что из определения величин $h_j(x)$ и $\sigma_{r,l}$ (см. (15) и (16)) непосредственно вытекают оценки

$$0 \leq h_j(x) \leq \frac{s}{a}, \quad |\sigma_{r,l}| \leq \left(\frac{s}{a}\right)^2 + 1. \quad (35)$$

Поэтому из сходимости ряда

$$\sum_{r=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} \left(\frac{a}{c}\right)^{r+l} rl = \frac{(a/c)^2}{(1-a/c)^4}$$

следует сходимость ряда $\sum_{r=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} (a/c)^{r+l} rl \sigma_{r,l}$, и значит,

$$\bar{\sigma}_n^2 = \left(1 - \frac{a}{c}\right) \sum_{r=1}^{2k(n)} \sum_{l=1}^{k(n)} \left(\frac{a}{c}\right)^{r+l} rl \sigma_{r,l} \rightarrow \sigma^2 \quad (n \rightarrow \infty).$$

Поэтому для доказательства соотношения (34) достаточно убедиться, что

$$\sigma_n^2 - \bar{\sigma}_n^2 \xrightarrow{\mathbf{P}} 0 \quad (n \rightarrow \infty). \quad (36)$$

Докажем (36). С учетом соотношений (27)–(33) заметим, что для любого $\varepsilon > 0$ справедливы неравенства

$$\begin{aligned} \mathbf{P} \{|\bar{\sigma}_n^2 - \sigma_n^2| > \varepsilon\} &\leq \mathbf{P} \left\{ \left(1 - \frac{a}{c}\right) \sum_{r=1}^{2k(n)} \sum_{l=1}^{k(n)} \left(\frac{a}{c}\right)^{r+l} rl |\bar{\sigma}_{r,l} - \sigma_{r,l}| > \varepsilon \right\} \\ &\leq A_{n1} + A_{n2} + A_{n3}, \end{aligned} \quad (37)$$

где

$$\begin{aligned} A_{n1} = \mathbf{P} \left\{ \left(1 - \frac{a}{c}\right) \sum_{r=1}^{2k(n)} \sum_{l=1}^{k(n)} \left(\frac{a}{c}\right)^{r+l} rl \left| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n h_r(X_i) h_l(X_i) \right. \right. \\ \left. \left. - \mathbf{E} h_r(X_1) h_l(X_1) \right| > \frac{\varepsilon}{3} \right\}, \end{aligned} \quad (38)$$

$$A_{n2} = \mathbf{P} \left\{ \left(1 - \frac{a}{c} \right)^2 \sum_{r=1}^{k(n)} \sum_{l=1}^{k(n)} \left(\frac{a}{c} \right)^{r+l} \frac{rl}{n} \left| \sum_{i=1}^n \left[h_r(X_i) h_l(X_i) - \bar{h}_r(X_i) \bar{h}_l(X_i) \right] \right| > \frac{\varepsilon}{3} \right\}, \quad (39)$$

$$A_{n3} = \mathbf{P} \left\{ \left(1 - \frac{a}{c} \right)^2 \sum_{r=1}^{k(n)} \sum_{l=1}^{k(n)} \left(\frac{a}{c} \right)^{r+l} rl |U_{n,r} U_{n,l} - G^{*r}(s) G^{*l}(s)| > \frac{\varepsilon}{3} \right\}. \quad (40)$$

Теперь с учетом (37) нам достаточно убедиться, что

$$A_{ni} \longrightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty), \quad i = 1, 2, 3. \quad (41)$$

Докажем (41) при $i = 1$. По неравенствам Чебышева и Ляпунова мы имеем

$$\begin{aligned} A_{n1} &\leq \frac{3(1-a/c)^2}{\varepsilon} \sum_{r=1}^{k(n)} \sum_{l=1}^{k(n)} \left(\frac{a}{c} \right)^{r+l} rl \mathbf{E} \left| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n h_r(X_i) h_l(X_i) - \mathbf{E} h_r(X_1) h_l(X_1) \right| \\ &\leq \frac{3(1-a/c)^2}{\varepsilon} \sum_{r=1}^{k(n)} \sum_{l=1}^{k(n)} \left(\frac{a}{c} \right)^{r+l} rl \left[\mathbf{D} \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n h_r(X_i) h_l(X_i) \right) \right]^{1/2} \\ &\leq \frac{3(1-a/c)^2}{\varepsilon \sqrt{n}} \sum_{r=1}^{k(n)} \sum_{l=1}^{k(n)} \left(\frac{a}{c} \right)^{r+l} rl \left[\mathbf{D} (h_r(X_1) h_l(X_1)) \right]^{1/2}. \end{aligned} \quad (42)$$

Чтобы оценить дисперсию, стоящую под знаком суммы в правой части (42), применим неравенство (35) и получим

$$\mathbf{D} (h_r(X_1) h_l(X_1)) \leq \mathbf{E} h_r^2(X_1) h_l^2(X_1) \leq \frac{s^4}{a^4}.$$

Поэтому из (42) вытекает соотношение

$$A_{n1} \leq \frac{3(1-a/c)^2 s^2}{\varepsilon a^2 \sqrt{n}} \sum_{r=1}^{k(n)} \sum_{l=1}^{k(n)} \left(\frac{a}{c} \right)^{r+l} rl \leq \frac{3s^2}{\varepsilon c^2 (1-a/c)^2 \sqrt{n}} \longrightarrow 0 \quad (43)$$

при $n \rightarrow \infty$. Докажем теперь справедливость (41) при $i = 2$. Из (39) и соотношений $h_r(x) h_l(x) - \bar{h}_r(x) \bar{h}_l(x) = h_l(x)(h_r(x) - \bar{h}_r(x)) + \bar{h}_r(x)(h_l(x) - \bar{h}_l(x))$, $0 \leq h_j(x) \leq s/a$, $\bar{h}_j(x) \leq s^j/a^j$ нетрудно видеть, что

$$A_{n2} \leq B_{n1} + B_{n2}, \quad (44)$$

где

$$B_{n1} = \mathbf{P} \left\{ \left(1 - \frac{a}{c} \right)^2 \sum_{r=1}^{k(n)} \sum_{l=1}^{k(n)} \left(\frac{a}{c} \right)^{r+l} rl \sum_{i=1}^n |h_r(X_i) - \bar{h}_r(X_i)| > \frac{na\varepsilon}{6s} \right\}, \quad (45)$$

$$B_{n2} = \mathbf{P} \left\{ \left(1 - \frac{a}{c} \right)^2 \sum_{r=1}^{k(n)} \sum_{l=1}^{k(n)} \left(\frac{a}{c} \right)^{r+l} rl \sum_{i=1}^n |h_l(X_i) - \bar{h}_l(X_i)| \frac{s^r}{a^r} > \frac{n\varepsilon}{6} \right\}. \quad (46)$$

Оценивая эти величины с помощью неравенств Чебышева и Ляпунова, с учетом (33) мы получаем

$$\begin{aligned}
 B_{n1} &\leq \frac{6s}{c\varepsilon} \sum_{r=1}^{k(n)} r \left(\frac{a}{c}\right)^r \mathbf{E} \left| h_r(X_i) - \bar{h}_r(X_i) \right| \\
 &\leq \frac{6s}{ca\varepsilon} \sum_{r=1}^{k(n)} r \left(\frac{a}{c}\right)^r \int_0^s \mathbf{E} \left| U_{n,r-1}(s-y) - G^{*(r-1)}(s-y) \right| dy \\
 &\leq \frac{6s}{ca\varepsilon} \sum_{r=1}^{k(n)} r \left(\frac{a}{c}\right)^r \int_0^s [\mathbf{D}U_{n,r-1}(s-y)]^{1/2} dy.
 \end{aligned} \tag{47}$$

Дисперсию, стоящую под знаком интеграла в правой части (47), оценим с помощью следующего результата из [10] (см. лемму 1.1.4 на с. 27 там). Пусть ядро H U -статистики вида

$$U_n = \frac{1}{C_n^m} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_m \leq n} H(X_{i_1}, \dots, X_{i_m})$$

удовлетворяет условию $\mathbf{E}H^2(X_1, \dots, X_m) < \infty$. Тогда справедливо неравенство

$$\mathbf{D}U_n \leq \frac{m}{n} \mathbf{D}H(X_1, \dots, X_m). \tag{48}$$

С учетом (48) мы имеем

$$\begin{aligned}
 \mathbf{D}U_{n,r-1}(s-y) &\leq \frac{r-1}{n} \mathbf{D}h_{r-1}(X_1, \dots, X_{r-1}) \\
 &\leq \frac{r-1}{n} \mathbf{E}h_{r-1}^2(X_1, \dots, X_{r-1}).
 \end{aligned} \tag{49}$$

Из (33) легко следует, что

$$0 \leq h_k(x_1, \dots, x_k) \leq \frac{s^k}{a^k}. \tag{50}$$

Поэтому из (49) вытекает оценка

$$\mathbf{D}U_{n,r-1}(s-y) \leq \frac{(r-1)s^{2(r-1)}}{na^{2(r-1)}}. \tag{51}$$

С учетом (47) и (51) мы имеем

$$B_{n1} \leq \frac{6s}{c\varepsilon\sqrt{n}} \sum_{r=1}^{k(n)} \left(\frac{a}{c}\right)^r r \sqrt{r-1} \left(\frac{s}{a}\right)^r \leq \frac{6s}{c\varepsilon\sqrt{n}} \sum_{r=1}^{k(n)} \left(\frac{s}{c}\right)^r r^{3/2} \rightarrow 0$$

при $n \rightarrow \infty$ в силу условия (30). Аналогично, используя неравенства типа (47) и (51), получим

$$\begin{aligned}
 B_{n2} &\leq \frac{6(1-a/c)^2}{\varepsilon} \sum_{r=1}^{k(n)} \sum_{l=1}^{k(n)} \left(\frac{s}{c}\right)^r \left(\frac{a}{c}\right)^l r l \mathbf{E} \left| h_l(X_1) - \bar{h}_l(X_1) \right| \\
 &\leq \frac{6(1-a/c)^2}{\varepsilon\sqrt{n}} \sum_{r=1}^{k(n)} \sum_{l=1}^{k(n)} \left(\frac{s}{c}\right)^{r+l} r l^{3/2} \rightarrow 0
 \end{aligned}$$

при $n \rightarrow \infty$ опять-таки в силу условия (30). Осталось убедиться, что соотношение (41) выполняется при $i = 3$. С этой целью заметим, что из (32), (33), (50) и соотношений

$$U_{n,r}U_{n,l} - G^{*r}(s)G^{*l}(s) = U_{n,l}(U_{n,r} - G^{*r}(s)) + G^{*r}(s)(U_{n,l} - G^{*l}(s)),$$

$$\mathbf{E}U_{n,k} = G^{*k}(s), \quad G^{*k}(s) \leq 1$$

следует, что для правой части (40) справедлива оценка

$$A_{n,3} \leq B_{n3}^{(1)} + B_{n3}^{(2)}, \quad (52)$$

где

$$B_{n3}^{(1)} = \mathbf{P} \left\{ \left(1 - \frac{a}{c}\right)^2 \sum_{r=1}^{k(n)} \sum_{l=1}^{k(n)} \left(\frac{a}{c}\right)^{r+l} rl |U_{n,l} - G^{*l}(s)| > \frac{\varepsilon}{6} \right\}, \quad (53)$$

$$B_{n3}^{(2)} = \mathbf{P} \left\{ \left(1 - \frac{a}{c}\right)^2 \sum_{r=1}^{k(n)} \sum_{l=1}^{k(n)} \left(\frac{a}{c}\right)^{r+l} rl |U_{n,l}| |U_{n,r} - G^{*r}(s)| > \frac{\varepsilon}{6} \right\}. \quad (54)$$

Оценим $B_{n3}^{(1)}$ с помощью неравенств Чебышева и Ляпунова:

$$\begin{aligned} B_{n3}^{(1)} &\leq \mathbf{P} \left\{ \left(1 - \frac{a}{c}\right)^2 \sum_{r=1}^{\infty} \left(\frac{a}{c}\right)^r r \sum_{l=1}^{k(n)} \left(\frac{a}{c}\right)^l l |U_{n,l} - G^{*l}(s)| > \frac{\varepsilon}{6} \right\} \\ &= \mathbf{P} \left\{ \frac{a}{c} \sum_{l=1}^{k(n)} \left(\frac{a}{c}\right)^l l |U_{n,l} - G^{*l}(s)| > \frac{\varepsilon}{6} \right\} \\ &\leq \frac{6a}{c\varepsilon} \sum_{l=1}^{k(n)} \left(\frac{a}{c}\right)^l l \mathbf{E} |U_{n,l} - G^{*l}(s)| \leq \frac{6a}{c\varepsilon} \sum_{l=1}^{k(n)} \left(\frac{a}{c}\right)^l l [\mathbf{D}U_{n,l}]^{1/2}. \end{aligned} \quad (55)$$

Чтобы оценить дисперсии, стоящие под знаком суммы в правой части (55), применим неравенства (48)–(51) и получим

$$B_{n3}^{(1)} \leq \frac{6a}{c\varepsilon\sqrt{n}} \sum_{l=1}^{k(n)} \left(\frac{s}{c}\right)^l l^{3/2} \rightarrow 0$$

при $n \rightarrow \infty$ в силу условия (30). Теперь рассмотрим $B_{n3}^{(2)}$. По аналогии с уже доказанным, из (54) мы получим

$$\begin{aligned} B_{n3}^{(2)} &\leq \frac{6(1 - a/c)^2}{\varepsilon} \sum_{r=1}^{k(n)} \sum_{l=1}^{k(n)} \left(\frac{a}{c}\right)^{r+l} rl \mathbf{E} |U_{n,l}| |U_{n,r} - G^{*r}(s)| \\ &\leq \frac{6(1 - a/c)^2}{\varepsilon} \sum_{r=1}^{k(n)} \sum_{l=1}^{k(n)} \left(\frac{a}{c}\right)^{r+l} rl \left[\mathbf{E}U_{n,l}^2\right]^{1/2} [\mathbf{D}U_{n,r}]^{1/2}. \end{aligned} \quad (56)$$

Используя соотношения (48)–(51), получим оценки

$$\mathbf{D}U_{n,r} \leq \frac{rs^{2r}}{na^{2r}}, \quad \mathbf{E}U_{n,l}^2 = \mathbf{D}U_{n,l} + (G^{*l}(s))^2 \leq \frac{ls^{2l}}{na^{2l}} + 1.$$

Подставляя эти оценки в (56) и используя неравенство $\sqrt{1+x} \leq 1 + \sqrt{x}$, $x \geq 0$, убеждаемся, что условие (30) гарантирует стремление величины $B_{n3}^{(2)}$ к нулю при $n \rightarrow \infty$. Теперь утверждение леммы следует из соотношений (52), (44), (43) и (37). Лемма доказана.

З а м е ч а н и е 1. Условие (30) означает, что если $s < c$, то $k(n)$ может возрастать довольно быстро, например, $k(n)$ может равняться n . Если $s = c$, то $k(n) = o(n^{1/5})$. Если же $s > c$, что типично, то $k(n)$ может расти весьма медленно, например, как $\alpha \ln n$ с $\alpha < 1/(\ln s - \ln c)$.

З а м е ч а н и е 2. Используя определение (33), несложно убедиться, что неравенство (50) можно уточнить следующим образом:

$$0 \leq h_k(x_1, \dots, x_k) \leq \min \left\{ \frac{s^k}{a^k}, \frac{x_1 \cdots x_k}{a^k} \right\}.$$

Поэтому если предположить, что существует второй момент $\mu_2 = \mathbf{E}X_1^2$, то основное неравенство (51) можно уточнить:

$$\mathbf{D}U_{n,k} \leq \frac{k}{n} \mathbf{E} \left[\min \left\{ \frac{s^k}{a^k}, \frac{X_1 \cdots X_k}{a^k} \right\} \right]^2 \leq \frac{k}{n} \min \left\{ \frac{s^{2k}}{a^{2k}}, \frac{\mu_2^k}{a^{2k}} \right\}.$$

С учетом этого неравенства, условие (30) можно заменить более точным соотношением

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{r=1}^{k(n)} \left(\frac{\min\{s, \mu_2\}}{c} \right)^r r^{3/2} \max \left\{ 1, \sum_{l=1}^{k(n)} \left(\frac{s}{c} \right)^l l \right\} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty).$$

Лемма 6. Пусть $\{\xi_n\}_{n \geq 1}$ и $\{\eta_n\}_{n \geq 1}$ — последовательности случайных величин, причем $\xi_n \Rightarrow \xi$ и $\eta_n \xrightarrow{\mathbf{P}} b$ при $n \rightarrow \infty$, где $b \in \mathbb{R}^1$, а ξ — некоторая случайная величина. Тогда $\xi_n \eta_n \Rightarrow b \xi$ ($n \rightarrow \infty$).

Д о к а з а т е л ь с т в о см. в [11], раздел 20.6 (с. 281–282).

Несмотря на то, что следующее утверждение имеет вспомогательный характер, в силу его важности мы оформим его в виде теоремы.

Теорема 2. Пусть оценка $\psi_n(s)$ определяется соотношениями (10) и (11), причем функция $m(n) \leq n$ неограниченно возрастает при $n \rightarrow \infty$ так, что выполнено (17). Пусть оценка σ_n^2 определяется соотношениями (31)–(33), причем последовательность натуральных чисел $\{k(n)\}_{n \geq 1}$ удовлетворяет условиям $1 \leq k(n) \leq n$, $k(n) \rightarrow \infty$ и (30). Тогда случайная величина $\sigma_n^{-1} \sqrt{n}(\psi_n(s) - \psi_0(s))$ асимптотически нормальна:

$$\mathbf{P} \left\{ \sigma_n^{-1} \sqrt{n}(\psi_n(s) - \psi_0(s)) < x \right\} \Rightarrow \Phi(x) \quad (n \rightarrow \infty).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Положим

$$\xi_n = \sigma^{-1} \sqrt{n}(\psi_n(s) - \psi_0(s)), \quad \eta_n = \sigma_n^{-1} \sigma.$$

По лемме 3 $\mathbf{P}\{\xi_n < x\} \Rightarrow \Phi(x)$, а по лемме 5 $\eta_n \xrightarrow{\mathbf{P}} 1$ при $n \rightarrow \infty$. Теперь требуемое следует из леммы 6. Теорема доказана.

Теперь перейдем к построению оценки вероятности разорения для обобщенного процесса риска по наблюдениям за имеющейся траекторией процесса до некоторого момента времени t . Из приведенных выше рассуждений ясно, что в качестве оценки асимптотической дисперсии σ^2 следует взять оценку $\sigma_{N(t)}^2$, положив

$$\sigma_{N(t)}^2 = \left(1 - \frac{a}{c}\right)^2 \sum_{r=1}^{k(N(t))} \sum_{l=1}^{k(N(t))} \left(\frac{a}{c}\right)^{r+l} r l \bar{\sigma}_{r,l}, \quad (57)$$

где

$$\bar{\sigma}_{r,l} = \frac{1}{N(t)} \sum_{i=1}^{N(t)} \bar{h}_r(X_i) \bar{h}_l(X_i) - U_{N(t),r} U_{N(t),l}, \quad (58)$$

$$\bar{h}_j(x) = \frac{1}{a} \int_0^\infty U_{N(t),j-1}(s-y) \mathbf{1}_{[y,\infty)}(x) dy, \quad (59)$$

$$U_{N(t),k} = U_{N(t),k}(s) = \frac{1}{C_{N(t)}^k} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq N(t)} h_k(X_{i_1}, \dots, X_{i_k}), \quad (60)$$

$$\begin{aligned} & h_k(x_1, \dots, x_k) \\ &= \frac{1}{a^k} \int_0^\infty \dots \int_0^\infty \mathbf{1}_{[0,s)}(y_1 + \dots + y_k) \prod_{j=1}^k \mathbf{1}_{[y_j,\infty)}(x_j) dy_1 \dots dy_k. \end{aligned} \quad (61)$$

Чтобы сформулировать утверждение о состоятельности оценки $\sigma_{N(t)}^2$ при $t \rightarrow \infty$, нам понадобится еще одно вспомогательное утверждение.

Лемма 7. Пусть $\{\xi_j\}_{j \geq 1}$ — последовательность случайных величин, слабо сходящаяся к некоторой случайной величине ξ при $j \rightarrow \infty$. Пусть $\{N_n\}_{n \geq 1}$ — последовательность целочисленных положительных случайных величин такая, что при каждом $n \geq 1$ случайная величина N_n независима от последовательности $\{\xi_j\}_{j \geq 1}$ и $N_n \xrightarrow{P} \infty$ при $n \rightarrow \infty$. Тогда $\xi_{N_n} \Rightarrow \xi$ ($n \rightarrow \infty$).

Доказательство этого результата можно найти, например, в [12] (см. теорему 5.1.1 там).

Теперь мы можем сформулировать следующее утверждение о состоятельности оценки $\sigma_{N(t)}^2$.

Лемма 8. Пусть оценка $\sigma_{N(t)}^2$ определяется соотношениями (57)–(61), в которых последовательность натуральных чисел $\{k(n)\}_{n \geq 1}$ удовлетворяет условиям $1 \leq k(n) \leq n$, $k(n) \rightarrow \infty$ и (30). Предположим, что $\Lambda(t) \xrightarrow{P} \infty$ при $t \rightarrow \infty$. Тогда

$$\sigma_{N(t)}^{-1} \sigma \xrightarrow{P} 1 \quad (t \rightarrow \infty).$$

Доказательство. По лемме 1 из условия $\Lambda(t) \xrightarrow{P} \infty$ вытекает, что $N(t) \xrightarrow{P} \infty$. Теперь требуемое следует из лемм 5 и 7. Лемма доказана.

5. Интервальные оценки вероятности разорения для обобщенного процесса риска. Основную роль в данном пункте играет следующее утверждение.

Теорема 3. Пусть оценка $\psi_{N(t)}(s)$ определяется соотношениями (12) и (13), причем функция $m(n)$ такова, что $m(n) \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$ так, что выполнено условие (17). Пусть оценка $\sigma_{N(t)}^2$ определяется соотношениями (57)–(61), в которых последовательность натуральных чисел $\{k(n)\}_{n \geq 1}$ удовлетворяет условиям $1 \leq k(n) \leq n$, $k(n) \rightarrow \infty$ и (30). Предположим, что $\Lambda(t) \xrightarrow{P} \infty$ при $t \rightarrow \infty$. Тогда

$$\mathbf{P} \left\{ \sigma_{N(t)}^{-1} \sqrt{N(t)} (\psi_{N(t)}(s) - \psi(s)) < x \right\} \Rightarrow \Phi(x) \quad (t \rightarrow \infty). \quad (62)$$

Доказательство. Данное утверждение является непосредственным следствием теоремы 2 и леммы 7.

Для $\delta \in (0, 1)$ δ -квантиль стандартного нормального распределения будем обозначать u_δ . При больших t из (62) вытекает, что

$$\mathbf{P} \left\{ \sigma_{N(t)}^{-1} \sqrt{N(t)} (\psi_{N(t)}(s) - \psi(s)) < x \right\} \approx \Phi(x). \quad (63)$$

Поэтому для $\gamma \in (0, 1)$ приближенный 100γ -процентный доверительный интервал для вероятности разорения $\psi(s)$ будет иметь вид

$$\psi_{N(t)}(s) - \frac{u_{(\gamma+1)/2} \sigma_{N(t)}}{\sqrt{N(t)}} \leq \psi(s) \leq \psi_{N(t)}(s) + \frac{u_{(\gamma+1)/2} \sigma_{N(t)}}{\sqrt{N(t)}}. \quad (64)$$

Наряду с теоремой 3, мы можем сформулировать еще один асимптотический результат.

Теорема 4. Пусть выполнены условия теоремы 3 и существуют неограниченно возрастающая функция $d(t)$ и случайная величина Y такие, что имеет место сходимость (19). Тогда

$$\mathbf{P} \left\{ \sigma_{N(t)}^{-1} \sqrt{d(t)} (\psi_{N(t)}(s) - \psi(s)) < x \right\} \Rightarrow \mathbf{E}\Phi(x\sqrt{Y}) \quad (t \rightarrow \infty). \quad (65)$$

Доказательство. По теореме 1 мы имеем

$$\mathbf{P} \left\{ \sigma^{-1} \sqrt{d(t)} (\psi_{N(t)}(s) - \psi(s)) < x \right\} \Rightarrow \mathbf{E}\Phi(x\sqrt{Y}) \quad (t \rightarrow \infty). \quad (66)$$

Положим

$$\eta_t = \frac{\sigma_{N(t)}^{-1}}{\sigma^{-1}}, \quad \xi_t = \sigma^{-1} \sqrt{d(t)} (\psi_{N(t)}(s) - \psi(s)).$$

Теперь требуемое вытекает из леммы 6 с учетом (66) и леммы 8. Теорема доказана.

Если δ -квантиль функции распределения $\Psi(x) = \mathbf{E}\Phi(x\sqrt{Y})$ обозначить w_δ , то при известном распределении случайной величины Y , наряду

с (64), с помощью (65) для $\gamma \in (0, 1)$ мы можем построить еще один приближенный 100γ -процентный доверительный интервал для вероятности разорения $\psi(s)$:

$$\psi_{N(t)}(s) - \frac{w_{(\gamma+1)/2\sigma_{N(t)}}}{\sqrt{d(t)}} \leq \psi(s) \leq \psi_{N(t)}(s) + \frac{w_{(\gamma+1)/2\sigma_{N(t)}}}{\sqrt{d(t)}}. \quad (67)$$

В частности, если $N(t)$ — стандартный пуассоновский процесс, что соответствует $\Lambda(t) \equiv t$, то естественно положить $d(t) \equiv t$. В этом случае, как легко видеть, $\mathbf{P}\{Y = 1\} = 1$, так что $\Psi(x) \equiv \Phi(x)$, и тем самым приближенный 100γ -процентный доверительный интервал (67) для вероятности разорения в случае классического процесса риска принимает вид

$$\psi_{N(t)}(s) - \frac{u_{(\gamma+1)/2\sigma_{N(t)}}}{\sqrt{t}} \leq \psi(s) \leq \psi_{N(t)}(s) + \frac{u_{(\gamma+1)/2\sigma_{N(t)}}}{\sqrt{t}}.$$

В заключение авторы хотели бы выразить искреннюю признательность рецензенту, внимательно прочитавшему статью и указавшему на некоторые недочеты, исправление которых, несомненно, способствовало улучшению изложения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бенинг В. Е., Королев В. Ю. Асимптотическое поведение обобщенных процессов риска. — Обозрение прикл. промышл. матем., сер. финансовая и страховая математика, 1998, т. 5, в. 1, с. 116–133.
2. Bültmann H. Tendencies of development in risk theory. — Centennial Celebration of the Actuarial Profession in North America. V. 2. Schaumburg: The Society of Actuaries, 1989, p. 499–521.
3. Эмбрехтс П., Клоппельберг К. Некоторые аспекты страховой математики. — Теория вероятн. и ее примен., 1993, т. 38, в. 2, с. 374–416.
4. Beekman J. A. Collective risk results. — Trans. Soc. Actuaries, 1968, v. 20, p. 182.
5. Asmussen S. Applied Probability and Queues. Chichester: Wiley, 1987, 318 p.
6. Gnedenko B. V., Korolev V. Yu. Random Summation: Limit Theorems and Applications. Boca Raton, FL: CRC Press, 1996, 267 p.
7. Королев В. Ю. О сходимости распределений обобщенных процессов Кокса к устойчивым законам. — Теория вероятн. и ее примен., 1998, т. 43, в. 4, с. 786–792.
8. Croux K., Veraverbeke N. Nonparametric estimators for the probability of ruin. — Insurance: Math. Econ., 1990, v. 9, № 2/3, p. 127–130.
9. Королев В. Ю. Сходимость случайных последовательностей с независимыми случайными индексами. II. — Теория вероятн. и ее примен., 1995, т. 40, в. 4, с. 907–910.
10. Королук В. С., Боровских Ю. В. Теория U -статистик. Киев: Наукова думка, 1989, 383 с.
11. Крамер Г. Математические методы статистики. М.: Мир, 1975, 648 с.
12. Круглов В. М., Королев В. Ю. Предельные теоремы для случайных сумм. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1990, 269 с.
13. Бенинг В. Е., Королев В. Ю. Статистическое оценивание вероятности разорения для обобщенных процессов риска. — Теория вероятн. и ее примен., 1999, т. 44, в. 1, с. 161–164.

Поступила в редакцию
8.IV.1999